

UDK 528.2:551.43(497.5):517.3/4
Izvorni znanstveni članak

Korekcija reljefa uz prostorni model gustoće

Mario BRKIĆ – Zagreb*

SAŽETAK. Jednostavna, linearna funkcija gustoće implementirana je u ravninsku aproksimaciju korekcije za reljef (tc). Redefinirane su metode egzaktne numeričke integracije i Fast Fourier Transform kvadratične aproksimacije tc -a, tako da osim digitalnih modela visina i površinskih gustoća uključuje i digitalne modele dubina i gustoća podzemnog horizonta, u našem slučaju PT baze sedimenata. U skladu s time, a uz različitu finoću ulaznih digitalnih modela, računana je korekcija za reljef odabranog test-područja Republike Hrvatske. Redefinirane metode uspoređene su s metoda-
ma numeričke integracije i FFT-a u kojima se koristi jedino model površinski varijabilne gustoće. Istražen je međuodnos redefiniranih metoda prostorne i spektralne domene te njihova osjetljivost o odabranome modelu gustoće. Potvrđena je nadmoćna vremenska učinkovitost FFT-a. Pokazano je da korekcija reljefa uz predloženi prostorni model gustoće smije biti u praksi uporabljena za rješavanje problema fizikalne geodezije.

Ključne riječi: korekcija reljefa, model gustoće, numerička integracija, FFT

1. Uvod

Korekcija reljefa (tc), efekt nepravilnosti reljefa u odnosu na Bouguerovu ploču, koristi se u fizikalnoj geodeziji npr. pri rješavanju *Problema graničnih vrijednosti* ili pri određivanju redukcija reljefa u modeliranju Zemljina polja sile teže. Pri tome je uobičajeno uporabiti ravninsku aproksimaciju korekcije reljefa (Tziavos 1993), u kojoj gustoća poprima konstantnu i za razmatrano područje reprezentativnu vrijednost ili je zadana digitalnim modelom površinskih gustoća, ako takav postoji. Sam postupak računanja tc -a moguće je tada provesti metodama prostorne i/ili spektralne domene, primjerice egzaktnom numeričkom integracijom i/ili *Fast Fourier Transformom*, kao što je prikazano u (Brkić i Bašić 2000), polaznoj točki ovog rada, na koju ljubazno upućujem čitatelja u potrazi za iscrpnijim uvodnim štivom.

Kako glasi ravninska aproksimacija korekcije reljefa, a ako gustoću, obično držanu konstantnom ili površinski varijabilnom, definiramo kao prostornu funkciju, $\rho = \rho(x, y, z)$? Na koji način valja iskoristiti raspoložive geološke informacije, ne sa-

*Mr. sc. Mario Brkić, Institut za obrambene studije, istraživanje i razvoj, MORH, Bijenička 46, Zagreb.

mo digitalne modele reljefa i površinskih gustoća već i digitalne modele dubina i pripadnih gustoća, primjerice neke poznate baze sedimenata?

Neki već ponuđeni odgovori (Brkić i Bašić 1997), dani u prostornoj domeni, uz sfernu aproksimaciju i diskretne promjene gustoće na diskontinuitetima, našli su i praktičnu uporabu (Čolić i dr. 1996).

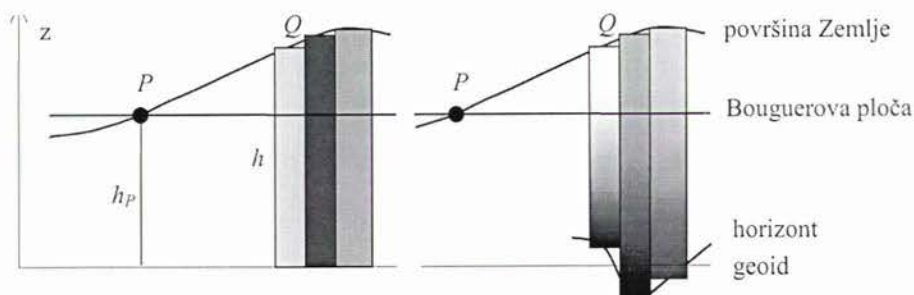
Svrha je ovoga rada ponuditi formulaciju ravninske aproksimacije korekcije reljefa, u kojoj je gustoća definirana kao prostorna funkcija. U skladu s pretpostavljenim jednostavnim prostornim modelom gustoće, metode egzaktne numeričke integracije i FFT kvadratične aproksimacije redefinirane su i implementirane u računalne programe te uporabljene za računanje korekcije reljefa odabranog područja Republike Hrvatske.

