

UDK 528.33.024.4:528.37:528.21(497.5)  
Pregledni znanstveni članak

## Usporedba između trigonometrijskog i GPS-geoidnog načina prijenosa visina (Drvenik – Sućuraj)

Miljenko SOLARIĆ – Zagreb\*

*SAŽETAK.* Prof. dr. Nikola Čubranić sa suradnicima je 1960. i 1961. godine prenio visine s kopna na srednjodalmatinske otoke. Tako je s pomoću trigonometrijskog nivelmana visoke točnosti preko mora na otok Hvar prenesena visina od repera 103/569 blizu Živogošća do repera 70/574 blizu Sućuraja. Pritom je postignuta unutarnja točnost, tj. standardno odstupanje oko 3,5 mm/km.

GPS-mjerenja izvedena su u travnju 1994. godine u blizini repera u Drveniku i na trigonometrijskoj točki blizu svjetionika na rtu Sv. Ante u Sućuraju i povezana s Opservatorijem Hvar. Tako se je moglo usporediti rezultate određivanja prijenosa ortometrijskih visina na otok Hvar klasičnim načinom i određivanja s pomoću GPS-mjerenja i programa IHRG2000 verzija 1,0 za interpolaciju geoidnih visina, koji je izradio prof. dr. T. Bašić na Geodetskom fakultetu u Zagrebu za područje Hrvatske. Dobiveno je da se to rješenje razlikuje od rješenja prof. N. Čubranića za +4,7 cm, a od klasičnog trigonometrijskog rješenja -3,5 cm.

Danas je još uvijek za prenošenje visina preko mora na relativno blize otoke trigonometrijski nivelman visoke točnosti točniji od korištenja GPS-prijamnika i visina geoida.

*Ključne riječi:* GPS-mjerenja, elipsoidne visine, geoidne visine, ortometrijske visine, precizni nivelman, trigonometrijski nivelman visoke točnosti, prijenos visina na otoke, reperi.

### 1. Uvod

Prof. dr. sc. Nikola Čubranić studiozno je pristupio prenošenju visina s kopnenog dijela Hrvatske preko mora na naše otoke Hvar, Brač, Šoltu i Veli Drvenik. Cilj je bio da se srednjodalmatinske otoke poveže u jedinstveni tada, a i danas još uvijek, službeno važeći Hrvatski državni visinski sustav vezan na mareograf u Trstu (1875) skraćeno HVST'1875.

\* Prof. dr. sc. Miljenko Solarić, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb

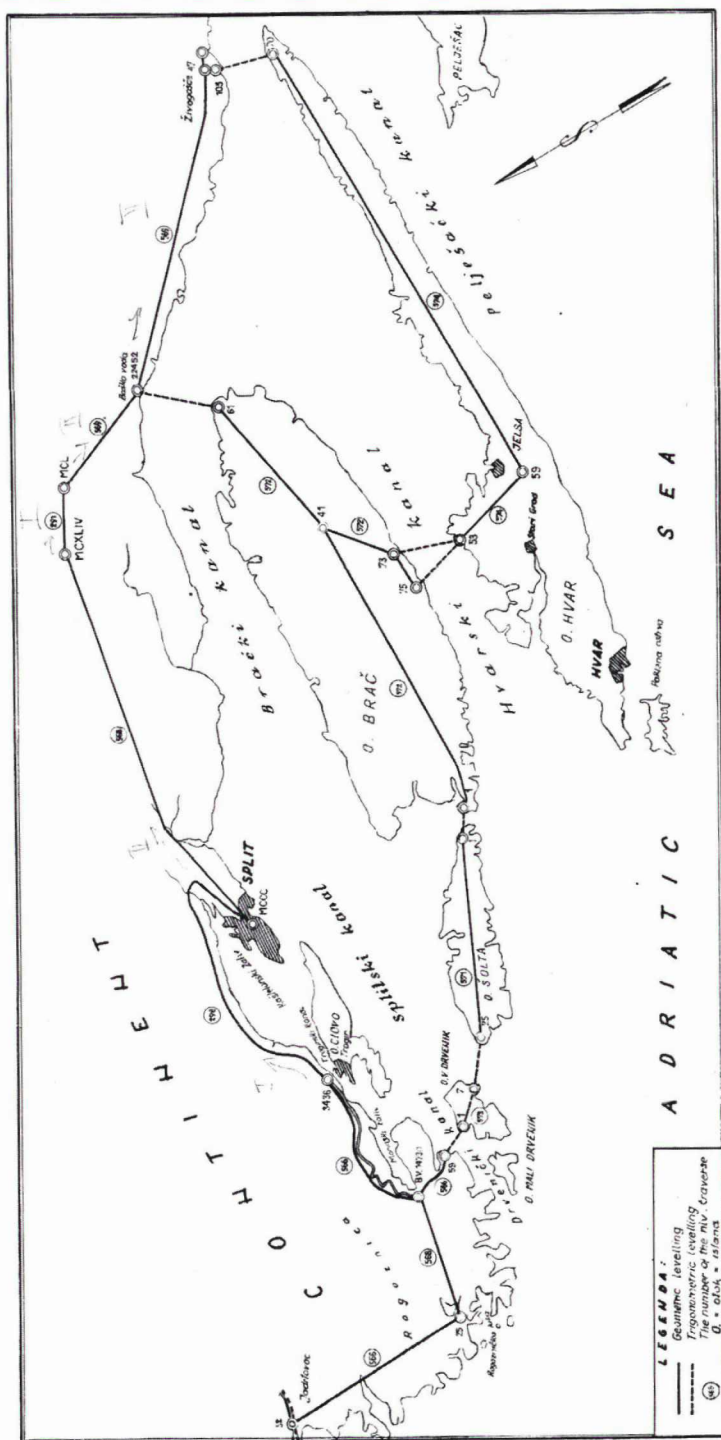
Naime, prof. N. Čubranić znao je da bi se visine najtočnije mogle prenijeti na otoke pomoću *hidrostatskog nivelmana*. Za tu su namjenu potrebne duge cijevi, koje se spuštaju s kopna po dnu mora na otok. Cijev je pritom ispunjena vodom, a na njezinom početku i kraju smješteni su posebni uređaji za očitavanje visine slobodne razine vode u njoj. Na taj su način na primjer prenesene visine u Danskoj između otoka Sjællanda i Fyna (Norelund 1945) i (Schödlbauer 1997). Postupak polaganja cijevi težak je i vrlo skup. Zbog toga se prof. N. Čubranić odlučio za trigonometrijski nivelman visoke točnosti za visinsku vezu preko mora, tj. mjerenjem visinskih ili zenitnih kutova.

