UDK 514.112.4:519.6:528.235:528.9
Izvorni znanstveni članak

Točka u poligonu

Miljenko LAPAINE, Nedjeljko FRANČULA - Zagreb*

SAŽETAK. Problem automatiziranog odlučivanja o položaju točke s obzirom na zadani jednostavni poligon pripada području računalne geometrije, a ima primjenu u raznim područjima, među ostalim i u geodeziji i kartografiji. U radu se daje detaljan opis novog i jednostavnog algoritma za rješavanje toga problema.

Ključne riječi: točka u poligonu, računalna geometrija, Jordanov teorem.

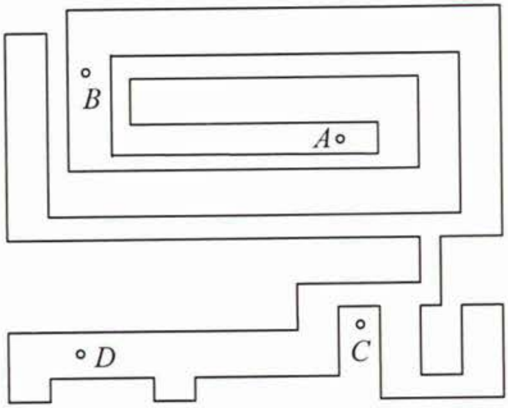
1. Uvod

Problem automatiziranog donošenja odluke o tome pripada li neka točka području omeđenom zadanim poligonom nije nov. S problemom je li točka unutar poligona ili izvan njega susreli smo se u Zavodu za kartografiju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu prije trideset godina, kada smo izrađivali prve računalne programe u FORTRAN-u za crtanje mreže meridijana, paralela i kontura kontinenata u različitim kartografskim projekcijama. Pri crtanju unutar zadanoga pravokutnog ili kružnog okvira za svaku je točku trebalo utvrditi nalazi li se unutar okvira ili izvan njega. Ako su dvije susjedne točke bile unutar okvira, spajale su se, a ako je jedna točka bila unutar okvira a druga izvan, računao se presjek s okvirom i crtalo do tog presjeka. Rješenje problema pronašli smo u literaturi, a predlagano je u doba prvih uvođenja automatske obrade podataka u katastru (Hanstein, Block 1971). Pregled najnovijih rezultata na tom području može se naći u knjizi *Computational Geometry* (de Berg i dr. 2000).

U ovome radu daje se detaljan opis vlastitog jednostavnog algoritma za rješavanje toga problema. Podsjetimo se najprije nekih matematičkih definicija i činjenica.

Poligon (mnogokut, višekut) u euklidskoj ravnini definira se konačnim skupom segmenata ili *stranica* tako da je svaki kraj segmenta zajednički za točno dvije stranice, a ni jedan od podskupova nema to svojstvo. Krajevi segmenata nazivaju se *vrhovima* poligona. Brojevi vrhova i stranica međusobno su jednaki. Poligon s n vrhova naziva se n-terokutom.

*Prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, član suradnik Akademije tehničkih znanosti Hrvatske, prof. dr. sc. Nedjeljko Frančula, redoviti član Akademije tehničkih znanosti Hrvatske, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mlapaine@geof.hr, nfrancul@public.srce.hr.



Slika 1. *Labirint. Nije na prvi pogled jasno leže li točke A, B, C i D u unutrašnjosti labirinta.*

Poligon je jednostavan ako ne postoji par nesusjednih stranica koje bi imale zajedničku točku. Jednostavni se poligon naziva i poligonalnom kružnicom, a dijeli ravninu na dva disjunktna dijela, unutrašnjost (koja je omeđena) i vanjštinu (koja je neomeđena), koje odvaja sam poligon (Jordanov teorem, prema Camilleu Jordanu 1838-1922, francuskom matematičaru). U običnom govoru pod poligonom se obično misli na uniju ruba, kao zatvorene izlomljene linije, i unutrašnjosti, područja u ravnini omeđenoga tom izlomljenom linijom.

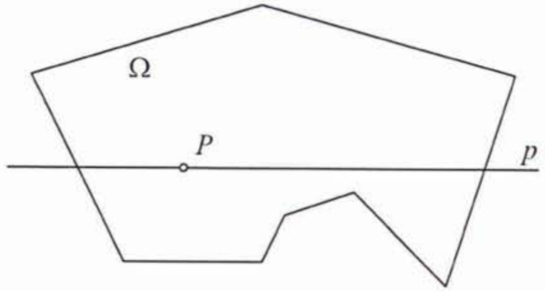
Definiraju se i posebni tipovi poligona, kao što su primjerice pravilni, konveksni ili zvjezdasti poligoni, no takvima se u ovome radu nećemo posebno baviti.

Problemi položaja točke (point-location problems) mogu se preimenovati i u probleme sadržavanja točke (point-inclusion problems). Naime, "točka P leži u području Ω" znači isto što i "točka P je sadržana u području Ω". Naravno, teškoća zadatka bitno ovisi o prirodi prostora i njegovoj podjeli na dijelove.

Najjednostavniji je problem jednostavnog poligona u ravnini jer on prema Jordanovu teoremu dijeli ravninu na dva dijela (Preparata, Shamos 1985; Pavković, Veljan 1992). Prividna "očitost" Jordanova teorema leži u tome da obično imamo u vidu sasvim "jednostavne figure" poput trokuta ili šesterokuta itd. Međutim, za jednostavni poligon kao na slici 1 nije sasvim očito da rastavlja ravninu na dva područja. Isto tako nije sasvim evidentno gdje leže točke A, B, C, D: u unutrašnjosti ili vanjštini?

Da bismo odgovorili na pitanje pripada li točka P unutrašnjosti jednostavnog poligona Ω s n vrhova, promotrimo horizontalni pravac p koji prolazi točkom P (slika 2). Ovdje je značenje riječi *horizontalan* potrebno samo u tom smislu da se za bilo koje dvije točke može reći koja od njih je viša, odnosno niža.

