Professional paper UDK 514.752.2
https://doi.org/10.32762/zr.25.1.9

LOGARITAMSKA SPIRALA

LOGARITHMIC SPIRAL

Karmen Rabar*, Milena Sošić**

Sažetak

U ovom radu detaljnije se proučavaju svojstva logaritamske spirale zadane u polarnom sustavu te je stoga u uvodu najprije ukratko objašnjen polarni sustav. U središnjem dijelu rada obrazloženo je svojstvo logaritamske spirale koja sve svoje radijalne zrake siječe pod istim konstantnim kutom. Također, objašnjena je prirodna jednadžba logaritamske spirale i izvedena njezina jednadžba. Naglašen je odnos zakrivljenosti i polumjera kružnice zakrivljenosti u svakoj točki logaritamske spirale s motivacijom definiranja i izvođenja parametarskih jednadžbi evolute logaritamske spirale. Dokazano je da logaritamska spirala i njezina evoluta imaju jednaku prirodnu jednadžbu.

Ključne riječi: *duljina luka, zakrivljenost, prirodna jednadžba, polumjer kružnice zakrivljenosti, evoluta*

Abstract

In this paper, the properties of the logarithmic spiral given in the polar system are studied in more detail, thus the brief explanation of the polar system in the introduction. The paper deals with the property of a logarithmic spiral, which intersects all its radial rays at the same constant angle. Also, the natural equation of the logarithmic spiral is explained, and its equation is derived. The relationship between the curvature and the radius of the circle of curvature at each point of the logarithmic spiral is emphasized to define and derive the parametric equations of the evolved logarithmic spiral. It was proved that the logarithmic spiral and its evolute have the same natural equation.

Key words: *arc length, curvature, natural equation, radius of the circle of curvature, evolute*

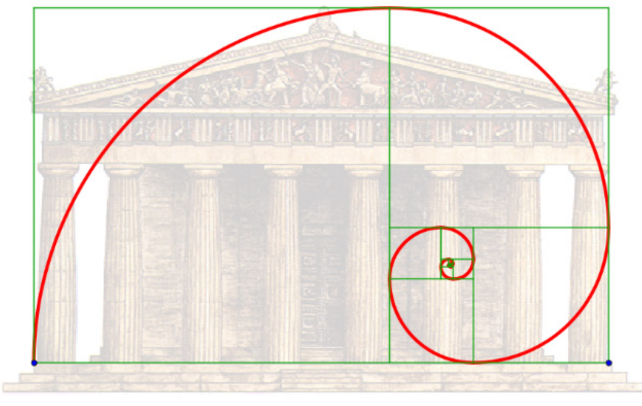
* Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku, Radmile Matejčić 2, 51000 Rijeka
E-mail: krabar1@student.uniri.hr

** Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku, Radmile Matejčić 2, 51000 Rijeka
E-mail: msosic@uniri.hr

Rad zaprimljen: 04.07.2022. Rad prihvaćen: 02.11.2022.

1. Uvod

Ovaj rad je proizašao iz završnog rada [1]. Logaritamska spirala je jedna od najpoznatijih krivulja koja se često pojavljuje u prirodi (ljuštura nautilusa, suncokretov cvijet, kraci spiralne galaksije, tropski cikloni, uragan). Prvi ju je opisao Albrecht Dürer (1471. – 1528.), koji ju je nazvao *vječnom linijom* („die ewige Linie"), a kasnije su je opsežno istraživali Rene Descartes (1596.-1650.) i Jacob Bernoulli (1655. – 1705.), koji ju je nazvao *Spira mirabilis* - *čudesnom spiralom*. Primjene logaritamske spirale u tehnici zasnovane su na njezinom svojstvu da sve svoje radijalne zrake siječe pod jednakim (konstantnim) kutom. Primjerice, rotirajući noževi u različitim strojevima za rezanje imaju oblik luka logaritamske spirale, zahvaljujući čemu kut rezanja ostaje nepromijenjen [2]. Neki autori nazivaju logaritamsku spiralu zlatnom spiralom i pritom je dovode u vezu sa zlatnim rezom, odnosno zlatnim omjerom u kojemu se veći dio prema manjem odnosi kao ukupni prema većem [3]. Približna vrijednost zlatnog omjera iznosi međutim njegova se točna vrijednost ne može dobiti, jer je on zapravo iracionalni broj $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$. Nadalje, konstrukcija logaritamske spirale povezuje se sa zlatnim pravokutnicima (kojima je omjer duže stranice naspram kraće jednak zlatnom omjeru ϕ). Najpoznatiji primjer primjene zlatnoga reza i logaritamske spirale je Partenon, gdje su omjeri veličina pojedinih dijelova hrama predstavljeni zlatnim omjerom ϕ, a logaritamska spirala se povezuje s upisanim zlatnim pravokutnicima (Slika 1) [4].



Slika 1. *Partenon i logaritamska spirala*

Usto, analize pojedinih autora pokazuju da se primjena zlatnog omjera, zlatnog pravokutnika, a time i zlatne (logaritamske) spirale može uočiti u izgradnji Keopsove piramide u Gizi, Konstantinovog slavoluka u Rimu, u unutrašnjosti Aja Sofije u Istanbulu, u crkvi sv. Marka u Veneciji, u zapadnom pročelju katedrale Notre Dame u Parizu, u izgradnji Taj Mahala u Indiji, ali i u zgradi Ujedinjenih Naroda u New Yorku i mnogim drugim manje poznatim građevinama. Zanimljivo je da je francuski arhitekt Le Corbusier (1887. – 1965.) razvio Modulor (arhitektonski mjerni sustav koji koristi zlatni omjer u modernoj arhitekturi) i primjenjivao ga u izgradnji svih svojih građevina [5].