2. Prostorni model gustoće

Zamislimo najjednostavniji slučaj u kojem se gustoća mijenja linearno između površine i nekog podzemnog horizonta:

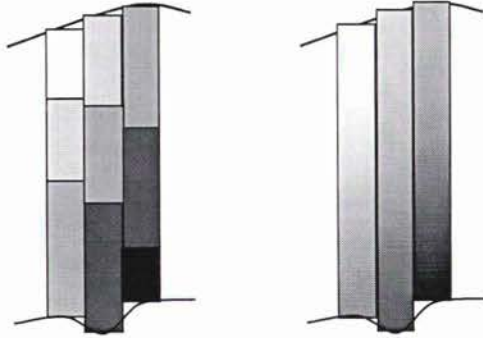
$$\rho(x,y,z) = \rho_h(x,y) + b(x,y) (h-z). \quad (2.1)$$

Ovdje $\rho_h(x,y)$ označava površinsku raspodjelu gustoće, $b(x,y)$ vertikalni gradijent gustoće, a h visinu Zemljine površine. Pritom se u reprezentaciji masa Zemljine kore prizmama za prostor od h pa do Bouguerove ploče ne pretpostavlja konstantna gustoća, lateralno varijabilna, već se prema modelu gustoće tvrdi da se ona mijenja linearno:



Slika 2-1. Reprezentacija pretpostavljenih modela gustoća: gustoća je površinski varijabilna (lijevo); gustoća je prostorno varijabilna (desno).

Gdje ima smisla uporabiti tako zamišljen model gustoće, odnosno je li on 'realističan'? Svakako tamo gdje je evidentna (linearna!) promjena gustoće s dubinom. Horizont u smislu formulacije (2.1) ne mora nužno značiti i diskontinuitet već jednostavno skup mjerenja, gustoća i dubina. No, smatramo li da je Zemljina kora ljuskasto, tj. slojevito građena, tako da je unutar svakog sloja gustoća konstantna i da naglo mijenja svoju vrijednost na granicama slojeva, diskontinuitetima, onda gornja formulacija modela gustoće može biti prikladna npr. u slučaju potrebe da se cijeli niz 'manjih'



Slika 2-2. Agregacija triju slojeva u jedan.

i bliskih diskontinuiteta i slojeva 'agregira' u jedan sloj u kojem se gustoća mijenja kontinuirano između vrha topografije i odabranog horizonta (sl. 2-2).

Zamislimo li Zemljinu koru reprezentiranu pravokutnim prizmama, onda su i gustoća $\rho_h(x,y)$ i njezin gradijent iz analitičkog izraza za gustoću (2.1) za svaku prizmu općenito različiti. Dok je $\rho_h(x,y)$ dan u obliku digitalnog modela površinskih gustoća, gradijent $b(x,y)$ u praksi izračunavamo s pomoću digitalnih modela dubina odnosno gustoća horizontata:

$$b(x,y) = \frac{\rho_{\text{horizont}}(x,y) - \rho_h(x,y)}{h - z_{\text{horizont}}}. \quad (2.2)$$

Drugim riječima, gradijent gustoće $b(x,y)$ kritična je veličina za definiciju prostornog modela gustoće, a onda i tc -a. Pod kojim uvjetima vrijedi takav jednostavan model gustoća? Za očekivati je da za podzemni horizont vrlo blizak površini Zemlje vertikalni gradijent gustoće b 'kviri' tc -rješenje. To očigledno može biti ozbiljno ograničenje pretpostavljenog modela gustoće.

3. Korekcija reljefa u prostornoj domeni

Definicija ravninske aproksimacije korekcije reljefa, a pri kojoj gustoća nije konstantna već je aproksimirana prostornim modelom (2.1), glasi:

$$tc(x_p, y_p, z_p) = G \iiint_E \int_{h_p}^h \frac{(z - h_p)[\rho_h(x,y) + b(x,y)(h - z)]}{[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^{3/2}} dx dy dz. \quad (3.1)$$

Egzaktno rješenje korekcije reljefa, dobiveno izravnom numeričkom integracijom, pri reprezentaciji masa Zemljine kore uz pomoć pravokutnih prizmi, uzeto je kao referentno za usporedbe s metodom spektralne domene. U praksi se egzaktna numerička integracija, NI4, svodi na implementaciju sljedećih dvaju integrala:

$$\begin{aligned}
 \iiint \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz = & x - x \ln(y + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) - \\
 & y \ln(x + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}) - \\
 & z \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + \\
 & z a \operatorname{ctg}\left(\frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

i

$$\begin{aligned}
 \iiint \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz = & \frac{3xy}{2} + \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \\
 & \frac{z^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{z(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) - \\
 & \frac{y^2}{2} \operatorname{arct}\left(\frac{xz}{y(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) - \\
 & \frac{x}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{yz}{x(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) + \\
 & xy \ln(z + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Integral (3.2) poznat je otprije: on se u pojednostavljenom obliku upotrebljava pri egzaktnoj numeričkoj integraciji (NI1) korekcije reljefa s konstantnim ili površinski varijabilnim gustoćama (Tziavos 1993). Numerička integracija NI4 zahtijeva korištenje integrala (3.2) dvaput, i dodatno, integrala (3.3). Upravo iz toga slijedi značajno smanjenje vremenske učinkovitosti egzaktnog računanja korekcije reljefa u prostornoj domeni.