Prema Jordanovu teoremu, unutrašnjost i vanjština od Ω dobro su definirane. Ako pravac p ne siječe rub od Ω, tada je točka P vanjska. Dakle, pretpostavimo da pravac p siječe rub od Ω i promotrimo najprije slučaj kad p ne prolazi ni jednim vrhom od Ω. Neka je L broj presjeka pravca p s rubom od Ω i s lijeve strane od P. Budući da je Ω omeđen, lijevi kraj pravca p leži u vanjštini od Ω. Promotrimo pomicanje udesno uzduž p od $-\infty$ prema P. Pri krajnjem lijevom presjeku s rubom od Ω ulazimo u



Slika 2. *Rješavanje problema o točki P i poligonu Ω s pomoću "jednog metka (single-shot)". Budući da je samo jedan presjek pravca p s rubom poligona s desne (lijeve) strane od P, točka P je unutar poligona.*

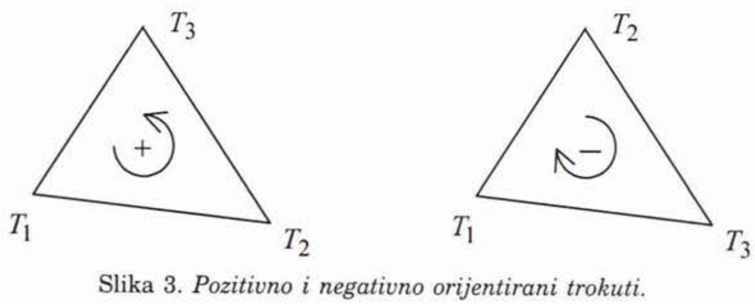
unutrašnjost; na sljedećem presjecištu izlazimo ponovno van, itd. Dakle, P je unutrašnja ako i samo ako je L neparan. Promotrimo sada degenerirani slučaj, kada pravac p prolazi vrhovima od Ω. Infinitezimalna rotacija pravca p u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu oko P neće promijeniti klasifikaciju točke P (unutrašnja/vanjska), ali će ukloniti degeneraciju. Dakle, ako zamislimo da je izvedena takva infinitezimalna rotacija, uočavamo: ako oba vrha neke stranice pripadaju pravcu p, ta se stranica može ignorirati; ako samo jedan vrh neke stranice pripada pravcu p, onda se on mora brojiti ako je to niži vrh u odnosu na horizontalni pravac p, a inače ignorirati.

Ostaje otvoreno pitanje kako ustanoviti siječe li pravac p rub od Ω, a bez nalaženja samog presjeka. Pogledajmo najprije kako je to kod trokuta.

2. Orijentacija trokuta

Neka su T_1, T_2 i T_3 vrhovi trokuta. Reći ćemo da je trokut $T_1T_2T_3$ pozitivno orijentiran ako je obilazeći njegov rub od vrha T_1 preko T_2 i preko T_3 i ponovno do T_1 u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu trokut uvijek s lijeve strane. To isto možemo reći i na drugi način, tj. ako stojimo u vrhu T_1 i gledamo prema T_2, onda je T_3 s lijeve strane pravca T_1T_2. Ako stojimo u vrhu T_2 i gledamo prema T_3, onda je T_1 s lijeve strane pravca T_2T_3, itd.

Trokut je negativno orijentiran ako nije pozitivno orijentiran.



Slika 3. *Pozitivno i negativno orijentirani trokuti.*

3. Definicija i svojstva preslikavanja *F*

Neka je S skup svih nekolinearnih uređenih trojki točaka neke ravnine, a R skup svih realnih brojeva. Definirajmo preslikavanje F : S → R na sljedeći način:

$$F(T_1, T_2, T_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

gdje su (x_i, y_i) pravokutne koordinate točaka T_i, $i = 1, 2, 3$.

Preslikavanje F ima sljedeća svojstva:

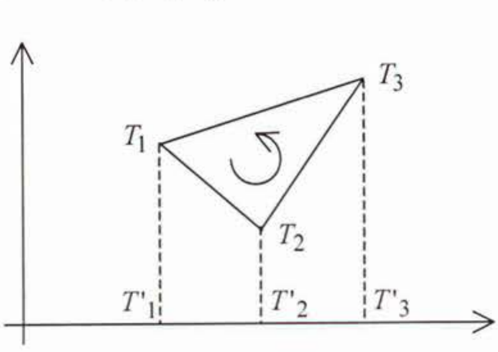
1. $F(T_1, T_2, T_3) = F(T_2, T_3, T_1) = F(T_3, T_1, T_2)$
2. $F(T_1, T_3, T_2) = F(T_3, T_2, T_1) = F(T_2, T_1, T_3)$
3. $F(T_1, T_2, T_3) = -F(T_1, T_3, T_2)$
4. $F(T_1, T_2, T_3) > 0$ ako je trokut $T_1T_2T_3$ pozitivno orijentiran
5. $F(T_1, T_2, T_3) < 0$ ako je trokut $T_1T_2T_3$ negativno orijentiran
6. Ako je $F(T_1, T_2, T_3) > 0$ onda je $F(T_1, T_2, T_3)$ dvostruka površina trokuta $T_1T_2T_3$
7. Ako je $F(T_1, T_2, T_3) < 0$ onda je $-F(T_1, T_2, T_3)$ dvostruka površina trokuta $T_1T_2T_3$.

Svojstva 1–3 mogu se dokazati na temelju činjenice da zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak.