Da bi ispitao koja se točnost prenošenja visinskih razlika preko mora na otoke može postići primjenom trigonometrijskog nivelmana visoke točnosti određivanja visinskih razlika, prof. Čubranić je postavio malu mrežu od 9 trigonometrijskih točaka i 2 dopunske točke na različitim visinama oko Kaštelanskog zaljeva (slika 1) (Čubranić 1956). Visine svih tih točaka određene su preciznim (geometrijskim) nivelmanom, pa su tako i visine na otoku Čiovo do postavljenih trigonometrijskih točaka prenesene preciznim nivelmanom preko malog mosta u Trogiru. U daljnjem tekstu za precizni geometrijski nivelman koristit će se izraz samo precizni nivelman. Tako su se visine određene preciznim nivelmanom mogle uzeti kao apsolutno točne i poslije usporediti s njima stvarno odstupanje visina određenih trigonometrijskim nivelmanom.



Slika 1. Skica Kaštelanskog zaljeva s ucrtanim trigonometrijskim točkama gdje su trigonometrijskim načinom određivane visinske razlike. Slika je preuzeta iz članka (Čubranić 1956).

Na točkama su istodobno i obostrano opažali s dva Wildova teodolita T3 i jednim teodolitom T2 kroz cijeli dan svakih pola sata u isto vrijeme. Na dva su pravca opažali danju i noću istodobno obostrano svakih 15 minuta. Iz opsežne analize skupljenih podataka mjerenja zenitnih kutova izveden je zaključak da se i uz nesigurnost određivanja koeficijenta refrakcije utjecaj atmosfere dá prilično dobro otkloniti uzimajući obostrana i istodobna mjerenja. Pritom treba uzeti što veći broj takvih mjerenja kroz što duži vremenski period, kombinirajući po mogućnosti dnevna i noćna mjerenja. Došlo se i do zaključka da u cilju dobivanja što točnijih rezultata treba izbjegavati vizure preblizu terena, odnosno morske površine i da praktički za tu namjenu vizure ne bi smjele biti manje od 20 m iznad površine mora.



**Legenda:**

- Precizni (geometrijski) nivelman
- Trigonometrijski nivelman visoke točnosti
- Redni broj zatvorenog nivelmanskog vlaka

Slika 2. Skica rasporeda nivelmanskih vlakova kojima su povezani otoci Hvar, Brač, Šolta i Veli Drvenik u visinski sustav Republike Hrvatske HVST'1875. Slika je preuzeta iz članka (Čubranić 1963).

U sljedećem svojem radu, objavljenom u International Hydrographic Review, prof. dr. N. Čubranić (Čubranić 1963) iznio je rezultate povezivanja srednjodalmatinskih otoka Hvara, Brača, Šolte i Velog Drvenika (slika 2) u jedinstveni visinski sustav Republike Hrvatske HVST'1875.

Budući da je taj rad tiskan samo u inozemstvu, čak prije 40 godina, bit će ukratko opisan način rada i ostvareni rezultati.

## 2. Prenosjenje visina na srednjodalmatinske otoke trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti (prije 40 godina)

Visinske razlike između repera na kopnenom dijelu Hrvatske i na otocima, odnosno između otoka (preko mora) određivane su trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti s pomoću dva Wildova teodolita T3. Na samom kopnu i na otocima visinske razlike određene su preciznim nivelmanom. Te je radove vodio prof. dr. Nikola Čubranić.

Od Geodetske uprave u Zagrebu preuzeti su originalni podaci preciznog nivelmana (aritmetičke sredine u oba smjera) koji su izvedeni između 1950. i 1959. godine i uvršteni u tablicu 1.

Tablica 1. Podaci preciznog nivelmana preuzeti od Državne geodetske uprave.

Od repera	do repera	Duljina (km)	Visinske razlike (m)	Red preciznog nivelmana
3436	MCCC	45,4	x 86,0773	I.
MCCC	MCXLIV	50,0	209,1358	II.
MCXLIV	MCL	6,6	36,8857	I.
MCL	22 452	20,8	x 807,8232	II.
22 452	47	33,9	56,8541	II.
	Σ	156,7	96,7761	

Za povezivanje otoka u zajednički državni visinski sustav trebalo je izvesti dodatni precizni nivelman II. reda na kontinentalnom dijelu i na otocima u oba smjera u 1960. i 1961. godini, a dobiveni su rezultati svrstani u tablicu 2.

Tablica 2. Podaci preciznog nivelmana II. reda izvedeni na kopnu i na otocima u 1960. i 1961. godini.