4. Korekcija reljefa u spektralnoj domeni

Formulacija (3.1) neće u cijelosti biti prenesena u spektralnu domenu: razvit ćemo je u kvadratičnu aproksimaciju. U pripremi za prelazak u spektralnu domenu namjera nam je 3D konvolucije korekcije reljefa pojednostaviti u 2D konvolucije. Po radi toga uvodimo najprije sljedeći rastav:

$$tc(x_P, y_P, z_P) = G \iint_E \left[\underbrace{\frac{\int_{h_p}^h (z - h_p) \rho_h(x, y) dz}{[s_0^2 + (z - h_p)^2]^{3/2}}}_{I_1} + \underbrace{\frac{\int_{h_p}^h (z - h_p) b(x, y) z dz}{[s_0^2 + (z - z_P)^2]^{3/2}}}_{I_2} + \underbrace{\frac{\int_{h_p}^h (z - h_p) b(x, y) h dz}{[s_0^2 + (z - z_P)^2]^{3/2}}}_{I_3} \right] dx dy, \quad (4.1)$$

gdje je $s_0^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2$ i $z_P = h_P$ (Tziavos 1993).

Uočljivo je da integral I_1 odgovara integrandu izraza (2.5) iz (Brkić i Bašić 2000):

$$I_1 = \rho_h \left[\frac{1}{s_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^4 \right] \right], \quad (4.2)$$

pri čemu je $\Delta h = h - h_P$. Kod razvoja $[1 + (h/s_0)^2]^{1/2}$ u red pretpostavljamo da je ispunjen zahtjev za konvergenciju, $|h/s_0| < 1$ (Tziavos 1993). Treba naglasiti da je u ovom razvoju zadržan i nelinearni član.

Do rješenja integrala I_2 dolazimo izravno integracijom:

$$I_2 = b \left[\frac{h}{s_0} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^4 \right] + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^3 \right]. \quad (4.3)$$

Posljednji traženi integral I_3 dobiva se analogno I_1 :

$$I_3 = bh \left[\frac{1}{s_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^4 \right] \right]. \quad (4.4)$$

Nakon sređivanja, korekcija reljefa u formi 2D konvolucija glasi:

$$tc(x_P, y_P, z_P) = \underbrace{G \iint_E \rho_h \frac{1}{s_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^4 \right]}_I dx dy + \underbrace{G \iint_E b \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^3 \right]}_{II} dx dy. \quad (4.5)$$

U prethodnom izrazu član I označuje poznatu formulu korekcije reljefa u kvadratičnoj aproksimaciji (FFT2) uz pretpostavku površinski varijabilne gustoće. Član označen s II označuje doprinos koji je posljedica zadane hipoteze modela prostorno varijabilne gustoće.

Za prelazak u spektralnu domenu, oznake

$$\begin{aligned} r_3(x, y) &= s_0^{-3}(x, y) \\ r_5(x, y) &= s_0^{-5}(x, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

omogućuju da korekciju reljefa raspišemo kao:

$$\begin{aligned} tc(x_P, y_P) &= \frac{1}{2} G \iint_E (\rho_h(x, y) h^2(x, y)) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & Gh(x_P, y_P) \iint_E (\rho_h(x, y) h(x, y)) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy + \\ & \frac{1}{2} Gh^2(x_P, y_P) \iint_E \rho_h(x, y) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & \frac{3}{8} G \iint_E (\rho_h(x, y) h^4(x, y)) r_5(x - x_P, y - y_P) dx dy + \\ & \frac{3}{2} Gh(x_P, y_P) \iint_E (\rho_h(x, y) h^3(x, y)) r_5(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & \frac{9}{4} Gh^2(x_P, y_P) \iint_E (\rho_h(x, y) h^2(x, y)) r_5(x - x_P, y - y_P) dx dy + \\ & \frac{3}{2} Gh^3(x_P, y_P) \iint_E (\rho_h(x, y) h(x, y)) r_5(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & \frac{3}{8} Gh^4(x_P, y_P) \iint_E \rho_h(x, y) r_5(x - x_P, y - y_P) dx dy + \\ & \frac{1}{6} G \iint_E (b(x, y) h^3(x, y)) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & \frac{1}{2} Gh(x_P, y_P) \iint_E (b(x, y) h^2(x, y)) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy + \\ & \frac{1}{2} Gh^2(x_P, y_P) \iint_E (b(x, y) h(x, y)) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy - \\ & \frac{1}{6} Gh^3(x_P, y_P) \iint_E b(x, y) r_3(x - x_P, y - y_P) dx dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pojednostavljeni zapis tih konvolucija pišemo:

$$\begin{aligned} tc(x_P, y_P) &= \frac{1}{2} G [(\rho_h h^2) \cdot r_3 - 2h_P(\rho_h h) \cdot r_3 + h_P^2 \rho_h \cdot r_3] - \\ & \frac{3}{8} G [(\rho_h h^4) \cdot r_5 - 4h_P(\rho_h h^3) \cdot r_5 + 6h_P^2(\rho_h h^2) \cdot r_5 - 4h_P^3(\rho_h h) \cdot r_5 + h_P^4 \rho_h \cdot r_5] + \\ & \frac{1}{6} G [(bh^3) \cdot r_3 - 3h_P(bh^2) \cdot r_3 + 3h_P^2(bh) \cdot r_3 - h_P^3 b \cdot r_3]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definiramo li sljedeće Fourierove transforme:

$$\begin{aligned}
 R_3(u, v) &= \mathbf{F}\{r_3(x, y)\} \\
 R_5(u, v) &= \mathbf{F}\{r_5(x, y)\} \\
 D(u, v) &= \mathbf{F}\{\rho_h(x, y)\} \\
 DH_i(u, v) &= \mathbf{F}\{\rho_h(x, y) h^i(x, y)\}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
 BH_i(u, v) &= \mathbf{F}\{b(x, y) h^i(x, y)\}, \quad i = 1, 2, 3 \\
 B(u, v) &= \mathbf{F}\{b(x, y)\},
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

tada primjenom teorema konvolucije slijedi formula za računanje korekcije reljefa u spektralnoj domeni uz pretpostavljeni model gustoće:

$$\begin{aligned}
 tc(x_p, y_p) &= \frac{1}{2} G \left[\mathbf{F}^{-1}\{DH_2 \cdot R_3\} - 2h_p \mathbf{F}^{-1}\{DH \cdot R_3\} + h_p^2 \mathbf{F}^{-1}\{D \cdot R_3\} \right] - \\
 &\frac{3}{8} G \left[\mathbf{F}^{-1}\{DH_4 \cdot R_5\} - 4h_p \mathbf{F}^{-1}\{DH_3 \cdot R_5\} + \right. \\
 &\left. 6h_p^2 \mathbf{F}^{-1}\{DH_2 \cdot R_5\} - 4h_p^3 \mathbf{F}^{-1}\{DH \cdot R_5\} + h_p^4 \mathbf{F}^{-1}\{D \cdot R_5\} \right] + \\
 &\frac{1}{6} G \left[\mathbf{F}^{-1}\{BH_3 \cdot R_3\} - 3h_p \mathbf{F}^{-1}\{BH_2 \cdot R_3\} + 3h_p^2 \mathbf{F}^{-1}\{BH \cdot R_3\} - h_p^3 \mathbf{F}^{-1}\{B \cdot R_3\} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

Usporedimo li posljednju formulu s formulom 3.5 iz (Brkić i Bašić 2000), uočavamo da se razlikuju za četiri 2D *FFT*-a, odnosno isto toliko inverznih *FFT*-a, od čega pak ne očekujemo znatno povećanje računalnog napora. Kao prednost usvojenog pristupa valja istaknuti nesingularnost kernel funkcija R_3 i R_5 (Tziavos 1993).

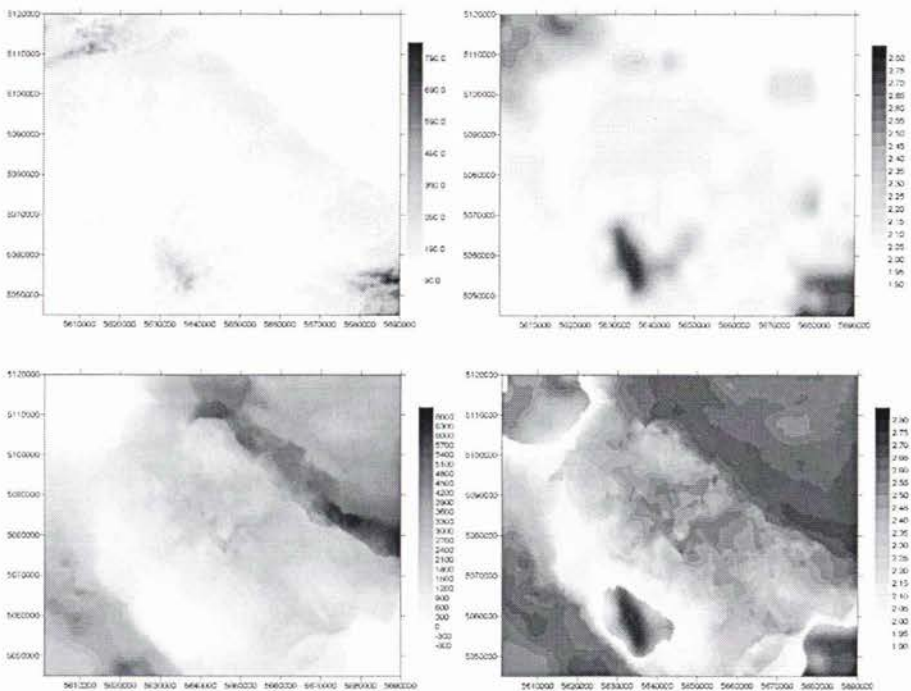
Metoda *FFT* zahtijeva uporabu pravilne mreže digitalnih modela visina i gustoća. Praktični problemi o kojima treba voditi računa prilikom primjene spektralnih metoda opširnije su obrađeni u (Brkić i Bašić 2000). Slično kao u tom radu, i ovdje se u svrhu otklanjanja pogrešaka cirkularne konvolucije koristi *zero-padding* tehnika, 100%-tno pridodavanje nula oko polja visina, gustoća, gradijenta gustoće, njihovih umnožaka te kernel funkcije. Metoda *FFT*-a zahtijeva i minimizaciju *aliasinga*, a kvadratična aproksimacija *tc*-a i ispunjenje uvjeta za konvergenciju razvoja u red. Budući da nisu uočene numeričke nestabilnosti vezane uz neispunjenost navedenih kriterija, nisu ni primijenjene tehnike za njihovu minimizaciju ili eliminaciju.