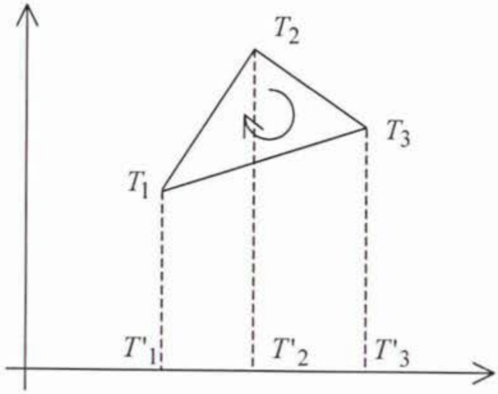
Svojstva 4–7 mogu se dokazati na sljedeći način. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $x_1 \neq x_3$. Postoje dvije mogućnosti za orijentaciju trokuta $T_1T_2T_3$.

Ako je orijentacija pozitivna, tada prema slici 4 možemo zaključiti da se površina trokuta $T_1T_2T_3$ može dobiti ako se od površine trapeza $T_1T'_1T'_3T_3$ oduzmu površine trapeza $T_1T'_1T'_2T_2$ i $T_2T'_2T'_3T_3$. Nakon sređivanja dobije se površina jednaka $F(T_1, T_2, T_3) > 0$.

Ako je orijentacija trokuta $T_1T_2T_3$ negativna, tada prema slici 5 možemo zaključiti da se površina trokuta $T_1T_2T_3$ može dobiti ako se od zbroja površina trapeza $T_1T'_1T'_2T_2$ i $T_2T'_2T'_3T_3$ oduzme površina trapeza $T_1T'_1T'_3T_3$. Nakon sređivanja dobije se površina jednaka $-F(T_1, T_2, T_3) > 0$.



Slika 4. *Površina pozitivno orijentiranog trokuta.*



Slika 5. *Površina negativno orijentiranog trokuta.*

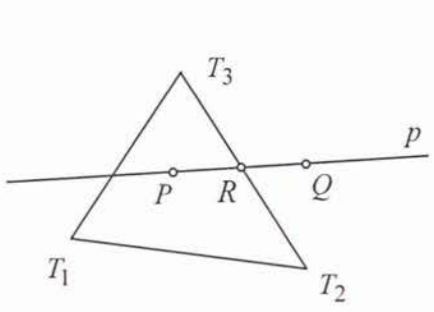
Uočimo još da se područje definicije funkcije F može proširiti i na kolinearne trojke točaka. Lako se vidi da su točke T_1, T_2, T_3 kolinearne, ako i samo ako je $F(T_1, T_2, T_3) = 0$.

4. Točka na rubu trokuta

Prema definiciji poligona navedenoj u uvodu, trokut u euklidskoj ravnini definiran je s tri segmenta ili stranice tako da je svaki kraj segmenta zajednički za točno dvije stranice. Krajevi stranica nazivaju se vrhovima trokuta. Trokut dijeli ravninu na dva disjunktna dijela: unutrašnjost koja je omeđena i vanjštinu koja je neomeđena. Često se pod trokutom misli na uniju ruba (kao zatvorene izlomljene linije) i unutrašnjosti (područja u ravnini omeđenog tom izlomljenom linijom).

Da bi točka R bila na rubu trokuta $T_1T_2T_3$ ona mora pripadati jednoj njegovoj stranici (slika 6). Npr., da bi točka R bila na stranici T_2T_3, mora biti ispunjen uvjet kolinearnosti

$$F(T_2, T_3, R) = 0. \tag{2}$$



Slika 6. *Točka P unutar trokuta, točka R na rubu, točka Q izvan trokuta.*

Taj je uvjet nužan, ali nije dovoljan jer ne jamči da točka R pripada stranici T_2T_3. Naime, može se dogoditi da točka R bude negdje na produžetku te stranice. Da bismo to izbjegli moramo postaviti dodatni uvjet. S pomoću koordinata x_R, y_R točke R možemo zapisati taj uvjet koji uz uvjet (2) mora zadovoljavati točka R da bi zaista bila na rubu trokuta na stranici T_2T_3:

$$x_3 \le x_R \le x_2 \quad \text{i} \quad y_3 \le y_R \le y_2$$

ili

$$x_3 \le x_R \le x_2 \quad \text{i} \quad y_2 \le y_R \le y_3$$

ili

$$x_2 \le x_R \le x_3 \quad \text{i} \quad y_3 \le y_R \le y_2$$

ili

$$x_2 \le x_R \le x_3 \quad \text{i} \quad y_2 \le y_R \le y_3,$$

ovisno o položaju trokuta s obzirom na koordinatni sustav. Posljednjih osam relacija može se kraće zapisati ovako:

$$(x_R - x_2)(x_R - x_3) \le 0 \quad \text{i} \quad (y_R - y_2)(y_R - y_3) \le 0 \tag{3}$$

Izrazi (2) i (3) nužan su i dovoljan uvjet da točka R leži na stranici trokuta T_2T_3. Sada je lako zaključiti da su uvjeti za pripadnost točke R stranici T_iT_{i+1} (uz dogovor $T_4 = T_1$)

$$F(T_i, T_{i+1}, R) = 0 \tag{4}$$

$$(x_R - x_i)(x_R - x_{i+1}) \le 0 \quad \text{i} \quad (y_R - y_i)(y_R - y_{i+1}) \le 0, \quad i = 1,2,3 \tag{5}$$

5. Točka unutar ili izvan trokuta

Umjesto traženja presjeka pravca p s rubom trokuta, možemo postupiti na sljedeći način. Uzmimo da je pravac p paralelan s koordinatnom osi x (slika 7).