Od repera	do repera	Duljina (km)	Visinske razlike (m)
3 436	14 730	11,95	x 85,9082
14 730	59	5,97	105,0337
1/573	7/573	3,88	x 77,5754
1/571	25/571	19,31	42,3006
53/574	70/574	62,69	5,9002
1/572	41/572	34,06	321,6794
41/572	61/572	17,82	x 700,2362
41/572	73/572	12,78	x 617,0494
73/572	75/572	1,09	4,9284
103/569	47	1,00	33,8104

Posebna pozornost posvećena je trigonometrijskom nivelmanu visoke točnosti za prenošenje visina iznad mora. Pritom je korišteno iskustvo stečeno u radu (Čubranić 1953). Izabrana su mjesta na kojima su udaljenosti između kopna i otoka, odnosno između dva otoka najkraće. Također zbog utjecaja refrakcije nastojalo se postaviti vezne repere između kojih je more na približno istoj visini i da su vizure što više iznad mora. Da bi se smanjio utjecaj refrakcije na rezultate visinskih određivanja mjerili su se zenitni kutovi istoistodobno s jednog i drugog veznog repere. Mjerenja su počinjali u 16 sati, a opažalo se svakih pola sata, s pauzom od 2 do 5 sati, sve do podneva sljedećeg dana. Tako se na svakoj točki dobilo oko 30 mjerenja zenitnih kutova s pomoću kojih su izračunane visinske razlike. Viziralo se na nivelmanske letve na koje su učvršćene ploče, podijeljene na dva dijela, bijelo i crno polje, a po noći reflektor. Mjerenja su izvedena početkom ljeta 1960. i 1961. godine. Rezultati mjerenja prikazani su u tablicama 3 i 4.

Zbog kontrole, kao što se vidi na slici 2, konstruirana su tri zatvorena nivelmanska vlaka.

Tablica 3. *Rezultati visinskih određivanja trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti iznad mora između kopna i otoka i između dvaju otoka u 1960. godini.*

Od repere – do repere	Broj mjerenja u oba smjera	Duljina u km	Visinska razlika – aritmetička sredina u m	Standardno odstupanje u mm	Standardno odstupanje u mm/km
59 – 1/573	29	2,7	– 2,5836	4,2	1,6
7/573 – 25/571	22	4,6	+ 29,1369	9,0	2,0
1/571 – 1/572	31	2,3	+ 7,8619	4,1	1,7
61/572 – 22 452	24	7,0	– 42,7191	13,0	1,8
73/572 – 53/574	29	5,0	+ 39,3475	10,0	2,0
75/572 – 53/574	26	5,0	+ 34,4211	11,4	2,3
70/574 – 103/569	33	4,8	+ 18,3131	8,0	1,7
Sredina	28				1,9

Tablica 4. *Rezultati visinskih određivanja trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti iznad mora između kopna i otoka i između dvaju otoka u 1961. godini.*

Od repere – do repere	Broj mjerenja u oba smjera	Duljina u km	Visinska razlika – aritmetička sredina u m	Standardno odstupanje u mm	Standardno odstupanje u mm/km
59 – 1/573	35	2,7	– 2,6162	4,2	1,6
7/573 – 25/571	33	4,6	+ 29,1400	7,9	1,7
1/571 – 1/572	34	2,3	+ 7,8844	3,9	1,7
61/572 – 22 452	32	7,0	– 42,7305	9,5	1,4
73/572 – 53/574	35	5,0	+ 39,3009	10,5	2,1
75/572 – 53/574	31	5,0	+ 34,4554	6,6	1,5
70/574 – 103/569	35	4,8	+ 18,3190	14,2	3,0
Sredina	28				1,9

*Prvi zatvoreni nivelmanski vlak* dug je 242,5 km, a ide od Baške Vode, preko Splita, Marine, otoka Velog Drvenika, Šolte, Brača, pa sve do Baške Vode. Kad se zbroje sve visinske razlike dobije se da je:

u 1960. godini visinska razlika u I. vlaku x 999,9064 m,  
 u 1961. godini visinska razlika u I. vlaku x 999,8880 m,  
 sredina visinskih razlika u I. vlaku x 999,8973 m,

tj. da je odstupanje od nule jednako:

$$w_{1960} = -93,6 \text{ mm}, w_{1961} = -112,0 \text{ mm} \text{ i } w_{\text{sred}1960+1961} = -102,7 \text{ mm}.$$

Dozvoljeno odstupanje tog zatvorenog nivelmanskog vlaka II. reda dugog  $L = 242,5$  km može se izračunati po formuli (Čubranić 1963):

$$\Delta_{\text{Dozv.}} = 8 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{L} = 186 \text{ mm}.$$

Dakle, dobivena je zadovoljavajuća točnost zatvaranja I. zatvorenog nivelmanskog vlaka.

Rezultati zatvaranja *II. zatvorenog nivelmanskog vlaka* koji ide od Baške Vode, preko Brača do Bola na Braču, Vrboske na Hvaru, Sućuraja, Živogošća i ponovo do Baške Vode, svrstani su u tablicu 5. Pritom valja naglasiti da je u tom zatvorenom vlaku uzeta izjednačena vrijednost iz dvostrukog prijenosa visine između otoka Hvara i Brača, tj. iz izjednačenog trokuta R53-R73-75.

