

UDK 528.232.2:514.7  
Stručni članak

# Računanje parametara nivo-elipsoida

Željko HEĆIMOVIĆ – Zagreb\*

*SAŽETAK.* Nivo-elipsoid osnovno je matematičko fizikalno tijelo koje se primjenjuje u geodeziji. Zadaje se s pomoću četiriju osnovnih parametara. Osim njih potrebno je poznavati i matematičke i fizikalne parametre koji se iz njih izvode. Obradeno je izračunavanje izvedenih parametara nivo-elipsoida na temelju četiriju osnovnih parametara. Dani su primjeri za GRS80 i WGS84 nivo-elipsoide te za Besselov elipsoid.

*Ključne riječi:* nivo-elipsoid, osnovni parametri nivo-elipsoida, velika poluos, spljoštenost elipsoida, dinamički faktor oblika, gravitacijska geocentrična konstanta, kutna brzina rotacije.

## 1. Uvod

Prema Stokesovu teoremu polje ubrzanja sile teže u vanjskom području nekog tijela jedinstveno je definirano ako je poznata rubna ploha tijela, njihova kutna brzina rotacije i masa.

Osnovno matematičko fizikalno tijelo u geodeziji je nivo-elipsoid, koji je definiran geometrijski i fizikalno. Rubna ploha nivo-elipsoida je rotacijski elipsoid. On je dvo-parametarska matematička ploha te su za njegovo definiranje dovoljna dva parametra. To su najčešće velika poluos  $a$  i spljoštenost elipsoida  $f$ . Umjesto spljoštenosti upotrebljava se i dinamički faktor oblika  $J_2$ . Fizikalna svojstva nivo-elipsoida zadaju se također s pomoću dvaju parametara. To su najčešće geocentrična gravitacijska konstanta  $GM$  i kutna brzina rotacije nivo-elipsoida (Zemlje)  $\omega$ . Četiri osnovna parametra dovoljna su za definiranje nivo-elipsoida kao geometrijskog i fizikalnog tijela te da definiraju polje ubrzanja sile teže u njegovu vanjskom području. Na temelju njih mogu se izračunati svi relevantni parametri nivo-elipsoida. Na XVII. generalnom skupu International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) u Canberri odlučeno je da se za četiri osnovna parametra koriste: ekvatorski radijus  $a$ , geocentrična gravitacijska konstanta  $GM$ , dinamički faktor oblika  $J_2$  i kutna

\*Dr. sc. Željko Hećimović, Hrvatski geodetski institut, Savska c. 41/XVI, pp 19, 10000 Zagreb, e-mail: zeljko.hecimovic@hgi.hinet.hr

brzina rotacije Zemlje  $\omega$ . Tada je definiran model nivo-elipsoida Geodetic Reference System 1980 (GRS80). U potonjim je modelima dinamički faktor oblika  $J_2$  redovito zamijenjen spljoštenošću elipsoida  $f$ .

U Hrvatskoj je službeno u upotrebi Besselov elipsoid, koji je prilagođen za lokalno područje. On se zadaje geometrijskim parametrima, a fizikalni parametri nisu definirani pa on nije nivo-elipsoid već samo rotacijski elipsoid koji se upotrebljava kao geometrijska ploha.

## 2. Pregled korištenih formula

Izrazi za računanje parametara nivo-elipsoida mogu se naći u Heiskanen i Moritz (1967) i Moritz (1984). Razlikujemo dva slučaja s obzirom je li među zadanim parametrima dinamički faktor oblika  $J_2$ , ili spljoštenost elipsoida  $f$ :

U slučaju kada je zadana spljoštenost elipsoida  $f$ , mala poluos elipsoida se izračuna s pomoću izraza

$$b = a - a \cdot f, \quad (1)$$

a dinamički faktor oblika dobivamo pomoću izraza

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left( 1 - \frac{2}{15} \frac{me'}{q_0} \right). \quad (2)$$

U drugom slučaju kada je zadan dinamički faktor oblika  $J_2$ , iterativnim postupkom izračunamo malu poluos elipsoida  $b$ . Da bi ju mogli izračunati prvo računamo pomoćnu veličinu