Interesantnu primjenu logaritamske spirale u građevinarstvu možemo naći u [6], gdje se logaritamska spirala povezuje s kliznim plohama za račun najvećeg aktivnog pritiska i najmanjeg pasivnog otpora na podupore. Pritom se argumentira važnost klizne plohe oblika logaritamske spirale za određivanje najveće sile aktivnog pritiska na zid.

U pravokutnom koordinatnom sustavu jednadžba logaritamske spirale nije algebarska, što ima za posljedicu da je logaritamska spirala transcendentna ravninska krivulja, koja se izražava polarnom jednadžbom u polarnom sustavu. Stoga se u nastavku ukratko objašnjava polarni sustav, koordinatni prikaz proizvoljne točke u tom sustavu i grafički prikaz funkcije zadane polarnom jednadžbom.

Odaberemo li u ravnini neku proizvoljnu fiksnu točku P, postavimo li u njoj proizvoljni polupravac (zraku) p na kojemu s E označimo točku za koju vrijedi da je udaljena od točke P za jednu mjernu jedinicu, tada kažemo da točka P, polupravac p i točka E određuju *polarni sustav*. Pritom se točka P naziva *pol*, polupravac *p polarna os*, a točka *E jedinična točka* polarnog sustava. U polarnom sustavu svaka točka T određena je s dvije polarne koordinate r i φ, pa stoga pišemo $T = (r, \varphi)$. Pritom $r \in \mathbb{R}$ označava radijalnu koordinatu točke T, a $r \in \mathbb{R}$ amplitudu, tj. mjeru kuta koji polarna os zatvara s radijalnom zrakom (polupravcem) q s početkom u polu P. U većini slučajeva, mjera kuta φ izražava se u radijanima ili u stupnjevima, a izbor ovisi o kontekstu primjene. Konkretno, u navigacijskim sustavima koriste se mjere u stupnjevima, dok se u nekim fizičkim izračunima i gotovo u svim matematičkim izvorima koriste mjere u radijanima. U nastavku ćemo koristiti mjere u radijanima.

Na prirodan način nameće se pitanje kako se prikazuju točke u polarnom sustavu u ovisnosti o vrijednostima njihovih polarnih koordinata. Neka je $T = (r, \varphi)$ proizvoljna točka u polarnom sustavu i neka je q radijalna zraka s početkom u polu takva da je φ mjera kuta koji polarna os zatvara s q. Ako je $\varphi > 0$, onda kažemo da je *kut pozitivno orijentiran* (dobiva se rotacijom suprotnom od kretanja kazaljke na satu), a ako je $\varphi < 0$, onda kažemo da je *kut negativno orijentiran* (dobiva se rotacijom kretanja kazaljke na satu). Specijalno, za $\varphi = 0$ dobiva se polarna os. S druge strane, u ovisnosti o vrijednostima radijalne koordinate $r \in \mathbb{R}$ razlikujemo sljedeća tri slučaja:

1. Ako je $r = 0$, onda amplituda nije jednoznačno određena te stoga sve točke $(0, \varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ čine pol polarnog sustava, što ima za posljedicu da pol polarnog sustava nije jednoznačno određen točkom .
2. Ako je $r > 0$, onda se točka $T = (r, \varphi)$ konstruira na radijalnoj zraci q tako da je njezina udaljenost od pola jednaka radijalnoj koordinati $r > 0$.
3. Ako je $r < 0$, onda se točka $T = (r, \varphi)$ konstruira na radijalnoj zraci q' tako da je njezina udaljenost od pola jednaka apsolutnoj vrijednosti radijalne koordinate $r < 0$. Pritom mjera kuta koji polarna os zatvara s radijalnom zrakom q' ovisi o vrijednosti amplitude $\varphi \in \mathbb{R}$.
   - Za $0 \leq \varphi \leq \pi$ ili $-2\pi \leq \varphi \leq -\pi$ mjera kuta koji polarna os zatvara s q' jednaka je $\varphi + \pi$.
   - Za $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ ili $-\pi \leq \varphi \leq 0$ mjera kuta koji polarna os zatvara s jednaka je $\varphi - \pi$.

Uzimajući u obzir da višestruki obilasci (rotacije) neke točke oko pola polarnog sustava za proizvoljno mnogo „punih krugova" ne utječu na geometrijski položaj te točke u polarnom sustavu, zaključujemo da se svaka točka u polarnom sustavu može pisati u obliku:

$$T = (r, \varphi) = (r, \varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

što ima za posljedicu da amplitude (mjere kuteva) φ i $\varphi + 2k\pi$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$ odgovaraju istom kutu kojeg polarna os zatvara s radijalnom zrakom q s početkom u polu P polarnog sustava.

S druge strane, obzirom na prethodno navedeno, lako se može pokazati da za svaki $r > 0$ vrijedi $(r, \varphi) = (-r, \varphi + (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Neka je u polarnom sustavu krivulja izražena polarnom jednadžbom:

$$\boldsymbol{r = r(\varphi)}, \quad \boldsymbol{\varphi \in I} \subseteq \mathbb{R}, \tag{2}$$

gdje je $r: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable φ. Tada je graf funkcije r krivulja Γ koja je zapravo skup svih točaka $T = (r, \varphi)$ polarnog sustava za koje vrijedi (2) i pišemo $\Gamma = \{(r, \varphi) | \, r = r(\varphi), \ \varphi \in I\}$.