Dozvoljeno odstupanje u zatvaranju toga II. zatvorenog nivelmanskog vlaka II. reda dugog  $L = 145,0$  km može se izračunati iz formule:

$$\Delta_{\text{Dozv.}} = 8 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{L} = 144 \text{ mm}.$$

Tablica 5. *Zatvaranje II. zatvorenog nivelmanskog vlaka u koje je uključeno prenošenje visina na otok Hvar.*

Od repera	do repera	Duljina km	1960. god. m	1961. god. m	Sredina m	Metoda niveliranja
2452	61	7,0	42,7191	42,7305	42,7248	trig.nivel.
61	41	17,8	299,7638	299,7638	299,7638	prec.nivel.
41	73	12,8	x 617,0494	x 617,0494	x 617,0494	prec.nivel.
73	53	5,0	39,3475	39,3009	39,3452	trig.nivel.
53	70	62,7	5,9002	5,9002	5,9002	prec.nivel.
70	103	4,8	18,3131	18,3190	18,3160	trig.nivel.
103	47	1,0	33,8104	33,8104	33,8104	prec.nivel.
47	22452	33,9	x 43,1459	x 43,1459	x 43,1459	prec.nivel.
	$\Sigma$	145,0	0,0494	0,0201	0,0557	
		Razlika	w = +49,4 mm	w = +20,1 mm	w = +55,7 mm	

Dakle, odstupanje i u ovom, II. zatvorenom nivelmanskom vlaklu ulazilo je u dozvoljeno odstupanje.

III. zatvoreni nivelmanski vlak uključuje I. i II. vlak, a odgovarajuća odstupanja u tom složenom vlaklu su:

$$w = -91,9 \text{ mm i } w = -47,0 \text{ mm.}$$

Dozvoljeno odstupanje u tom složenom vlaklu preciznog nivelmana II. reda dugog  $L = 337,9$  km može se izračunati po formuli:

$$\Delta_{Dov.} = 8 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{L} = 220 \text{ mm.}$$

Dakle, u sva tri zatvorena nivelmanska vlakla odstupanje je znatno manje od dozvoljenog odstupanja za precizne nivelmanske vlakove II. reda.

Za nas je značajno da je pri prenošenju visina preko mora trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti, prema analizi iz razlika u 1960. i 1961. godini (Čubranić 1963, str. 173) postignuta vrlo visoka unutarnja točnost od 3,5 mm po dužnom kilometru. To znači da je za udaljenost od 7 km (koja je najveća u ostvarenom mjerenju trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti) odstupanje jednako:

$$3,5 \times 7 = 24,5 \text{ mm.}$$

Iz te analize može se izvesti zaključak da su točnosti pri mjerenju trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti i preciznim nivelmanom II. reda usklađene.

Dalje u svojem radu prof. Čubranić je diskutirao o postignutim točnostima dijela trigonometrijskog nivelmana visoke točnosti i dijela preciznog nivelmana, ali i o načinu postavljanja težina pri izjednačenju, odnosno raspodjeli popravaka.

### 3. O mogućnosti prijenosa visina na bliže otoke s pomoću GPS-prijamnika

S pomoću GPS-prijamnika mogu se odrediti elipsoidne visine, tj. visine iznad referentnog elipsoida WGS'84 (Bilajbegović i dr. 1991) ili (Bačić i Bačić 1999).

Međutim, naš visinski sustav dan je u sustavu ortometrijskih visina, jer su takve visine potrebne građevinarima na primjer pri hidromelioracijskim radovima. Naime, za tečenje tekućina na Zemljinoj površini presudnu ulogu imaju razlike ortometrijskih, a ne elipsoidnih visina. Zato se važeće visinske razlike ne mogu izravno odrediti s pomoću GPS-mjerenja. Da bi se GPS-mjerenja mogla uporabiti za određivanje ortometrijskih visina, potrebno je poznavanje i geoidnih visina.

Državna geodetska uprava financirala je izradbu programa IHRG2000 za interpolaciju geoida za područje Hrvatske, koji je izradio prof. dr. sc. Tomislav Bačić sa suradnicima s Geodetskog fakulteta u Zagrebu. U radu (Solarić i dr. 2002) utvrđeno je da je na trigonometrijskoj točki I. reda Brusnik geoidna visina, tj. razlika između elipsoidne visine izračunane iz velikog broja GPS-mjernih kampanja i ortometrijske visine jednaka 45,415 m. Izračunano je da ta geoidna visina Brusnika programom IHRG2000 (za interpolaciju geoidnih visina u Hrvatskoj) iznosi 45,46 m. To znači da je vjerojatno geoid na tom dijelu Hrvatske određen s točnosti oko 5 cm. Taj program IHRG2000 mogao bi se koristiti i za prenošenje ortometrijskih visina na otoke. Nai-

me, s pomoću programa IHRG2000 može se izračunati samo razlika geoidnih visina koje povezuju kopno i otok, odnosno dva otoka, gdje nije velika udaljenost između veznih repera. Razumljivo, razlika ortometrijskih visina tih veznih točaka bit će jednaka zbroju njihovih razlika elipsoidnih (GPS) visina i razlika geoidnih visina.

Odmah se mora naglasiti da se s pomoću GPS-mjerenja i programa IHRG2000 ne može, za sada, očekivati tako visoka točnost prenošenja visina preko mora koju je ostvario prof. N. Čubranić trigonometrijskim nivelmanom visoke točnosti. Kad se još točnije odredi geoid na području Hrvatske, a to će biti uskoro, moći će se s pomoću GPS-prijamnika i programa za interpolaciju geoida IHRG točnije određivati visine na otocima.

#### 4. Usporedba prijenosa visina na otok Hvar između Drvenika i Sućuraja određenih preciznim trigonometrijskim načinom i određenih s pomoću GPS-prijamnika i programa IHRG2000

U okviru kontrole transformacijskih parametara za prijelaz iz Svjetskoga koordinatnog sustava WGS'84 (u kojem rade GPS-prijamnici) u Državni koordinatni sustav (na Besselovu elipsoidu) određen je položaj trigonometrijske točke III. reda 302 na rtu Sv. Ante kraj Sućuraja na otoku Hvaru (slika 3).