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (3)$$

Kako je mala poluos elipsoida  $b$  na početku računanja u izrazu (3) nepoznata, za početnu vrijednost možemo uzeti bilo koju vrijednost te iterativno provesti računanje. Nadalje, u iterativnom postupku računamo kvadrat drugog ekscentriciteta elipsoida

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (4)$$

a zatim i pomoćnu veličinu

$$2q_0 = \left( 1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{e'}. \quad (5)$$

Prvi ekscentricitet elipsoida dobijemo s pomoću

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (6)$$

a njega možemo povezati s osnovnim parametrima  $a$ ,  $GM$ ,  $J_2$  i  $\omega$  u jednadžbi, koja ima oblik

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^2}{GM} \frac{e^3}{2q_0}. \quad (7)$$

Vrijednost male poluosi elipsoida dobit ćemo s pomoću

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (8)$$

Tu veličinu uvodimo u izraz (3) i ponavljamo iterativni postupak dok razlika zadnje dvije vrijednosti male poluosi elipsoida ne bude zanemariva.

Linearni ekscentricitet elipsoida računamo pomoću izraza

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (9)$$

a polarni radijus zakrivljenosti

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad (10)$$

Za računanje duljine luka meridijana od ekvatora do pola koristimo izraz

$$Q = c \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 \right). \quad (11)$$

Od geometrijskih parametara računani su i sljedeći radijusi:

a) radijus dobiven na osnovi aritmetičke sredine

$$R_1 = \frac{a + a + b}{3} = a \left( 1 - \frac{f}{3} \right), \quad (12)$$

b) radijus zakrivljenosti sfere iste površine kao elipsoid

$$R_2 = c \left( 1 - \frac{2}{3} e'^2 + \frac{26}{45} e'^4 - \frac{100}{189} e'^6 + \frac{7034}{14175} e'^8 \right), \quad (13)$$

c) radijus sfere istog volumena kao elipsoid

$$R_3 = \sqrt[3]{a^2 b}. \quad (14)$$

Fizikalne parametre počinjemo računati vrijednošću normalnog potencijala na plohi nivo-elipsoida s pomoću izraza

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (15)$$

Zatim računamo pomoćne veličine koje ćemo upotrebljavati pri računanju normalnih vrijednosti ubrzanja sile teže:

$$q'_0 = 3 \left( 1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1 \quad (16)$$

i

$$m' = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (17)$$

Normalnu vrijednost ubrzanja sile teže na ekvatoru dobivamo s pomoću

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m' - \frac{m' e' q'_0}{6} \right), \quad (18)$$

a normalnu vrijednost ubrzanja sile teže na polu na temelju izraza

$$\gamma_P = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m' e' q'_0}{3} \right). \quad (19)$$

Globalnu normalnu spljoštenost ubrzanja sile teže dobijemo prema

$$f^* = \frac{\gamma_P - \gamma_e}{\gamma_e}. \quad (20)$$

Normalna vrijednost ubrzanja sile teže za bilo koju točku na plohi nivo-elipsoida može se izračunati po dobro poznatoj Somiglijanovoj formuli, vidi npr. Torge (1989), a pomoćna veličina za računanje je

$$k = \frac{b \gamma_P}{a \gamma_e} - 1. \quad (21)$$

Sferni harmonijski koeficijenti dobiju se prema izrazu

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left( 1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2} \right). \quad (22)$$



### 3. Program PARAMET

Da bi se problem numeričke obradbe sveo na korisnički nivo, navedena su računanja obrađena u programu PARAMET. Program omogućuje četiri mogućnosti zadanja početnih parametara:

- 1 – a,  $J_2$ , GM,  $\omega$  (GRS80)
- 2 – a, f, GM,  $\omega$  (WGS84)
- 3 – a,  $J_2$ , GM,  $\omega$  (ulazni parametri)
- 4 – a, f, GM,  $\omega$  (ulazni parametri)

Prilikom odabira prvog izbora računaju se geometrijski i fizikalni parametri za GRS80 nivo-elipsoid, a pri drugom odabiru vrijednosti za World Geodetic System 1984 (WGS84). Treći izbor omogućuje korisniku unošenje četiriju osnovnih parametara a,  $J_2$ , GM i  $\omega$  nivo-elipsoida, a četvrti izbor omogućuje unos četiriju osnovnih parametara a, f, GM i  $\omega$ .