Drugim riječima, točka $T_i = (r_i, \varphi_i)$ pripada krivulji Γ ako je njezinoj amplitudi $\varphi_i \in I \subseteq \mathbb{R}$ (iz područja definicije funkcije r) pridružena njezina radijalna koordinata r_i takva da je $r_i = r(\varphi_i) \in \mathbb{R}$.

2. Logaritamska spirala i njezina osnovna svojstva

2.1. Polarna jednadžba logaritamske spirale

U polarnom sustavu, jednadžbu logaritamske spirale najčešće pišemo u obliku:

$$r = a^{\varphi}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Naglasimo da se logaritamska spirala u različitim izvorima također izražava jednadžbama koje se mogu svesti na (3). Primjerice, neka je logaritamska spirala izražena jednadžbom:

$$r = c \cdot a^{\varphi}, \quad c > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Ako polarnu os zarotiramo za φ_1 (neku fiksnu mjeru kuta), onda (4) zapisujemo u obliku $r = c \cdot a^{\varphi + \varphi_1}$, odakle primjenom svojstva množenja potencija jednakih baza slijedi $r = c \cdot a^{\varphi_1} \cdot a^{\varphi}$. Uvođenjem supstitucije $\varphi_1 = \log_a c^{-1}$ slijedi $r = c \cdot a^{\log_a c^{-1}} \cdot a^{\varphi}$ te je stoga $r = c \cdot c^{-1} \cdot a^{\varphi}$, odnosno $r = a^{\varphi}$. Pritom smo primijenili svojstvo logaritamske funkcije $a^{\log_a x} = x$, definirane za svaki $x > 0$ i $a > 0$, $a \neq 1$.

Time smo pokazali da se (4) može svesti na (3). Analogno se pokazuje da se sljedeća jednadžba logaritamske spirale:

$$r = \alpha \cdot e^{\beta \cdot \varphi}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{5}$$

može svesti na (3). Naime, primijenimo li svojstvo potenciranja potencija, tada (5) zapisujemo u obliku $r = \alpha \cdot \left(e^{\beta}\right)^{\varphi}$, odakle uvođenjem supstitucija i $c = \alpha$ i $a = e^{\beta}$ proizlazi (4) koja se nadalje svodi na (3).

Obzirom na navedeno, zaključujemo da se u polarnom sustavu logaritamska spirala može izraziti s (3).

2.2. Svojstva logaritamske spirale

Za logaritamsku spiralu zapisanu izrazom (3), vrijede sljedeća svojstva:

1. Neka je $0 < a < 1$. Ako teži prema −∞, onda se logaritamska spirala razmata u negativnoj orijentaciji (smjeru kretanja kazaljke na satu), a ako φ teži prema +∞, onda se logaritamska spirala zamata oko pola u pozitivnoj orijentaciji (smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu), što ima za posljedicu da za „rastuće“ varijabilne mjere kuta $\varphi \in \mathbb{R}$ (koje poprimaju vrijednosti počevši od −∞ prema +∞) funkcijske vrijednosti $r(\varphi) = a^{\varphi}$ „padaju“ prema nuli, čime se logaritamska spirala zamata oko pola u pozitivnoj orijentaciji praveći oko njega beskonačno mnogo zavoja. Time je pol asimptotska točka logaritamske spirale.
2. Neka je $a > 1$. Ako teži prema −∞, onda se logaritamska spirala zamata oko pola u negativnoj orijentaciji (praveći oko njega beskonačno mnogo zavoja), a ako φ teži prema +∞, onda se logaritamska spirala razmata u pozitivnoj orijentaciji. Dakle, za „rastuće“ varijabilne mjere kuta $\varphi \in \mathbb{R}$ (koje poprimaju vrijednosti počevši od −∞ prema +∞) funkcijske vrijednosti $r(\varphi) = a^{\varphi}$ „rastu“, pa se logaritamska spirala razmata u pozitivnoj orijentaciji.

3. Ako je $\varphi = 0$, onda je $r = 1$, odakle proizlazi da logaritamska spirala siječe polarnu os u jediničnoj točki E i u točkama $P_i = \left(a^{2k\pi}, 2k\pi\right)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

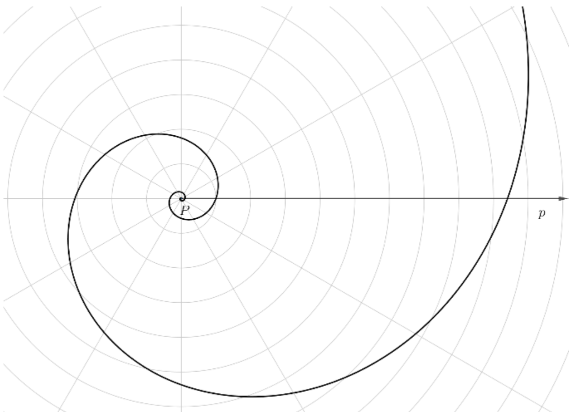
U posebnom slučaju, za $a = 1$ slijedi da je $r(\varphi) = 1$ za svaki $\varphi \in \mathbb{R}$, pa je stoga graf te funkcije jedinična kružnica sa središtem u polu. Nadalje, za $a = 0$ je za svaki $\varphi \in \mathbb{R}$ te je stoga u ovom slučaju graf dane funkcije pol (točka) polarnog sustava.