5. Ulazni digitalni modeli

Test-područje Republike Hrvatske te digitalni modeli reljefa i površinskih gustoća preuzeti su iz (Brkić i Bašić 2000). Izvorni su digitalni modeli opisani u (Čolić i dr. 1996), a za potrebe ovog rada interpolirani su digitalni modeli s inkrementima 0,5 i 1 km (tablica 5-1). Slika 5-1 prikazuje digitalne modele reljefa (DMR), površinskih gustoća (DMPG), PT-dubina (DMPTD) i PT-gustoća (DMPTG).

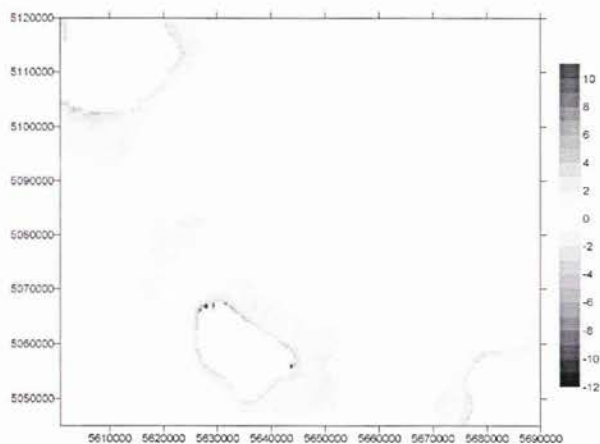
Tablica 5-1. *Temeljne statistike ulaznih digitalnih modela.*

DM	$\Delta = 0,5 \text{ km}$				$\Delta = 1,0 \text{ km}$			
	h [m]	ρ_h [gcm ⁻³]	d_{PT} [m]	ρ_{PT} [gcm ⁻³]	h [m]	ρ_h [gcm ⁻³]	d_{PT} [m]	ρ_{PT} [gcm ⁻³]
maks.	831,000	2,800	6834,144	2,800	816,000	2,800	6796,903	2,801
min.	93,000	1,980	-550,811	1,913	94,000	1,980	-550,811	1,924
sred.	157,224	2,115	1948,047	2,415	157,547	2,116	1950,426	2,416
rms	$\pm 170,994$	$\pm 2,121$	$\pm 2487,269$	$\pm 2,425$	$\pm 171,709$	$\pm 2,121$	$\pm 2490,112$	$\pm 2,426$

Slika 5-1. *Ulazni DMR i DMPG (gornji red), DMPTD i DMPTG (donji red). Inkrement mreže 0,5 km.*

Apsolutna točnost podataka je nepoznata. I dok se za digitalne modele reljefa i površinskih gustoća može utvrditi dobra pouzdanost, digitalni modeli dubina i gustoća PT-horizonta sadrže mnoge nekonzistentnosti. Stoga računanju tc-a prethodi provjera podataka: (1) konzistentnost digitalnih modela gustoća podrazumijeva jednakost gustoća na podudarnim horizontima i (2) konzistentnost digitalnih modela visina podrazumijeva visinu Zemljine površine veću ili jednaku od visine horizonta. Ne-konzistentnosti se rješavaju tako da 'sumnjiva' mjesta u digitalnim modelima horizonta poprimaju vrijednosti iz odgovarajućih digitalnih modela površin-

skih visina i gustoća. Na to da su digitalni modeli PT-horizonta kontaminirani pogreškama upozorava i pravilna struktura u gornjem desnom kutu DMPTD. Također, ako su podaci visine reljefa i horizonta jednaki, očekuje se i jednakost pripadnih gustoća te stoga u izrazu (2.2) nastupa slučaj 0/0. Tada se b ne računa, već se proglašava $b = 0$. Drugim riječima, korekcija reljefa računa se metodama NI1 odnosno FFT2. Primijecujemo da slučaj 0/0 može rezultirati i iz forsiranja kod nekonzistentnosti podataka visina; međutim, tada je riječ o sumnjivim podacima koji zahtijevaju, ako je to moguće, provjeru i korekciju. Upozorimo još i na veliku podudarnost PT-horizonta dubina i gustoća te kod njih velike gradijente, posebice kod DMPTG. Da je riječ o osobitim i geološki uzbudljivim strukturama možemo vidjeti i na slici 5-2, gdje ekstremne negativne vrijednosti vertikalnih gradijenata b potječu iz pada(!) gustoće na malim razlikama visina, reda veličine 50-ak m. Pozitivne vrijednosti vertikalnih gradijenata su jedva uočljive točkaste strukture, na slici istaknute crtama izolinija.