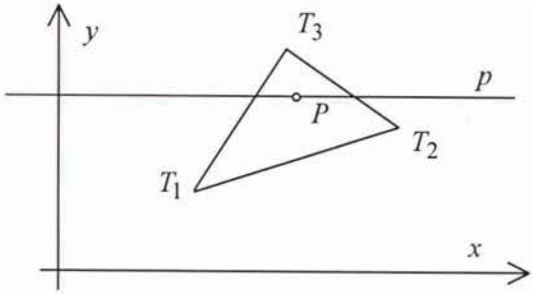
Ako točka P ima koordinate (x_P, y_P), onda se ispituje istinitost tvrdnje

$$y_i \le y_P < y_{i+1} \quad \text{ili} \quad y_{i+1} \le y_P < y_i \tag{6}$$

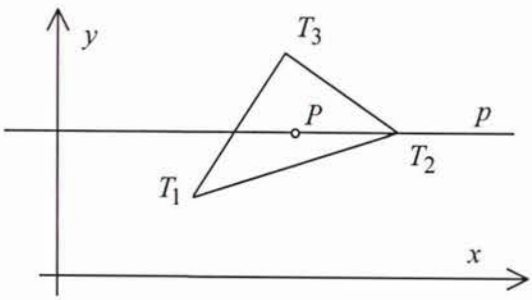
za $i = 1, 2, 3$ (uz identifikaciju $y_4 = y_1$). Npr., na slici 7 imamo:

$$y_2 \le y_P < y_3 \quad \text{i} \quad y_4 = y_1 \le y_P < y_3,$$

dakle, pravac p siječe stranice T_2T_3 i T_3T_1.



Slika 7. *Pravac p paralelan s osi x.*



Slika 7a. *Pravac p paralelan s osi x prolazi vrhom trokuta.*

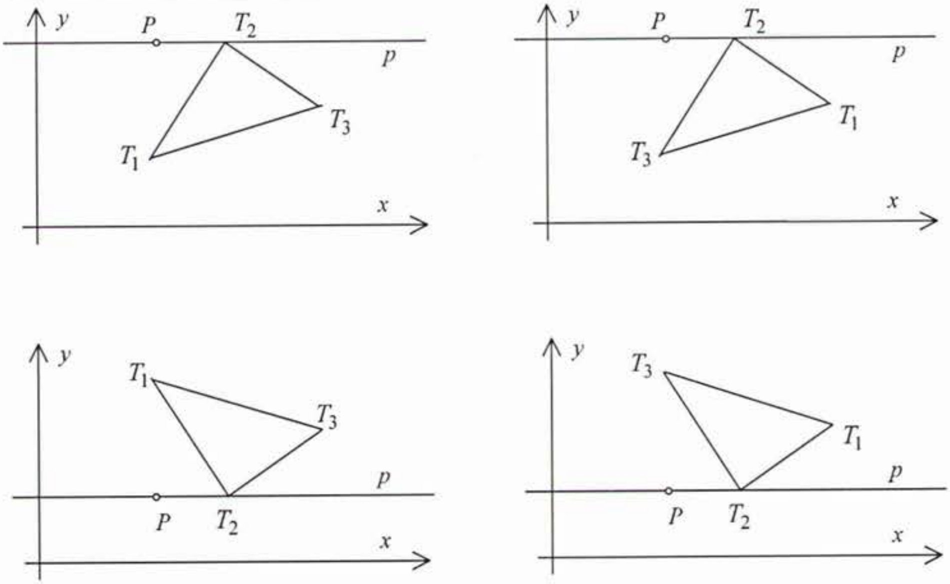
Na slici 7 prikazan je najopćenitiji slučaj u kojem pravac p siječe dvije stranice trokuta. Međutim, može se dogoditi da je točka P na istoj udaljenosti od osi x kao i neki od vrhova trokuta, ili, drugim riječima, da pravac p prolazi nekim vrhom trokuta.

Ako se radi o vrhu trokuta koji je zajednički dvjema stranicama što leže s različitih strana pravca p (slika 7a), tada se taj vrh neće brojiti dva puta zbog načina na koji je postavljen uvjet (6). Prema tome, ne radi se o slučaju koji bi trebalo posebno razmatrati.

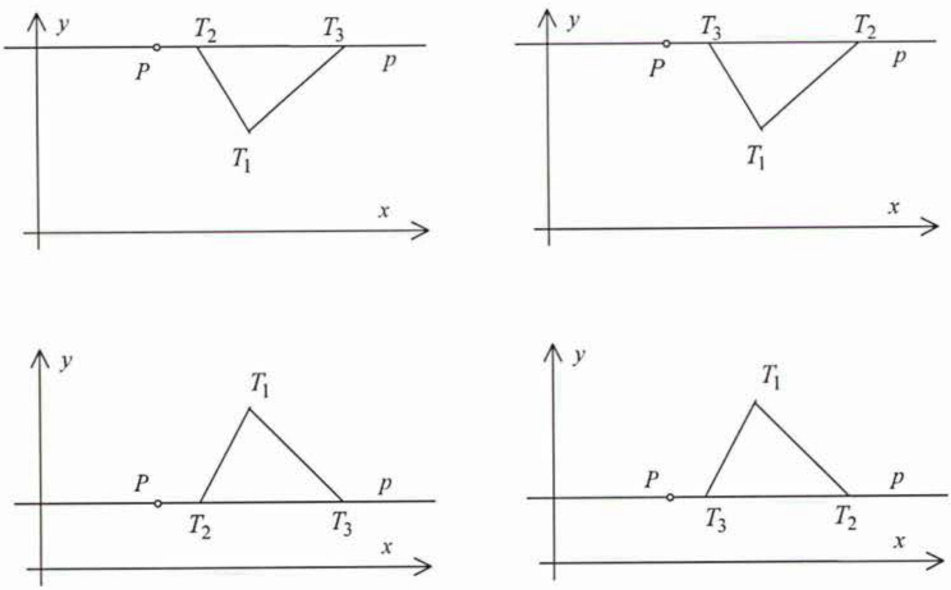
Ako se radi o vrhu trokuta koji je zajednički dvjema stranicama što leže s iste strane pravca p (slika 7b), tada će ispitivanje s pomoću uvjeta (6) dati sljedeće. Za slučajeve prikazane u gornjem redu na slici 7b ni za stranicu T_1T_2 ni za stranicu T_2T_3 nije ispunjen uvjet (6). Za slučajeve prikazane u donjem redu na slici 7b uvjet (6) ispunjen je za obje stranice T_1T_2 i T_2T_3.