Međutim, da bi se iskoristila prigoda da se po prvi put kod nas u Hrvatskoj uz što manje terenskih radova (financijskih izdataka) odredila razlika ortometrijskih visina između kopna i otoka Hvara uz pomoć GPS-mjerenja i programa za interpolaciju visina geoida IHRG2000, postavljena je GPS-točka u blizini repera 52/569 ugrađenoga na kapelicu Sv. Nikole (slika 4) na periferiji Drvenika (na kopnenom dijelu Hrvatske).

Mjerenja su izvedena s pomoću GPS-prijamnika Ashtech s C/A kodom i dvije frekvencije:

- na trigonometrijskoj točki Sućuraj od 12.00 do 15.30 sati 17. travnja 1994. godine, a
- na GPS-točki kraj repera 52/569 u Drveniku od 15.30 do 18.30 sati 15. travnja 1994. godine i od 12.00 do 15.20 sati 17. travnja.

Za čitavo vrijeme bio je uključen GPS-prijamnik na Opservatoriju Hvar, kojemu su već tada 1994. godine bile dosta dobro određene koordinate u koordinatnom sustavu WGS'84 iz međunarodnih GPS-mjernih kampanja:



Slika 3. GPS-točka (trigonometrijska točka III. reda 302) pokraj svjetionika Sućuraj.



Slika 4. Reper R 52/569 na kapelici Sv. Nikole na periferiji Drvenika.



$$\varphi_{WGS'84}^{OH'94} = 43^{\circ} 10' 38,60188'' \quad \lambda_{WGS'84}^{OH'94} = 16^{\circ} 26' 56,10372'' \quad (1)$$

i elipsoidna visina:

$$h_{WGS'84}^{OH'94} = 286,465 \text{ m.} \quad (2)$$

Ortometrijsku visinu Opservatorija Hvar odredio je prof. V. Petković trigonometrijskim nivelmanom, kao što je to uobičajeno za obične trigonometrijske točke (Solarić 2001), koja iznosi:

$$H_{WGS'84}^{OH'94} = 244,08 \text{ m.} \quad (3)$$

Tako geoidna visina Opservatorija Hvar iz ovih podataka iznosi:

$$N_{WGS'84}^{OH'94} = + 42,385 \text{ m.} \quad (4)$$

Da bi se usporedilo rezultate prenošenja visine preko mora na otok Hvar određenih preciznim trigonometrijskim nivelmanom i određenih s pomoću GPS-prijamnika i geoidnih visina trebalo se geometrijskim nivelmanom iznivelirati visinsku razliku trigonometrijske točke 302 (kraj Sućuraja) od prvog pronadenog repera 69/574 na otoku Hvaru. (Prof. Čubranić mjerio je visinsku razliku između otoka Hvara i kopnenog dijela Hrvatske iz Živogošća, tj. između repera 70/574 i 103/569. Nažalost, reper 70/574 na Hvaru je uništen.) Ta visinska razlika između trigonometrijske točke 302 i repera 69/574 izmjerena je 3 puta u listopadu 1994. godine i ona iznosi:

$$\text{I. mjerenje } \Delta H_{Tr..302-R 69/574} = + 40,1513 \text{ m,}$$

$$\text{II. mjerenje } \Delta H_{Tr..302-R 69/574} = + 40,1530 \text{ m,}$$

$$\text{III. mjerenje } \Delta H_{R 69/574-Tr..302} = - 40,1501 \text{ m,}$$

$$\text{Sredina: } \Delta H_{R 69/574-Tr.302} = - 40,1516 \text{ m,} \quad (5)$$

(Treće mjerenje visinske razlike preciznim nivelmanom učinjeno je jer je ostalo puno vremena do odlaska drugog trajekta za Drvenik.) Tako je ortometrijska visina trigonometrijske točke 302 određena *preciznim nivelmanom* jednaka:

$$H_{R 69/574} = 47,1640$$

$$\Delta H_{R 69/574-Tr.302} = - 40,1516$$

$$H_{Tr.302 \text{ prec. niv.}} = 7,0124 \quad (6)$$

U položajnom opisu trigonometrijske točke 302 piše da njezina visina određena *klasičnim trigonometrijskim načinom* (kao što su inače određene trigonometrijske točke) iznosi:

$$H_{Tr.302 \text{ trig. niv.}} = 6,93 \quad (7)$$

Dakle, razlika između visine trigonometra 302 određene preciznim nivelmanom i visine određene klasičnim trigonometrijskim načinom iznosi:

$$\Delta H_{prec-trig}^{Tr.302} = 0,082 \text{ m.}$$

Visinska razlika između repera R52/569 i GPS-točke u blizini tog repera izmjerena je također automatskim nivelirom Leica Na2000, a dobivena aritmetička sredina visinske razlike između tih dviju točaka iznosi:

$$\Delta H_{R52/569-GPS} = +10,6261 \text{ m.}$$

Tako je visina GPS-točke kraj repera R52/569 jednaka:

$$H_{R52/569} = 10,9131 \text{ m}$$

$$\Delta H_{R52/569-GPS} = +10,6261 \text{ m}$$

$$H_{GPSkodR52/569} = 21,5392 \text{ m} \quad (8)$$

GPS-mjerenja izjednačena su Ashtechovim softverom iz 1994. godine tako da je položaj točke Opservatorija Hvar fiksiran koordinatama (1) i elipsoidnom visinom (2) kako je određeno iz prethodnih GPS-međunarodnih mjernih kampanja. Dobilo se da su koordinate u koordinatnom sustavu WGS'84, elipsoidna visina i njihova standardna odstupanja jednaka:

za GPS-točku Sućuraj:

$$\varphi_{WGS'84}^{Tr.302} = 43^\circ 07' 30,16469'', \quad \lambda_{WGS'84}^{Tr.302} = 17^\circ 11' 45,49627'', \quad (9)$$

$$s(\varphi_{WGS'84}^{Tr.302}) = 7 \text{ mm}, \quad s(\lambda_{WGS'84}^{Tr.302}) = 7 \text{ mm},$$

$$h_{WGS'84}^{Tr.302} = 48,654 \text{ m}, \quad (10)$$

$$s(h_{WGS'84}^{Tr.302}) = 14 \text{ mm},$$

za GPS-točku Drvenik:

$$\varphi_{WGS'84}^{GPSkodR52/569} = 43^\circ 09' 13,36787'', \quad \lambda_{WGS'84}^{GPSkodR52/569} = 17^\circ 14' 39,89801'', \quad (11)$$

$$s(\varphi_{WGS'84}^{GPSkodR52/569}) = 7 \text{ mm}, \quad s(\lambda_{WGS'84}^{GPSkodR52/569}) = 7 \text{ mm},$$

$$h_{WGS'84}^{GPSkodR52/569} = 63,268 \text{ m}, \quad (12)$$

$$s(h_{WGS'84}^{GPSkodR52/569}) = 14 \text{ mm},$$

Međutim, valja naglasiti da je vektor između Drvenika i Sućuraja određen sa standardnim odstupanjem:

$$s(\varphi_{WGS'84}^{Tr.302-R52/569}) = 1 \text{ mm}, \quad s(\lambda_{WGS'84}^{Tr.302-R52/569}) = 1 \text{ mm}, \quad s(h_{WGS'84}^{Tr.302-R52/569}) = 3 \text{ mm}, \quad (13)$$

Sada se može izračunati i geoidna visina GPS-točake Drvenik oduzimanjem njezine ortometrijske visine (8) od izračunane elipsoidne visine (12), te će biti:

za GPS-točku Drvenik:

$$N_{WGS'84-prec.niv.}^{R52/569} = 41,729 \text{ m}, \quad (14)$$

gdje donji indeks "prec. niv." označava da se računalo s ortometrijskim visinama određenima preciznim nivelmanom.

S pomoću programa IHRG2000 u koji je ugrađen digitalni model geoida Hrvatske izračunane su geoidne visine GPS-točaka u Sućuraju i Drveniku prema koordinatama (9) i (11) u koordinatnom sustavu WGS'84:

za GPS-točku Sućuraj:

$$N_{IHRG2000}^{Tr.302} = 42,10 \text{ m}, \quad (15)$$

za GPS-točku Drvenik:

$$N_{IHRG2000}^{R52/569} = 42,14 \text{ m}. \quad (16)$$

Dakle, razlika geoidnih visina između Sućuraja i Drvenika izračunanih s pomoću programa IHRG2000 iznosi samo:

$$\Delta N_{IHRG2000}^{Tr.302-R52/569} = -0,04 \text{ m}. \quad (17)$$

Razlika između geoidnih visina za GPS-točku Drvenik izračunanu s pomoću programa IHRG2000 i GPS-mjerenja i ortometrijske visine, tj. oduzimanjem (14) od (16) dobije se da je:

$$\Delta N_{IHRG2000-(WGS'84-prec.niv.)}^{R52/569} = +0,411 \text{ m}. \quad (18)$$

Znači da su na tom dijelu Hrvatske geoidne visine izračunane prema programu IHRG2000 više za 0,411 m. Ako se sada uzme da je na toj udaljenosti Drvenik-Sućuraj (od približno samo 5067 m) isto odstupanje geoida, tj. ako se ta vrijednost oduzme od geoidne visine GPS-točke Sućuraj (15), dobije se da je popravljena geoidna visina GPS-točke Sućuraj jednaka:

$$N_{IHRG2000 \text{ korigirana}}^{Tr.302} = 41,689 \text{ m} \quad (19)$$

Pritom se pretpostavlja da je tendencija promjena geoidnih visina u geoidnom modelu HRG2000 dobra. Sada se može izračunati ortometrijska visina Sućuraja oduzimanjem te vrijednosti geoidne visine (19) od elipsoidne visine Sućuraja (10), pa će biti:

$$H_{GPS+IHRG2000 \text{ korigirana}}^{Tr.302} = 6,965 \text{ m}. \quad (20)$$

To je *ortometrijska visina Sućuraja, točnije visina trigonometrijske točke 302, kako je određena GPS-mjerenjem i s pomoću programa IHRG2000.*

Dakle, razlika između visine prenesene na repere na otok Hvar 1960. i 1961. godine (kako ih je odredio prof. dr. Nikola Čubranić) i visine određene GPS-prijamnicima i programom IHRG2000 dobit će se oduzimanjem (6) od (20), te će biti:

$$\Delta H_{\text{prec.niv.}-(\text{GPS}+\text{IHRG2000korigirana})}^{\text{Tr.302}} = -0,047 \text{ m.} \quad (21)$$

Međutim, razlika između visine određene GPS-prijamnicima i programom IHRG2000 (20) i visine trigonometrijske točke 302 u Sućuraju određene klasičnim trigonometrijskim načinom (7) bit će jednaka:

$$\Delta H_{\text{trig.niv.}-(\text{GPS}+\text{IHRG2000korigirana})}^{\text{Tr.302}} = +0,035 \text{ m.} \quad (22)$$

Iz tih dviju razlika (21) i (22) vidi se da je visina trigonometrijske točke 302, određene s pomoću GPS-prijamnika i programa IHRG2000 (20), u sredini između visine kaju je odredio prof. N. Čubranić (preciznim nivelmanom) i visine određene klasičnim trigonometrijskim načinom, kako se određuju visine običnih trigonometrijskih točaka.