Iz navedenog proizlazi da je logaritamska spirala graf funkcije $r(\varphi) = a^{\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ jedino ako je $0 < a < 1$ ili $a > 1$. Pritom se ona u pozitivnoj orijentaciji zamata oko pola ako je $0 < a < 1$, a razmata ako je $a > 1$.

Nadalje, za svaki proizvoljni fiksni parametar $a > 0$, $a \neq 1$ logaritamske spirale $r = a^{\varphi}$ i $r = a^{-\varphi}$ su simetrične u odnosu na polarnu os te je stoga dovoljno razmatrati logaritamske spirale izražene jednadžbom $r = a^{\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ za $a > 1$ jer se svaka logaritamska spirala $r = a^{\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ za proizvoljni $0 < a < 1$ može dobiti simetrijom u odnosu na polarnu os odgovarajuće logaritamske spirale $r = a^{-\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}, a > 1$.

U nastavku ćemo promatrati logaritamsku spiralu (Slika 2) izraženu jednadžbom:

$$r = a^{\varphi}, \quad a > 1, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{6}$$



Slika 2. *Logaritamska spirala* $r = a^{\varphi}, a > 1, \varphi \in \mathbb{R}$

Primjenom prethodno obrazloženog svojstva (1) direktno proizlazi da točke s amplitudama $\varphi + 2k\pi$ i $\varphi + 2k\pi + 2\pi$ za svaki $k \in Z$ i $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ pripadaju istoj radijalnoj zraci te su stoga za svaki $k \in \mathbb{Z}$ sljedeće dvije točke

$$T_k = \left(a^{\varphi+2k\pi}, \varphi + 2k\pi\right) \quad \text{i} \quad T_{k+1} = \left(a^{\varphi+2k\pi+2\pi}, \varphi + 2k\pi + 2\pi\right)$$

susjedne točke logaritamske spirale (6) koje pripadaju istoj radijalnoj zraci q s početkom u polu. Označimo li s $|T_k T_{k+1}|$ udaljenost (razmak) između točaka T_k i T_{k+1}, tada je:

$$|T_k T_{k+1}| = a^{\varphi+2k\pi+2\pi} - a^{\varphi+2k\pi} = a^{\varphi+2k\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Pritom smo koristili svojstvo množenja potencija jednakih baza. Naročito ako je $\varphi = 0$, onda je radijalna zraka q zapravo polarna os p. Stoga iz (7) slijedi da je $|T_k T_{k+1}| = a^{2k\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ udaljenost između dviju susjednih točaka $T_k = \left(a^{2k\pi}, 2k\pi\right)$ i $T_{k+1} = \left(a^{2k\pi+2\pi}, 2k\pi + 2\pi\right)$ na polar-noj osi. U ovisnosti o cjelobrojnim vrijednostima za k = 0, 1, 2, –1, –2 odredimo udaljenost između nekoliko susjednih točaka na radijalnoj zraci q. Podsjetimo se da, ako je $k = 0$, onda je radijalna zraka jednaka polarnoj osi, za $k > 0$ kut između polarne osi i radijalne zrake je pozitivno orijentiran, a za $k < 0$ je negativno orijentiran. Dakle, koristeći (7) dobivamo:

$k = 0 \quad |T_0 T_1| = a^{\varphi} \cdot (a^{2\pi} - 1)$

$k = 1 \quad |T_1 T_2| = a^{\varphi+2\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{2\pi} \cdot a^{\varphi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{2\pi} \cdot |T_0 T_1|$

$k = 2 \quad |T_2 T_3| = a^{\varphi+4\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{2\pi} \cdot a^{\varphi+2\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{2\pi} \cdot |T_1 T_2|$

$$k = -1 \qquad \begin{aligned} |T_{-1} T_0| &= a^{\varphi-2\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{-2\pi} \cdot a^{\varphi} \cdot (a^{2\pi} - 1) \\ &= a^{-2\pi} \cdot |T_0 T_1| \end{aligned}$$

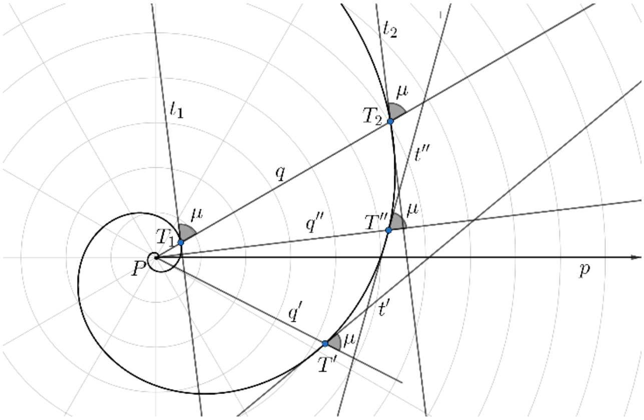
$$k = -2 \qquad \begin{aligned} |T_{-2} T_{-1}| &= a^{\varphi-4\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) = a^{-2\pi} \cdot a^{\varphi-2\pi} \cdot (a^{2\pi} - 1) \\ &= a^{-2\pi} \cdot |T_{-1} T_0| \end{aligned}$$

Iz navedenog se može naslutiti i lako dokazati da za vrijedi:

- ako je $k > 0$, onda se logaritamska spirala razmata u pozitivnoj orijentaciji, pri čemu se razmaci između njezinih susjednih zavoja povećavaju za omjer $a^{2\pi}$
- ako je $k < 0$, onda se logaritamska spirala zamata u negativnoj orijentaciji, pri čemu se razmaci između njezinih susjednih zavoja smanjuju za omjer $a^{-2\pi}$.