Na slici 7c prikazani su slučajevi kod kojih jedna stranica trokuta leži na pravcu p. Ispitivanje s pomoću uvjeta (6) daje sljedeće. Za slučajeve prikazane u gornjem redu na slici 7c ni za jednu od stranica T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1 nije ispunjen uvjet (6). Za slučajeve prikazane u donjem redu na slici 7c uvjet (6) ispunjen je za stranicu T_1T_2 i za stranicu T_3T_1.

Promotrimo odnos položaja točke P, pravca p povučenoga točkom P paraleleno s osi x i bilo koje stranice T_iT_{i+1}.



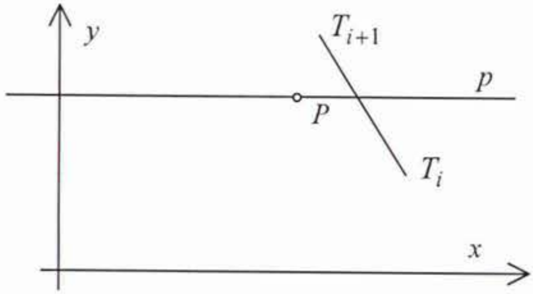
Slika 7b. *Pravac p paralelan s osi x, posebni slučajevi.*



Slika 7c. *Pravac p paralelan s osi x, posebni slučajevi.*

Ako je njihov međusobni položaj kao na slici 8, tada je

$$y_{i+1} - y_i > 0 \quad \text{i} \quad F(T_i, T_{i+1}, P) > 0. \tag{7}$$



Slika 8. *Odnos položaja točke P i stranice T_iT_{i+1}.*

Ako zamijenimo točke T_i i T_{i+1}, bit će

$$y_{i+1} - y_i < 0 \quad \text{i} \quad F(T_i, T_{i+1}, P) < 0. \tag{8}$$

Obje formule (7) i (8) možemo obuhvatiti izrazom

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0. \tag{9}$$

Prema tome, algoritam za određivanje položaja bilo koje točke P u odnosu na zadani trokut $T_1T_2T_3$ može se sažeti na sljedeći način: najprije se na temelju relacija iz prethodnog poglavlja odredi pripada li točka rubu trokuta. Ako ne, tada se povuče pravac p točkom $P(x_P, y_P)$ paralelno s koordinatnom osi x i ispitivanjem istinitosti relacija

$$y_i \le y_P < y_{i+1} \quad \text{ili} \quad y_{i+1} \le y_P < y_i$$

za $i = 1, 2, 3$ (uz formalno uvedenu točku T_4, kao točku identičnu točki T_1) ustanovi postojanje točaka u kojima pravac siječe stranice trokuta. Koliko je takvih točaka desno od točke P određuje se provjeravanjem relacije

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0.$$

Ako je posljednja relacija istinita za samo jednu stranicu, točka P je unutar trokuta, a inače je izvan.

Npr. za konfiguraciju na slici 7, vrijedi

$$(y_3 - y_2)F(T_2, T_3, P) > 0 \quad \text{i} \quad (y_1 - y_3)F(T_3, T_1, P) < 0,$$

dakle pravac p siječe samo jednu stranicu trokuta desno od točke P, pa je točka P unutar trokuta.

6. Određivanje položaja točke s obzirom na zadani jednostavni poligon

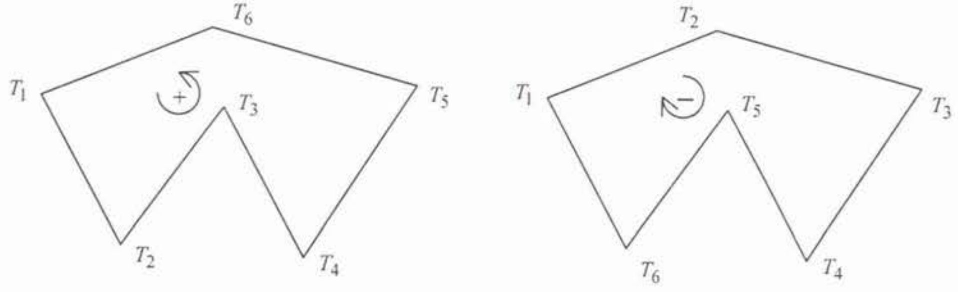
Poligoni su bez dvojbe najčešće upotrebljavani geometrijski objekti u najrazličitijim inženjerskim primjenama. U 3D prikazima upotrebljavaju se za prikaz ploha, u 2D prikazima često su konačan oblik objekta. Paleta primjena iznimno je široka. Područja u kojima se susreću vrlo složeni oblici poligona su kartografija i geografski informacijski sustavi – GIS. Tu nisu rijetki poligoni zadani s nekoliko tisuća vrhova (vidi sliku 9), a koji uz to mogu imati i velik broj "rupa", odnosno točnije rečeno to su skupovi poligona koji se sastoje od više jednostavnih poligona koji se međusobno ne sijeku, a nalaze se jedni unutar drugih. Upravo takvi poligoni često stvaraju velike teškoće u obradi.

Slika 9. *Republika Hrvatska.*

Prema definiciji navedenoj u uvodu, poligon u euklidskoj ravnini definiran je skupom segmenata ili stranica tako da je svaki kraj segmenta zajednički za točno dvije stranice, a ni jedan od podskupova nema to svojstvo. Krajevi stranica nazivaju se vrhovima poligona. Jednostavni poligon dijeli ravninu na dva disjunktna dijela, unutrašnjost koja je omeđena i vanjštinu koja je neomeđena. Često se pod poligonom misli na uniju ruba kao zatvorene izlomljene linije i unutrašnjosti, odnosno područja u ravnini omeđenoga tom izlomljenom linijom. U daljem tekstu pretpostavit ćemo da poligon ima n stranica i n vrhova.