Iz izloženog se vidi, da i uz to što je razlika elipsoidnih visina GPS-točke u Drveniku i GPS-točke Sućuraj određena sa standardnim odstupanjem od samo 3 mm (vidi 13), da je razlika ortometrijskih visina više od 10 puta veća zbog netočnosti u poznavanju promjena geoidnih visina.

## 5. Diskusija

Danas je Opservatoriju Hvar određen položaj i elipsoidna visina još točnije nego što je to bilo 1994. godine. To se može zahvaliti njegovu sudjelovanju u više međunarodnih geodinamičkih projekata (Solarić 2001). Tako se sada može uzeti da su točne koordinate položaja i elipsoidna visina Opservatorija Hvar u ETRF'89 datumu jednake:

$$\varphi_{\text{ETRF}'89}^{\text{OH}'2001} = 43^\circ 10' 38,601871'', \quad \lambda_{\text{ETRF}'89}^{\text{OH}'2001} = 16^\circ 26' 56,105043'', \quad (23)$$

$$h_{\text{ETRF}'89}^{\text{OH}'2001} = 286,6319 \text{ m [sa standardnim odstupanjem } s(h_{\text{ETRF}'89}^{\text{OH}'2001}) = 0,0187 \text{ m].} \quad (24)$$

Oduzimanjem ortometrijske visine Opservatorija Hvar, određene trigonometrijskim načinom (3), od njegove elipsoidne visine (24) dobije se da geoidna visina Opservatorija Hvar iznosi:

$$N_{\text{ETRF}'89}^{\text{OH}'2001} = +42,552 \text{ m.} \quad (25)$$

Programom IHRG2000 izračunano je da je geoidna visina Opservatorija Hvar jednaka:

$$N_{\text{IHRG2000}}^{\text{OH}'2001} = +42,24 \text{ m.} \quad (26)$$

Dakle, razlika između tih dviju vrijednosti geoidne visine Opservatorija Hvar (25)-(26) iznosi:

$$\Delta N_{ETRF'89}^{OH'2001} = +0,312 \text{ m}, \quad (27)$$

a razlika geoidne visine određene GPS-mjerenjima do 1994. godine (4) i geoidne visine izračunane programom IHRG2000 (26) jednaka je:

$$\Delta N_{WGS'84}^{OH'94} = +0,167 \text{ m}. \quad (28)$$

Na žalost, originalni podaci GPS-mjerenja nisu sačuvani da bi se moglo izvesti novo izjednačenje fiksiranjem položaja Opservatorija Hvar njegovim novoodređenim točnijim koordinatama (23) i (24).

Međutim, u našem slučaju, kako je udaljenost između Drvenika i Sućuraja samo oko 5 km, a Opservatorij Hvar je od njih udaljen oko 70 km, to fiksiranje položaja Opservatorija Hvar točnijim koordinatama (23) i (24) ne bi smjelo bitno djelovati na konačni rezultat.

Elipsoidna visina Opservatorija Hvar određena je iz više međunarodnih GPS-kampanja mjerenja, i to sa standardnim odstupanjem od 1,86 cm, kao što se vidi iz (24), a geoidne su visine u geoidnom modelu HRG2000 izuzetno kvalitetno određene (Bašić 2000) "čija unutarnja točnost kojega cm na skoro cijelom teritoriju, te malo lošija na otvorenom moru". Na slici 9 detaljnog modela geoida Republike Hrvatske na stranici 176 iz rada (Bašić 2002) vidi se da, na svu sreću, nije na prijelazu preko mora između Drvenika i Sućuraja velika razlika geoidnih visina. Zato je određivanje geoidnih visina programom IHRG2000 moglo zadovoljiti u promatranom slučaju.

Za još studiozniji pristup istraživanju prijenosa visina preko mora sigurno je trebalo izmjeriti i otklone vertikalna na točkama odakle je preciznim trigonometrijskim načinom povezan otok Hvar s kopnom. Naime, u doba kad je prof. Čubranić izvodio mjerenja nije praktički bilo moguće lagano izmjeriti otklone vertikalna. Zato se taj dio ostavlja kao prostor za izradu opsežne studije – doktorske disertacije.

Tek poslije izrade takve studije moći će se pristupiti i prijenosu visina preko mora s kopna i na ostale otoke, kao i između otoka.

Naime, rješavanje tog problema prijenosa visina i na ostale naše otoke je vrlo značajno za izradu znanstvenog projekta u kojem bi geodeti dali numeričko dokumentirani prilog geoznanostima o spuštanju, odnosno uzdizanju jadranske obale. U tu svrhu bilo bi značajno povezati naše otoke, pa i one nenastanjene, u zatvorene nivelmanske vlakove, kao što je to učinio prof. Čubranić za srednjodalmatinske otoke. Osim toga dao bi se istovremeno prilog i točnijem određivanju geoida na našem otvorenom moru.

## 5. Zaključak

Može se zaključiti da su naši stariji kolege geodeti svojim instrumentima i postupcima te sustavnošću i pendantnošću u radu ostvarivali maksimalne moguće točnosti. Naime, dobro znamo da ostvariti točnost trigonometrijskog nivelmana od samo 3,5 mm po kilometru zbog utjecaja refrakcije atmosfere gotovo nije praktički moguće.