Navodimo još jedno karakteristično svojstvo logaritamske spirale: *U svakoj točki logaritamske spirale $T = (a^{\varphi}, \varphi)$ mjera kuta između tangente i radijalne zrake je konstantan i ovisi samo o parametru .*

Neka je q radijalna zraka kojoj odgovara amplituda φ (tj. mjera kuta kojeg polarna os p zatvara s radijalnom zrakom q). Tada točka T logaritamske spirale (6) pripada radijalnoj zraci i pišemo: $T = (a^{\varphi}, \varphi) \in q$. Postavimo u točki T tangentu t i označimo sa μ mjeru kuta koji tangenta t zatvara s radijalnom zrakom q (Slika 3).



Slika 3. *Kut između tangente i radijalne zrake*

Primjenom poznate formule $\mu = \frac{r}{r'}$, gdje je $r = a^{\varphi}$, $r' = a^{\varphi} \cdot \ln a$, dobivamo $\tan \mu = \frac{a^{\varphi}}{a^{\varphi} \cdot \ln a}$, odnosno:

$$\tan \mu = \frac{1}{\ln a}, \tag{8}$$

gdje je tan μ = *konst.*, što povlači da je i μ = *konst.* u svakoj točki logaritamske spirale. Iz navedenog proizlazi da logaritamska spirala siječe sve svoje radijalne zrake pod istim (konstantnim) kutom. Stoga je nazivamo jednakokutnom spiralom, ali i izogonalnom trajektorijom svežnja pravaca.

Specijalno, ako je $a = e$, onda iz (8) proizlazi da je μ = 1, odakle slijedi da je $\mu = \frac{\pi}{4}$. Time logaritamska spirala $r = e^{\varphi}$ siječe sve svoje radijalne zrake pod kutom od $\frac{\pi}{4}$.

3. Prirodna jednadžba logaritamske spirale

Za bilo koju krivulju izraženu polarnom jednadžbom $r = r(\varphi)$ vrijedi da je njezin položaj u polarnom sustavu jednoznačno određen njezinom jednadžbom, pa se stoga na prirodan način nameće sljedeće pitanje: *Je li moguće predočiti krivulju jednadžbom neovisnoj o polarnom (ili pravokutnom koordinatnom) sustavu, a da ona potpuno predočuje tu krivulju?*

Pokazuje se da takvo svojstvo ima *prirodna jednadžba,* koja se zapisuje u eksplicitnom obliku:

$$\chi = \chi(s) \tag{9}$$

pri čemu je zakrivljenost χ zadane krivulje izražena u obliku realne funkcije realne varijable *s*, gdje je duljina luka (prirodni parametar) te krivulje. Drugim riječima, s (9) se krivulja u svakoj svojoj točki izražava samo svojom zakrivljenošću (fleksijom) po duljini luka. Stoga, ako krivulju translatiramo, rotiramo ili simetrično preslikamo (u odnosu na centar ili os), njezina se prirodna jednadžba ne mijenja. Time proizlazi da (9) izražava sve kongruentne krivulje (i familije krivulja) koje se mogu dobiti translacijom, rotacijom ili simetrijom logaritamske spirale. Primjerice, u pravokutnom koordinatnom sustavu familija krivulja $y = \ln x + c$ za svaki $c \in \mathbb{R}$ ima istu prirodnu jednadžbu kao i krivulja $y = \ln x$ i analogno familija krivulja $y = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$ ima istu prirodnu jednadžbu kao i krivulja $y = e^x$. Nadalje, pokazuje se da familije krivulja $y = \ln x + c$ i $y = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$, imaju jednaku prirodnu jednadžbu (funkcije $f(x) = \ln x$ i $f(x) = e^x$ su međusobno inverzne funkcije čiji se grafovi dobivaju simetrijom u odnosu na pravac $y = x$). Dakle, iz prirodne jednadžbe krivulje dobivaju se vrijednosti zakrivljenosti krivulje u svakoj njezinoj točki neovisno o položaju te krivulje u sustavu u kojemu se ona zadaje. Prije nego li izvedemo prirodnu jednadžbu logaritamske spirale, u nastavku ćemo najprije objasniti pojmove duljine luka i zakrivljenosti za proizvoljnu krivulju izraženu u polarnom sustavu, a potom ćemo izvesti formule za aizračunavanje duljine luka i zakrivljenosti logaritamske spirale.

3.1. Duljina luka logaritamske spirale

Neka je krivulja C izražena (polarnom) jednadžbom $r = r(\varphi)$, gdje je $\varphi \in I \subseteq \mathbb{R}$. Duljina luka krivulje C između njezine početne (fiksne) točke $T_1 = (r(\varphi_1), \varphi_1)$ i njezine proizvoljne (varijabilne) točke $T = (r(\varphi), \varphi)$ je realna funkcija $s: I \to [0, L]$ realne varijable φ takva da je:

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \sqrt{(r(\psi))^2 + (r'(\psi))^2}\, d\psi\,, \tag{10}$$

gdje je $[0, L] \subseteq \mathbb{R}_0^+$. Uočavamo da je primitivna funkcija podintegralne funkcije realna funkcija realne varijable $\psi \in I \subseteq \mathbb{R}$, pa stoga primjenom Newton-Leibnizove formule (prema kojoj je određeni integral jednak razlici vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici integrala) slijedi da je određeni integral u (10) zapravo realna funkcija realne varijable φ, odakle direktno proizlazi da je $s = s(\varphi)$ realna funkcija realne varijable φ. Jasno, pritom smo koristili svojstvo da je vrijednost primitivne funkcije u gornjoj granici integrala (10) jednaka realnoj funkciji realne varijable φ, a u donjoj granici je jednaka konstanti.