### 4. Rezultati računanja programom

U tablici 1 dani su izračunani parametri za GRS80 i WGS84 nivo-elipsoide te za Besselov elipsoid. Za Besselov elipsoid nisu određeni fizikalni parametri te su pri računanju korišteni, osim dvaju geometrijskih parametara za Besselov elipsoid (a, f), fizikalni parametri (GM,  $\omega$ ) za WGS84 nivo-elipsoid.

Tablica 1. Izračunani parametri nivo-elipsoida.

	GRS80	WGS84	Bessel
Četiri osnovna parametra			
a [m]	6378137,0	6378137,0	6377397,155
GM [m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> ]	0,3986005E+15	0,3986004418E+15	0,3986004418E+15
$\omega$ [rad/s]	0,7292115E-04	0,7292115E-04	0,7292115E-04
1/f	-	298,257223563	299,152812850
$J_2$	0,00108263	-	-
Izračunani geometrijski parametri			
f	0,0033528106812	0,0033528106647	0,0033427731816
1/f	298,25722210	-	-
b [m]	6356752,3141	6356752,3142	6356078,9628
E [m]	521854,0097	521854,0084	521013,1390
c [m]	6399593,6259	6399593,6258	6398786,8481
$e^2$	0,006694380023	0,006694379990	0,006674372231
e	0,081819191042	0,081819190843	0,081696831216
$e'^2$	0,006739496775	0,006739496742	0,006719218798
e'	0,082094438152	0,082094437950	0,081970841145
$J_2$	-	0,00108262982126	0,00107634545902
Q [m]	10001965,7293	10001965,7294	10000855,7645

$R_1$ [m]	6371008,7714	6371008,7714	6370291,0909
$R_2$ [m]	6371007,1809	6371007,1810	6370289,5102
$R_3$ [m]	6371000,7900	6371000,7900	6370283,1582
Izračunani fizikalni parametri			
$U_0$ [m <sup>2</sup> /s]	62636860,8500	62636851,7146	62643883,4720
$m'$	0,00344978600308	0,00344978650684	0,00344862088261
$\gamma_e$ [m/s <sup>2</sup> ]	9,7803267715	9,7803253359	9,7825135428
$\gamma_p$ [m/s <sup>2</sup> ]	9,8321863685	9,8321849379	9,8344545940
$f^*$	0,005302440112	0,005302441399	0,005309581323
$k$	0,001931851353	0,001931852653	0,001949059415
$J_4$	-0,00000237091222	-0,00000237091120	-0,00000233931924
$J_6$	0,00000000608347	0,00000000608346	0,00000000593208
$J_8$	-0,0000000001427	-0,0000000001427	-0,0000000001355

## 5. Zaključak

Nivo-elipsoid osnovno je matematičko fizikalno tijelo u geodeziji pa je potrebno poznavati njegove parametre. Nivo-elipsoid zadaje se s pomoću četiriju osnovnih parametara na osnovi kojih se izvode preostali matematički i fizikalni parametri.

## Literatura

- Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1967): Physical geodesy. W. H. Freeman, San Francisco.  
 Moritz, H. (1984): Geodetic Reference System 1980. U: C. C. Tscherning (ed.): The geodesist's handbook 1984, Bull. Geod, 58, 388-398.  
 Torge, W. (1989): Gravimetry. Walter de Gruyter.

# Computing of level ellipsoid parameters

*ABSTRACT. Level ellipsoid is a fundamental mathematical and physical body that is used in geodesy. It is determined with four fundamental parameters. Using them other mathematical and physical parameters are computed. Examples calculations for GRS80 and WGS84 level ellipsoids and Bessel ellipsoid are made.*

*Key words: level ellipsoid, fundamental parameters, major semi axis, ellipsoid flattening, dynamical form factor, geocentric gravitational constant, speed of rotation.*

*Primljeno: 2002-3-13*