Neka su T_1, T_2 , ..., T_n vrhovi jednostavnog poligona. Reći ćemo da je poligon $T_1T_2...T_n$ *pozitivno orijentiran* ako je obilazeći njegov rub od vrha T_1 preko T_2 itd. pa preko T_n i ponovno do T_1 u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu unutrašnjost poligona uvijek s lijeve strane.

Reći ćemo da je poligon *negativno orijentiran* ako nije pozitivno orijentiran (slika 10).



Slika 10. *Pozitivno i negativno orijentirani jednostavni poligoni.*

7. Točka na rubu poligona

Na potpuno analogan način kao kod trokuta možemo zaključiti da su uvjeti za pripadnost točke R stranici T_iT_{i+1} poligona (uz dogovor $T_{n+1} = T_1$)

$$F(T_i, T_{i+1}, R) = 0 \tag{10}$$

$$(x_R - x_i)(x_R - x_{i+1}) \leq 0 \quad \text{i} \quad (y_R - y_i)(y_R - y_{i+1}) \leq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

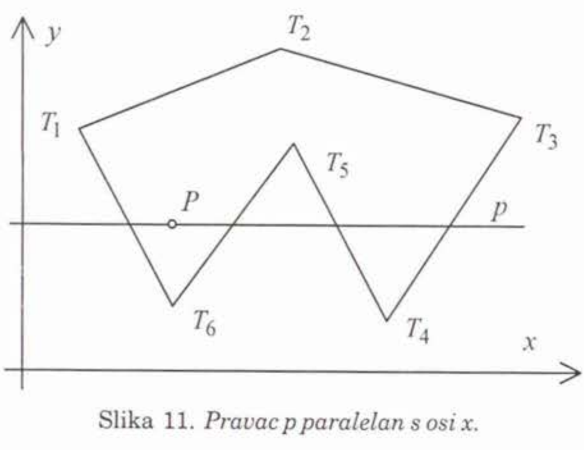
8. Točka unutar ili izvan poligona

Umjesto traženja presjeka pravca p s rubom poligona, možemo postupiti na sljedeći način. Uzmimo da je pravac p paralelan s koordinatnom osi x (slika 11).

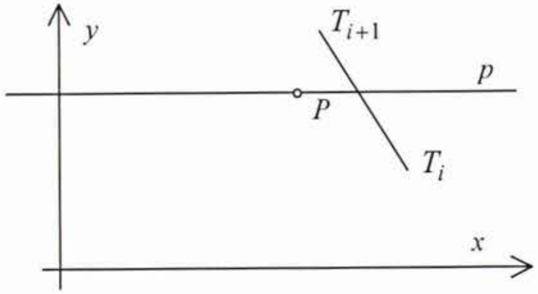
Ako točka P ima koordinate (x_P, y_P), onda se ispituje tvrdnja

$$y_i \leq y_P < y_{i+1} \text{ ili } y_{i+1} \leq y_P < y_i \tag{12}$$

za $i = 1, 2, ..., n$ (uz identifikaciju $y_{n+1} = y_1$).



Slika 11. *Pravac p paralelan s osi x.*



Slika 12. *Odnos položaja točke P i poligonske stranice T_iT_{i+1}.*

Promotrimo odnos položaja točke P, pravca p povučenog točkom P paraleleno s osi x i bilo koje poligonske stranice T_iT_{i+1}.

Ako je njihov međusobni položaj kao na slici 12, tada je

$$y_{i+1} - y_i > 0 \quad \text{i} \quad F(T_i, T_{i+1}, P) > 0. \tag{13}$$

Ako zamijenimo točke T_i i T_{i+1}, bit će

$$y_{i+1} - y_i < 0 \quad \text{i} \quad F(T_i, T_{i+1}, P) < 0. \tag{14}$$

Obje formule (13) i (14) možemo obuhvatiti izrazom

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0. \tag{15}$$

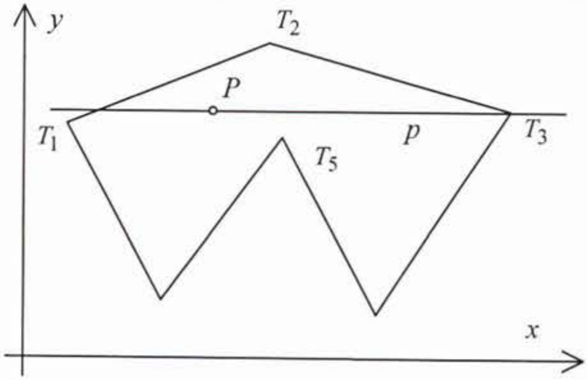
Dakle, istinitost relacije (15) znači da je poligonska stranica T_iT_{i+1} desno od točke P. Prema tome, ako takvih stranica koje su desno od točke P ima neparan broj, možemo zaključiti da je točka P unutar poligona. U protivnom bit će izvan.

Na slici 11 prikazan je općenit slučaj u kojem pravac p siječe nekoliko stranica poligona. Međutim, može se dogoditi da je točka P na istoj udaljenosti od osi x kao i neki od vrhova poligona.