Koristeći (10) lako se pokazuje da za logaritamsku spiralu (6) proizlazi:

$$s(\varphi) = \sqrt{1 + \ln^2 a} \int_{\varphi_1}^{\varphi} a^{\psi} d\psi = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 a}}{\ln a} \cdot a^{\psi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi}$$

odakle primjenom Newton-Leibnizove formule slijedi:

$$s(\varphi) = \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} \cdot (a^{\varphi} - a^{\varphi_1}), \tag{11}$$

gdje je $a^{\varphi_1} = konst.$ (logaritamska spirala poprima konstantnu vrijednost u njezinoj početnoj točki T_1). Obzirom na početnu pretpostavku prema kojoj se pol P polarnog sustava tretira kao početna točka logaritamske spirale (6) i činjenicu da je pol ujedno asimptotska točka logaritamske spirale, proizlazi da za dobivanje pola treba vrijediti da φ_1 teži prema $-\infty$, što zapisujemo standardnom oznakom $\varphi_1 \to -\infty$. Time se u (11) umjesto a^{φ_1} izračunava $\lim\limits_{\varphi_1 \to -\infty} a^{\varphi_1}$. Primjenom poznatog svojstva eksponencijalne funkcije za koju vrijedi da je $\lim\limits_{\varphi_1 \to -\infty} a^{\varphi_1} = 0$, a iz (11) slijedi:

$$s(\varphi) = \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} \cdot a^{\varphi} \tag{12}$$

ako je pol polarnog sustava početna točka logaritamske spirale.

Uspoređivanjem (6) i (12) lako se vidi da je duljina luka logaritamske spirale od pola do bilo koje njezine varijabilne točke $T = (a^{\varphi}, \varphi)$ proporcionalna s $a^{\varphi} = |TP|$ (udaljenosti točke $T = (a^{\varphi}, \varphi)$ od pola P), gdje je $\alpha = \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}$ koeficijent proporcionalnosti. Time (12) možemo pisati u obliku:

$$s(\varphi) = \alpha \cdot |TP|.$$

3.2. Zakrivljenost logaritamske spirale

Zakrivljenost (fleksija) krivulje C u fiksnoj točki $T \in C$ je nenegativan realan broj kojim se određuje mjera odstupanja (tj. otklon) krivulje od pravca (tangente) u točki T. U nastavku ćemo zakrivljenost označavati sa χ. Ako je krivulja C izražena (polarnom) jednadžbom $r = r(\varphi)$, $\varphi \in I \subseteq \mathbb{R}$, onda je zakrivljenost krivulje C u bilo kojoj njezinoj varijabilnoj točki zapravo realna funkcija realne varijable φ takva da je:

$$\chi(\varphi) = \frac{(r(\varphi))^2 + 2 \cdot (r'(\varphi))^2 - r(\varphi) \cdot r''(\varphi)}{[(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Koristeći (13) odredimo zakrivljenost logaritamske spirale (6) u bilo kojoj njezinoj varijabilnoj točki $T = (a^{\varphi}, \varphi)$, gdje je:
$r(\varphi) = a^{\varphi}$, $r'(\varphi) = a^{\varphi} \cdot \ln a$, $r''(\varphi) = a^{\varphi} \cdot \ln^2 a$. Pritom dobivamo:

$$\chi(\varphi) = \frac{a^{2\varphi} + 2a^{2\varphi} \cdot \ln^2 a - a^{2\varphi} \cdot \ln^2 a}{(a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \cdot \ln^2 a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{2\varphi} \cdot (1+\ln^2 a)}{a^{3\varphi} \cdot (1+\ln^2 a)^{\frac{3}{2}}}$$

odakle slijedi formula za izračunavanje zakrivljenosti logaritamske spirale:

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{a^{\varphi} \cdot \sqrt{1 + \ln^2 a}}. \tag{14}$$

Koristeći svojstvo da je $a^{\varphi} = |TP|$ i uvođenjem supstitucije $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$ dobivamo da (14) možemo zapisati u obliku:

$$\chi(\varphi) = \frac{\beta}{|TP|},$$

odakle slijedi da je zakrivljenost logaritamske spirale u bilo kojoj njezinoj točki $T = (a^{\varphi}, \varphi)$ obrnuto proporcionalna udaljenosti točke $T = (a^{\varphi}, \varphi)$ od pola P, pri čemu je β koeficijent obrnute proporcionalnosti.

S druge strane, primjenom poznatog svojstva

$$\chi(\varphi) = \frac{1}{R(\varphi)}, \tag{15}$$

(zakrivljenost $\chi(\varphi)$ je u svakoj točki krivulje obrnuto proporcionalna polumjeru $R(\varphi)$ kružnice zakrivljenosti) proizlazi da (14) možemo pisati u obliku:

$$R(\varphi) = a^{\varphi} \cdot \sqrt{1 + \ln^2 a}, \tag{16}$$

što se interpretira da je polumjer kružnice zakrivljenosti u proizvoljnoj točki logaritamske spirale proporcionalan udaljenosti te točke od pola s koeficijentom proporcionalnosti $\gamma = \sqrt{1 + \ln^2 a}$, gdje je $\gamma = \frac{1}{\beta}$.

Pritom kružnicu koja se u okolini točke T krivulje C najviše od svih kružnica priljubljuje uz krivulju C nazivamo kružnicom zakrivljenosti (oskulacijskom kružnicom) u točki T krivulje C.