Slika 5-2. Vertikalni gradijent gustoće b . Inkrement mreže 0,5 km.

U prethodnim poglavljima iznesene redefinirane formulacije korekcije reljefa implementirane su u fortranske programe TC_NI4 i TC_FFT4, koji su potom testirani. Sukladno prethodnom razmatranju, u programima je dozvoljena bliskost horizonta i površine, izbijanje horizonta na površinu te vrijednost gustoće horizonta manja od gustoće pri površini.

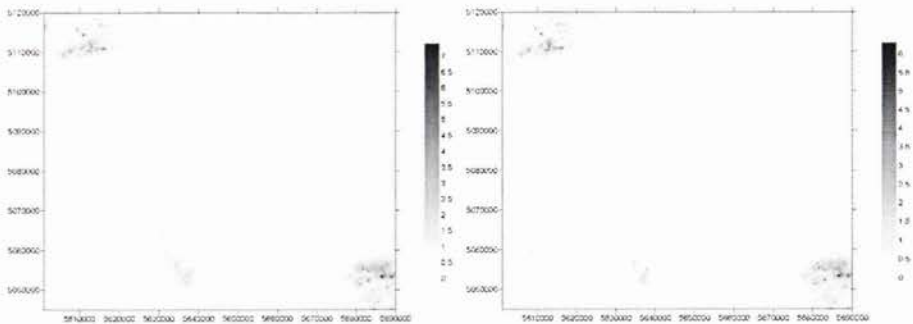
6. Rezultati

Računanje tc -a numeričkom integracijom NI4 uz inkrement 0.1 km potrajalo bi na raspoloživom računalu HP Vectra VL više od 7.77 mjeseci. Poradi toga u ovom trenutku nije moguće egzaktno utvrditi ovisnost točnosti računanja o inkrementu ulaznih mreža. Također je i to razlog što su rezultati koji slijede po svojoj prirodi relativni.

U prvom ciklusu računanja, korekcija reljefa nalazi se egzaktnom numeričkom integracijom NI4 te pomoću FFT4. Pri tom su korišteni DMR i DMPG, a DMPTD i DMPTG aproksimirani su pripadnim srednjacima dubina d_{PT} i gustoća ρ_{PT} iz tablice 5-1. Rezultati tih računanja prikazani su u tablici 6-1 i slici 6-1. Već se i na prvi pogled uočava podudarnost prikazanih rezultata s onima objavljenima u (Brkić i Bašić 2000).

Tablica 6-1. Korekcija reljefa metodama NI4 i FFT4 uz $\rho_{PT} = const.$ i $d_{PT} = const.$

Δg [mgal]	NI4		FFT4	
	Δ [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	7,318	4,207	6,170	3,463
min.	0,001	0,001	0,001	0,001
sred.	0,112	0,094	0,100	0,083
rms	0,326	0,278	0,283	0,232
st. dev.	0,306	0,261	0,264	0,216



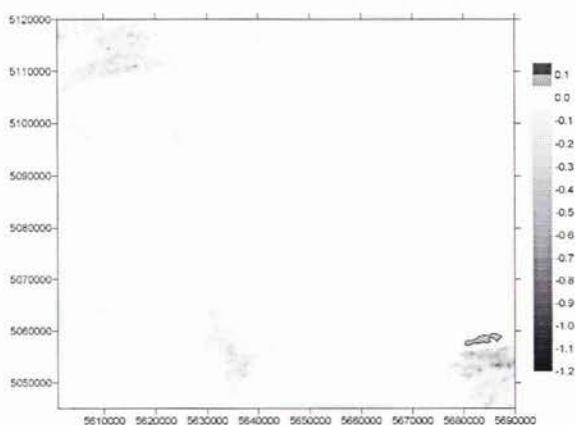
Slika 6-1. Korekcija za reljef metodama NI4 i FFT4 uz $\rho_{PT} = const.$ i $d_{PT} = const.$ Inkrement 0,5 km.

Nadalje, usporedbom tc -a izračunanog metodom FFT4, uz inkremente 0,5 i 1 km, s referentnim tc -om, izračunanim pomoću NI4 uz 0,5 km, moglo bi se pokazati ponavljanje uzorka već uočenog u (Brkić i Bašić 2000): svi promatrani statistički parametri razlika FFT4-NI4 smanjuju se smanjenjem inkrementa digitalnih modela. Drugim riječima, FFT4 s inkrementom 0,5 km najmanje odstupa od referentnog NI4.