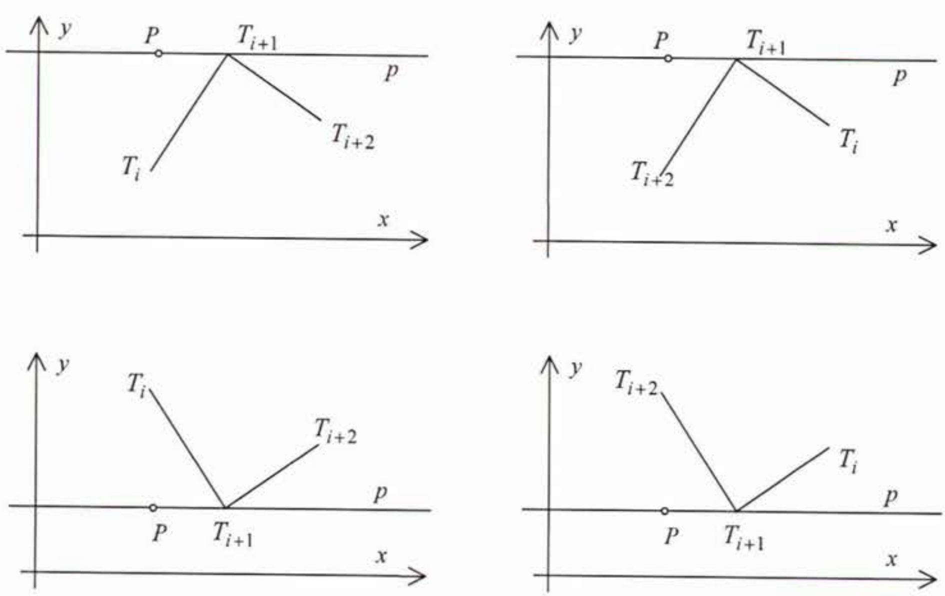
Ako se radi o vrhu poligona koji je zajednički dvjema stranicama što leže s različitih strana pravca p (slika 11a), tada se taj vrh neće brojiti dva puta zbog načina na koji je postavljen uvjet (12). Prema tome, ne radi se o slučaju koji bi trebalo posebno razmatrati.

Ako se radi o vrhu poligona koji je zajednički dvjema stranicama što leže s iste strane pravca p (slika 11b), tada će ispitivanje s pomoću uvjeta (12) dati sljedeće. Za slučajeve prikazane u gornjem redu na slici 11b ni za stranicu T_iT_{i+1} ni za stranicu $T_{i+1}T_{i+2}$ nije ispunjen uvjet (12), tako da za njih neće ni biti ispitivane odgovarajuće relacije oblika (15).

Za slučajeve prikazane u donjem redu na slici 11b, uvjet (12) ispunjen je i za stranicu T_iT_{i+1} i za stranicu $T_{i+1}T_{i+2}$, tako da će se za obje ispitivati odgovarajuće relacije oblika (15). U oba će se slučaja dobiti



Slika 11a. *Pravac p paralelan s osi x prolazi vrhom poligona.*



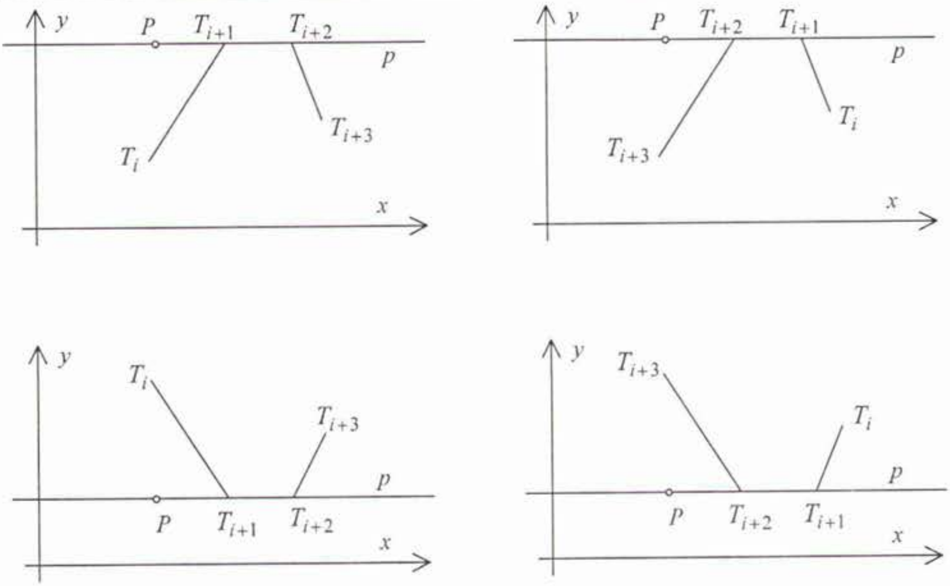
Slika 11b. *Pravac p paralelan s osi x, posebni slučajevi.*

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0$$

$$(y_{i+2} - y_{i+1})F(T_{i+1}, T_{i+2}, P) > 0,$$

što znači da su obje poligonske stranice T_iT_{i+1} i $T_{i+1}T_{i+2}$ desno od točke P. No taj rezultat neće utjecati na konačnu odluku jer ako se parnom broju doda 2 on ostaje paran, a ako se neparnom broju doda 2 on ostaje neparan.

Pogledajmo još neke posebne slučajeve. Na slici 11c prikazani su slučajevi kod kojih jedna poligonska stranica leži na pravcu p, a njezine susjedne stranice leže s iste stra-



Slika 11c. *Pravac p paralelan s osi x, posebni slučajevi.*

ne pravca p. Ispitivanje s pomoću uvjeta (12) daje sljedeće. Za slučajeve prikazane u gornjem redu na slici 11c ni za jednu od stranica T_iT_{i+1}, $T_{i+1}T_{i+2}$, $T_{i+2}T_{i+3}$ nije ispunjen uvjet (12), tako da se za njih neće ni ispitivati odgovarajuće relacije oblika (15).

Za slučajeve prikazane u donjem redu na slici 11c uvjet (12) ispunjen je za stranicu T_iT_{i+1} i za stranicu $T_{i+2}T_{i+3}$, pa će se za obje ispitivati odgovarajuće relacije oblika (15). U oba će se slučaja dobiti

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0$$

$$(y_{i+3} - y_{i+2})F(T_{i+2}, T_{i+3}, P) > 0,$$

što znači da su obje poligonske stranice T_iT_{i+1} i $T_{i+2}T_{i+3}$ desno od točke P. No taj rezultat neće utjecati na konačnu odluku jer ako se parnom broju doda 2 on ostaje paran, a ako se neparnom broju doda 2 on ostaje neparan.