3.3. Izvod prirodne jednadžbe logaritamske spirale

Općenito, ako je krivulja C izražena polarnom (eksplicitnom ili implicitnom) jednadžbom u polarnom (pravokutnom koordinatnom) sustavu za koju su poznate jednadžbe $s = s(\varphi)$ i $\chi = \chi(\varphi)$ (tj. $s = s(x)$ i $\chi = \chi(x)$ ako je krivulja zadana eksplicitnom ili implicitnom jednadžbom u pravokutnom koordinatnom sustavu), onda se eliminacijom parametra φ (tj. parametra x) iz navedenog sustava jednadžbi dobiva (9).

Dakle, za dobivanje prirodne jednadžbe logaritamske spirale potrebno je eliminirati parametar φ iz sustava sastavljenog od (12) i (14). Konkretno, promatramo li sustav jednadžbi $s = \frac{a^{\varphi} \cdot \sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}$ i $\chi = \frac{1}{a^{\varphi} \cdot \sqrt{1+\ln^2 a}}$, tada iz prve jednadžbe slijedi $a^{\varphi} \cdot \sqrt{1+\ln^2 a} = s \cdot \ln a$, što uvrštavanjem u drugu jednadžbu povlači da je prirodna jednadžba logaritamske spirale oblika:

$$\chi = \frac{1}{s \cdot \ln a}. \tag{17}$$

Iz (17) direktno proizlazi da je zakrivljenost u bilo kojoj točki T logaritam-ske spirale obrnuto proporcionalna njezinoj duljini luka od pola do točke T.

Koristeći (15), iz (17) proizlazi jednadžba:

$$R = s \cdot \ln a \tag{18}$$

koja se u nekim izvorima naziva prirodnom jednadžbom krivulje. Pritom je polumjer kružnice zakrivljenosti krivulje C izražen kao realna funkcija realne varijable s. Navedimo da se u većini izvora (pogotovo iz engleskog govornog područja) iz područja diferencijalne geometrije, sustav jednadžbi $s = s(\varphi)$, $\chi = \chi(\varphi)$ kao i sustav jednadžbi $s = s(\varphi)$, $R = R(\varphi)$ također naziva prirodnom jednadžbom krivulje, iako su to zapravo parametarske jednadžbe prirodne jednadžbe krivulje izražene polarnom jednadžbom.

4. Evoluta logaritamske spirale

Evoluta (lat. *evolvere:* odmatati) krivulje C se definira kao skup svih središta kružnica zakrivljenosti krivulje C.

Objasnimo ukratko konstrukciju evolute krivulje C. Ako u proizvoljnoj točki $T_0 = (r(\varphi_0), \varphi_0)$ krivulje C postavimo tangentu t_0 i normalu n_0, a zatim izračunamo $\chi(\varphi_0)$ (zakrivljenost u točki T_0 krivulje C), onda iz (15) proizlazi da je $R(\varphi_0) = \frac{1}{\chi(\varphi_0)}$ polumjer kružnice zakrivljenosti u točki T_0 krivulje C. Nadalje, na normali n_0 označimo s točku P_0 za koju vrijedi da je njezina udaljenost od točke T_0 jednaka $R(\varphi_0)$. Time je središte kružnice zakrivljenosti u točki T_0 krivulje C te je ujedno točka evolute krivulje C. Ponavljanjem navedenog postupka za sve točke krivulje C dobiva se evoluta krivulje C. Iz definicije evolute proizlazi da se ona iskazuje parametarskim jednadžbama, koje se u polarnom sustavu zapisuju u obliku:

$$x = r\cos\varphi - \frac{(r^2 + r'^2) \cdot (r \cdot \cos\varphi + r' \cdot \sin\varphi)}{r^2 + 2 \cdot r'^2 - r \cdot r''}$$

$$y = r\sin\varphi - \frac{(r^2 + r'^2) \cdot (r \cdot \sin\varphi - r' \cdot \cos\varphi)}{r^2 + 2 \cdot r'^2 - r \cdot r''},$$

gdje je $r = r(\varphi)$ polarna jednadžba krivulje C.

Odredimo sada parametarske jednadžbe evolute logaritamske spirale (6). Pritom iz $r = a^{\varphi},\ r' = a^{\varphi} \cdot \ln a,\ r'' = a^{\varphi} \cdot \ln^2 a$ proizlazi:

$$r^2 + 2 \cdot r'^2 - r \cdot r'' = a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \cdot \ln^2 a = r^2 + r'^2,$$

odakle slijedi da su parametarske jednadžbe evolute logaritamske spirale oblika:

$$x = -r' \cdot \sin\varphi, \quad y = r' \cdot \cos\varphi,$$

odnosno:

$$x = -a^{\varphi} \cdot \ln a \cdot \sin\varphi, \quad y = a^{\varphi} \cdot \ln a \cdot \cos\varphi. \tag{19}$$

Koristeći supstitucije $x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$ za prijelaz iz polarnog u pravokutni koordinatni sustav i primjenom poznatog trigonometrijskog identiteta $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ dobivamo $r^2 = x^2 + y^2$, gdje koristeći (19) proizlazi: $r^2 = a^{2\varphi} \cdot \ln^2 a$, odakle slijedi da je

$$r = a^{\varphi} \cdot \ln a \tag{20}$$

jednadžba evolute logaritamske spirale $r = a^{\varphi}$.