Razmotrimo u sljedećoj tablici tc -razlike prostorne i spektralne domene, sada izračunane uz jednake inkremente. Vidimo da se te razlike povećavaju profinjnjem digitalnih modela te da se srednjak i rms-vrijednosti razlika zadržavaju unutar 0,5 mgala. Razlike metoda korelirane su s DMR, ali i s vertikalnim gradijentom gustoće, što će postati mnogo jasnije u drugom ciklusu numeričkih eksperimenata. Na slici 6-2 pozitivne vrijednosti razlika FFT4-NI4 zatvorene su izolinijom.

Tablica 6-2 i slika 6-2. Usporedba NI4 i FFT4 uz $\rho_{PT} = const.$ i $d_{PT} = const.$

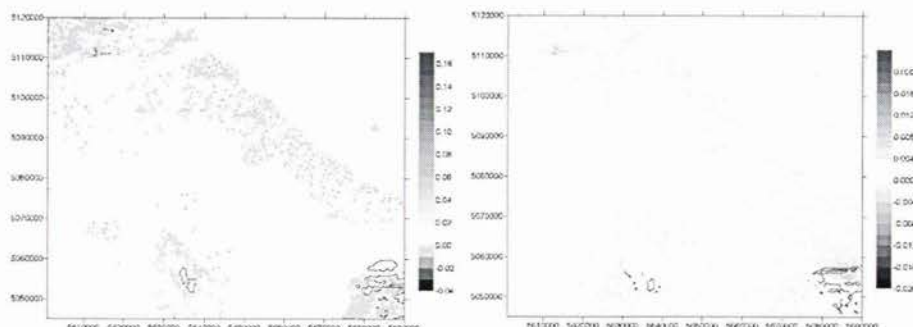
Δg [mgal]	FFT4 - NI4	
	Δ [km]	
	0,5	1,0
maks.	0,069	0,048
min.	-1,148	-0,799
sred.	-0,012	-0,012
rms	0,046	0,049
st. dev.	0,044	0,047



Da bismo kod metoda NI4 i FFT4 izolirali doprinos pretpostavljenog modela gustoće, istražiti ćemo odnos s korekcijama reljefa tab. 5-4 iz rada (Brkić i Bašić 2000). Tablica 6-3 pokazuje u slučaju glatkog horizonta PT vrlo malu razliku korekcija reljefa, a slika 6-3 dominantnu korelaciju s DMR. Područja pozitivnih vrijednosti razmatranih razlika istaknuta su na slici 6-3 izolinijama.

Tablica 6-3. Usporedba NI4 i FFT4 te-a s $\rho_{PT} = const.$, $d_{PT} = const.$, s NI1 i FFT2.

Δg [mgal]	NI4 - NI1		FFT4 - FFT2	
	D [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	0,155	0,096	0,023	0,012
min.	-0,030	-0,027	-0,020	-0,012
sred.	0,000	0,001	0,000	0,000
rms	0,003	0,003	0,001	0,001
st. dev.	0,003	0,003	0,001	0,001

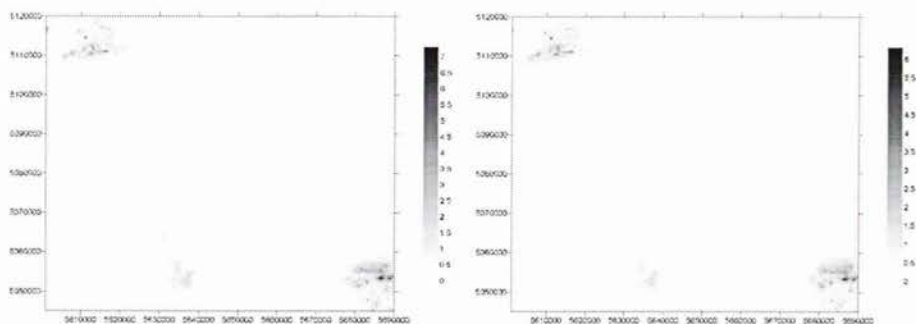


Slika 6-3. *Tc-razlike NI4 i NI1 (lijevo), FFT4 i FFT2 (desno). Inkrement 0,5 km.*

Prvi ciklus računanja pokazao je da pri računanju korekcije reljefa doprinos pretpostavljenog prostornog modela gustoće postaje zamjetljiv već u slučaju glatkog podzemnog horizonta, posebice kod metode prostorne domene NI4. Sljedeći ciklus (tablica 6-4 i slika 6-4) uključuje kompletne DMPTD i DMPTG u računanje.