Kontrola prenošenja visina s kopna preko mora na otok Hvar s pomoću GPS-prijamnika i uz korištenje programa IHRG2000 za interpolaciju geoidnih visina dalo je dosta zadovoljavajući rezultat, tj. u okviru očekivanja. Naime, bilo je odmah na početku jasno da s GPS-prijamnicima i uz pomoć programa IHRG2000 nije bilo moguće postići točnost koju je ostvario prof. N. Čubranić.

Međutim, valja naglasiti da se geoidne visine izračunane programom IHRG2000 moraju korigirati računanjem korekcije. Ona se može izračunati kao razlika između geoidne visine određene programom IHRG2000 od izračunane geoidne visine oduzimanjem ortometrijske visine GPS-točke u blizini repera od njezine elipsoidne visine. Ta korekcija se zatim mora prenijeti i na GPS-točku na otoku uz pretpostavku da je isti iznos korekcije i na točki na otoku, tj. da je tendencija promjene geoidnih visina u geoidnom modelu HRG2000 dobra.

Svakako da bi bilo poželjno izvesti GPS-mjerenja na više repera u bližoj okolici, gdje se prenosi visina na otoke, jer će se na taj način kontrolirati i razlike u geoidnim visinama izračunane programom IHRG2000, tj. da su dobre i promjene geoidnih visina u tom području.

Sigurno je da bi se prenošenje visina preko mora na otoke moglo točnije ostvariti hidrostatskim nivelmanom, nego trigonometrijskim načinom s pomoću klasičnih geodetskih teodolita. Međutim, danas ima i skupocjenih instrumenata koji koriste dvije valne duljine, takozvanih disperzometara. Oni bi mogli pomoći u povećanju točnosti prenošenja visina trigonometrijskim načinom na otoke preko mora, ali u tom slučaju bi trebalo izmjeriti i otklone vertikalna na mjestima prijenosa visina.

*ZAHVALNOST. Najljepše zahvaljujem recenzentima prof. dr. sc. A. Bilajbegoviću i prof. dr. sc. T. Bašiću na korisnim savjetima za poboljšavanje kvalitete rada.*

## Literatura

- Bačić, Ž., Bašić, T. (1999): Satelitska geodezija II. Geodetski fakultet u Zagrebu.
- Bašić, T. (2000): Detaljni model geoida Republike Hrvatske HRG2000. Izvješća o znanstveno-stručnim projektima iz 2000. godine, 11–22.
- Bašić, T. (2002): Istraživanje Zemljinog polja sile teže na Geodetskom fakultetu. Zbornik Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu povodom 40. obljetnice samostalnog djelovanja 1962–2002, 169–179.
- Bilajbegović, A., Hofman-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. (1991): Osnovni geodetski radovi – suvremene metode GPS. Tehnička knjiga, Zagreb.
- Čubranić, N. (1956): Točnost visinskog povezivanja otoka pomoću trigonometrijskog nivelmana. Geodetski list 3–4 i 5–6, 75–89 i 125–135.
- Čubranić, N. (1963): Connection of Elevations the Middle Dalmatian Islands with Elevations of the Continent. International Hydrographic Review, Vol. XL, No 2, July, 165–177.
- Norelund, N. E. (1945): Hydrostatic Nivellement over Store Bælt (Veliki Belt). Geoædisk Instituts Skrifter 3, Række Bind VI, Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S, København.

- Solarić, M., Solarić, N. (2000): Pregled geodetskih određivanja položaja i ostvarenih znanstvenih rezultata na Opservatoriju Hvar. Geodetski list 3, 167-179.
- Solarić, M., Solarić, N. (2001): Analiza ostvarenih znanstvenih rezultata geodetskih određivanja Opservatorija Hvar. Geodetski list 2, 79-104.
- Solarić, M., Marjanović, M., Rašić, Lj. (2003): Trigonometrijska točka I. reda Brusnik položajno najtočnije određena trigonometrijska točka u Hrvatskoj. Geodetski list 2, 91-102.
- Schödlbauer, A. (1997): The Impact of the Global Positioning System on the Tunnel Surveying. Proceedings FIG Symposium Surveying of Large Bridge and Tunnel Project, Copenhagen, June 2-5, 123-137.

## Comparison between trigonometric levelling and GPS-geoids methods transfer of heights (Drvenik – Sućuraj)

*ABSTRACT. Prof. N. Čubranić and his collaborates transfered heights from the continental part of Croatia on the Middle Dalmatian Islands in 1960 and 1961 years. So is transfered height over the sea on the island Hvar by the precise trigonometric levelling of the very high accuracy from the bench mark 103/569 near the Živo-gošće until the bench mark 70/574 near the Sućuraj. He reach inside accuracy of 3,5 mm/km.*

*GPS-measurements near the bench mark in Drvenik and on the trigonometric point near beacon on the cape St. Ante in Sućuraj were connected with the Observatory Hvar in April 1994 year. So is derived control of transfer orthometric heights on the island Hvar by GPS-measurements and the program IHRG2000 for interpolation geoidal heights, which made Prof. T. Bašić on the Faculty of Geodesy in Zagreb. This solution by GPS-measurements and the program IHRG2000 is different from this solution with precise trigonometric levelling Prof. Čubranić's for +4.5 cm and from classical trigonometric method -3.5 cm.*

*Today transfer of heights over sea on the islands by trigonometric levelling with high accuracy is yet more accurate than by GPS-measurements and geoidal heights.*

*Keywords: GPS-measurements, ellipsoidal heights, geoidal heights, orthometric heights, precise levelling, trigonometric levelling, bench marks.*

*Prihvaćeno: 2003-10-07*