Na slici 11d prikazani su slučajevi kod kojih jedna poligonska stranica leži na pravcu p, a njezine susjedne stranice leže s različitih strana pravca p. Ispitivanje s pomoću uvjeta (12) daje da od stranica T_iT_{i+1}, $T_{i+1}T_{i+2}$, $T_{i+2}T_{i+3}$ srednja stranica ne ispunjava (12), a od preostalih dviju uvjet (12) ispunjava točno jedna. Ako je to stranica T_iT_{i+1}, onda vrijedi

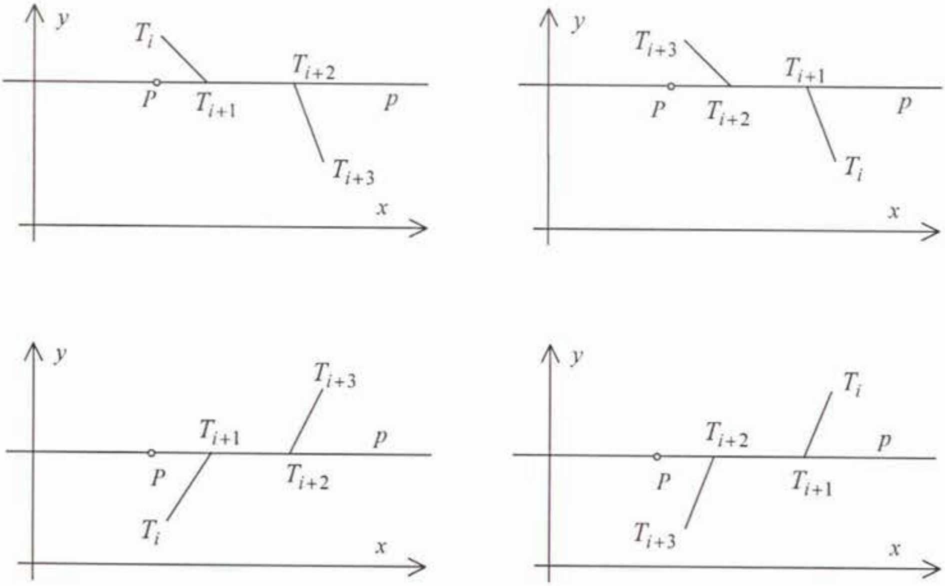
$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0,$$

a ako je to stranica $T_{i+2}T_{i+3}$, onda vrijedi

$$(y_{i+3} - y_{i+2})F(T_{i+2}, T_{i+3}, P) > 0,$$

Prema tome, za svaki od slučajeva prikazanih na slici 11d ispitivanje će dati rezultat da je rub poligona na tome mjestu desno od točke P, odnosno kao da je pravac p u jednoj točki presjekao rub poligona.

Na temelju provedenih ispitivanja algoritam za određivanje položaja bilo koje točke P s obzirom na zadani poligon $T_1 T_2 \ldots T_n$ može se sažeti na sljedeći način.



Slika 11d. *Pravac p paralelan s osi x, posebni slučajevi.*

Najprije se na temelju relacija iz prethodnog poglavlja odredi pripada li točka rubu poligona. Ako ne, tada se povuče pravac p točkom $P(x_P, y_P)$ paralelno s koordinatnom osi x i ispitivanjem istinitosti relacija

$$y_i \leq y_P < y_{i+1} \quad \text{ili} \quad y_{i+1} \leq y_P < y_i$$

za $i = 1, 2, \ldots, n$ (uz formalno uvedenu točku T_{n+1}, kao točku identičnu točki T_1) ustanovi postojanje točaka u kojima pravac siječe stranice poligona. Koliko je takvih točaka desno od točke P određuje se provjeravanjem relacije

$$(y_{i+1} - y_i)F(T_i, T_{i+1}, P) > 0.$$

Ako je posljednja relacija istinita za neparan broj stranica, točka P je unutar poligona, a inače je izvan.

Npr., za konfiguraciju na slici 11 vrijedi

$$(y_1 - y_6)F(T_6, T_1, P) < 0,$$

$$(y_6 - y_5)F(T_5, T_6, P) > 0,$$

$$(y_5 - y_4)F(T_4, T_5, P) > 0,$$

$$(y_4 - y_3)F(T_3, T_4, P) > 0,$$

što znači da pravac p siječe tri stranice poligona desno od točke P, pa je točka P unutar poligona.

ZAHVALA. Autori zahvaljuju prof. dr. sc. Miljenku Solariću i dr. sc. Svetozaru Petroviću na pažljivom čitanju rukopisa i korisnim primjedbama koje su omogućile da ovaj rad bude razumljiviji i oslobođen pogrešaka.

Literatura

De Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O. (2000): Computational Geometry, Algorithms and Applications, Springer Verlag, Berlin.

Frančula, N. (1996): Digitalna kartografija, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Frančula, N. (1999): Digitalna kartografija, 2. prošireno izdanje, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Hanstein, W., Block, K. (1971): Die Zentralpunktkoordinaten und das Auswahlprogramm "POLYP", Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen, 4, 350-362.

Pavković, B., Veljan, D. (1992): Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb.

Preparata, F. P., Shamos, M. I. (1985): Computational Geometry, Springer Verlag, New York.

Point Inclusion in a Polygon

ABSTRACT. The problem of automated decision making on the position of a point related to a given simple polygon belongs to computational geometry, and has its application in different disciplines, among others in geodesy and cartography, too. The paper gives the thorough description of a new and simple algorithm for solving this problem.

Keywords: point-inclusion problem, computational geometry, Jordan theorem.

Primljeno: 2001-4-8