Uočimo da se (20) može pisati u obliku $r = c \cdot a^{\varphi}$, gdje je $c = \ln a$. Uzimajući u obzir prethodno objašnjeno svođenje (4) na (3), rotiranjem polarne osi, tj. logaritamske spirale $r = a^{\varphi} \cdot \ln a$ za $\varphi_1 = \log_a(\ln a)^{-1}$ dobiva se logaritamska spirala $r = a^{\varphi}$. Time smo pokazali da se evoluta logaritamske spirale dobiva iz zadane logaritamske spirale rotacijom za $\varphi_1 = \log_a(\ln a)$. Nadalje, obzirom na prethodno navedeno proizlazi da logaritamska spirala i njezina evoluta imaju jednaku prirodnu jednadžbu.

U specijalnom slučaju, ako je $a = e$, onda iz (20) direktno proizlazi da je logaritamska spirala $r = e^{\varphi}$ jednaka svojoj evoluti.

5. Zaključak

U matematičkim izvorima se uz logaritamsku spiralu pronalazi još niz drugih spirala, od kojih su najpoznatije Arhimedova, hiperbolička, Galilejeva, Fermatova i parabolička spirala. Navedene spirale pripadaju familiji algebarskih spirala, pri čemu svaka od njih ima neke osobitosti [2]. No, svakako među njima „najčudesnija“ je logaritamska spirala, čija se iznimnost, između ostalog, odlikuje i u prethodno obrazloženim svojstvima koja ćemo ukratko rezimirati. Dakle, logaritamska spirala je jedina spirala koja siječe sve svoje radijalne zrake pod konstantnim kutom. Od svih krivulja slično svojstvo ima samo kružnica, koja sve svoje radijalne zrake siječe pod pravim kutom. Nadalje, duljina luka logaritamske spirale od pola do bilo koje njezine proizvoljne točke proporcionalna je udaljenosti te točke od pola, dok je zakrivljenost logaritamske spirale u njezinoj proizvoljnoj točki obrnuto proporcionalna udaljenosti te točke od pola polarnog sustava. Također, vrijedi da je duljini luka logaritamske spirale od pola do točke T obrnuto proporcionalna zakrivljenosti logaritamske spirale u točki , ali je proporcionalna polumjeru kružnice zakrivljenosti u točki T.

Izvrsnost logaritamske spirale očituje se također i u njezinim originalnim svojstvima, koje druge krivulje nemaju, a to je da ona ne mijenja svoj oblik (zakrivljenost) pri različitim vrstama preslikavanja. Primjerice, kako je prethodno obrazloženo, evoluta logaritamske spirale je logaritamska spirala koja je kongruentna zadanoj logaritamskoj spirali (evoluta logaritamske spirale dobiva iz zadane rotacijom za fiksni kut), vidi poglavlje 4. U posebnom slučaju, logaritamska spirala $r = e^{\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ jednaka je svojoj evoluti. Mogu se navesti još neka svojstva logaritamske spirale bez dokaza [2]: nožišna krivulja logaritamske spirale, preslikavanje po sličnosti i inverzija logaritamske spirale je logaritamska spirala koja je kongruentna zadanoj logaritamskoj spirali. Nadalje, logaritamska spirala dovodi se u vezu s loksodromom (krivuljom na sferi koja siječe sve meridijane pod jednakim kutom), čija primjena omogućava najpogodnije orijentacijsko kretanje broda zbog konstantnog kuta između kursa broda i magnetne igle.

Kroz povijest, mnoštvo matematičara je izučavalo svojstva i osobitosti logaritamske spirale, od kojih je Jakob Bernoulli bio u tolikoj mjeri fasciniran tom spiralom da ju je želio ugraviranu na svom nadgrobnom spomeniku s natpisom: „Eadem mutata resurgo“ („Ustajem ponovno promijenjen“). Međutim, greškom, umjesto logaritamske, stavljena je Arhimedova spirala, koja ima svojstvo da su razmaci između njezinih susjednih zavoja konstantni. Naravno, to svojstvo ne vrijedi za logaritamsku spiralu, jer se razmaci između njezinih susjednih zavoja povećavaju (smanjuju) za konstantan omjer. Logaritamska spirala se najčešće povezuje s harmonijom oblika u prirodi i svemiru, ali i u tehnici, graditeljstvu, umjetnosti, modernoj tehnologiji. Mnogi autori logaritamsku spiralu povezuju sa zlatnom spiralom, a samim time i sa zlatnim omjerom te je u građevinarstvu dovode u vezu s proporcijama hramova, piramida, crkvi i mnoštva zgrada [5]. Međutim, nije jasno jesu li arhitekti prethodno odredili te proporcije pri planiranju izgradnje pojedine građevine ili su one naknadno „pronađene“ kako bi se istaknula njihova povezanost sa zlatnim rezom i logaritamskom spiralom.

Literatura

[1] Rabar, K. (2020.) Primjene zlatnog reza i zlatna spirala. Završni rad. Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci.

[2] Savelov, A. A. (1979.) Ravninske krivulje. Zagreb: Školska knjiga.

[3] Maor, E. (1994) The Story of a Number. Princeton: Princeton University press.

[4] https://element.hr/static/files/5-Razno/Zlatni%20rez/Zlatni%20rez/parteon/naslovna.png

[5] Zlatić, S. (2013) Zlatni rez. Tehnički glasnik, Vol. 7 No. 1 (https://hrcak.srce.hr/101182).

[6] Roje-Bonacci, T. (2005.) Potporne građevine i građevne jame. Split, Zagreb: Građevinsko-arhitektonski fakultet u Spliti, IGH.