Tablica 6-4. *Korekcija reljefa metodama NI4 i FFT4 uz $\rho_{PT} \neq const.$, $d_{PT} \neq const.$*

Δg [mgal]	NI4		FFT4	
	Δ [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	7,163	4,111	6,157	3,435
min.	0,001	0,001	0,001	0,001
sred.	0,111	0,093	0,100	0,082
rms	$\pm 0,323$	$\pm 0,275$	$\pm 0,282$	$\pm 0,231$
st. dev.	$\pm 0,304$	$\pm 0,259$	$\pm 0,263$	$\pm 0,215$



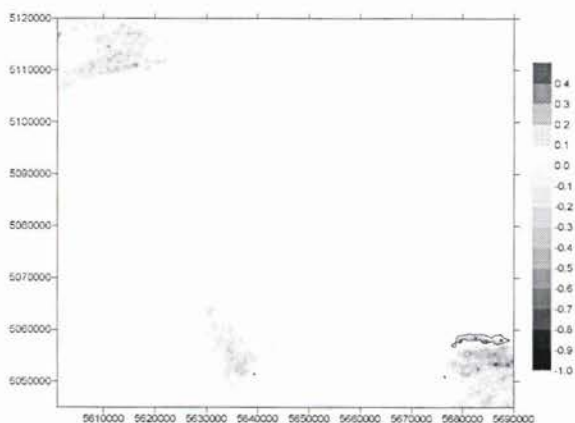
Slika 6-4. *Tc-metode NI4 i FFT4 uz $\rho_{PT} \neq const.$, $d_{PT} \neq const.$ Inkrement 0,5 km.*

Usporedimo u sljedećoj tablici FFT4 i NI4 tc-rješenja jednakih inkremenata. Dok je rang razlika uporabom pravih PT digitalnih modela porastao, srednje vrijednosti i rms-razlike slične su onima u tablici 6-2. Uočimo, u odnosu na prethodni ciklus, porast iznosa i jasnu distinkciju pozitivnih vrijednosti razlika vezanih uz vertikalni gradijent gustoće, na slici 6-5 istaknutih crtama izolinja.

Iz slike možemo zaključiti i da je jedna od korištenih metoda znatno osjetljivija na formulaciju modela gustoće. Da je to metoda NI4, vidljivo je već iz tablice 6-3. Uvođenjem DMPTD i DMPTG bit će razlike redefiniranih i metoda s modelom površinskih gustoća naglašeno pojačane upravo kod metoda prostorne domene. To se vidi u tablici 6-6 i lijevom dijelu slike 6-6, gdje se posebno jasno ocrtavaju obrisi vertikalnoga gradijenta gustoće. I na toj su slici pozitivne vrijednosti razmatranih razlika istaknute crtama izolinja. Budući da utjecaj pretpostavljenog prostornog modela gustoće može iznositi i do 0,5 mgala, još jednom valja naglasiti važnost pouzdanosti ulaznih digitalnih modela u proračun tc-a.

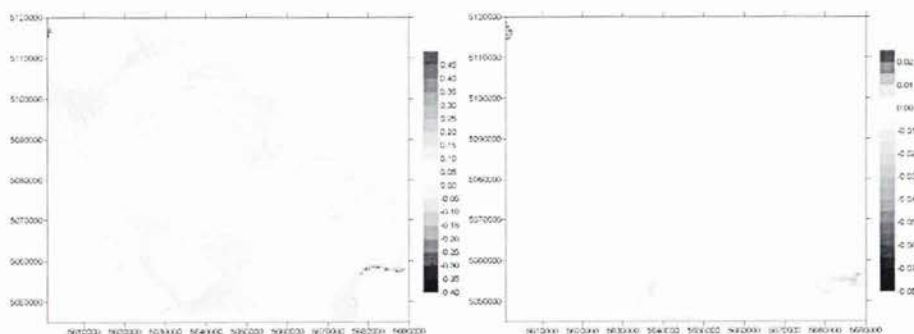
Tablica 6-5 i slika 6-5. Usporedba metoda FFT4 i NI4 uz $\rho_{PT} \neq const.$, $d_{PT} \neq const.$

Δg [mgal]	FFT4 - NI4	
	Δ [km]	
	0,5	1,0
maks.	0,432	0,410
min.	-1,006	-0,730
sred.	-0,011	-0,011
rms	0,047	0,049
st. dev.	0,045	0,048



Tablica 6-6. Usporedba NI4 i FFT4 tc -a uz $\rho_{PT} \neq const.$ i $d_{PT} \neq const.$, s NI1 i FFT2.

Δg [mgal]	NI4 – NI1		FFT4 – FFT2	
	Δ [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	0,476	0,128	0,021	0,005
min.	-0,384	-0,362	-0,078	-0,034
sred.	-0,001	-0,001	0,000	0,000
rms	0,009	0,009	0,001	0,001
st. dev.	0,009	0,009	0,001	0,001



Slika 6-6. Usporedba NI4 i NI1 (lijevo) te FFT4 i FFT2 (desno). Inkrement 0,5 km.

7. Zaključak

Temeljna je svrha ovoga rada uvođenje prostornog modela gustoće u proračun korekcije reljefa. Predložena jednostavna, linearna funkcija gustoće ugrađena je u definiciju korekcije reljefa, u prostornoj te posebno u spektralnoj domeni. Doprinos pretpostavljenoga prostornog modela gustoće u korekciji reljefa dobivenoj egzaktnom numeričkom integracijom NI4, odnosno kvadratičnom aproksimacijom FFT4, procijenjen je usporedbom s rezultatima egzaktne numeričke integracije NI1, odnosno kvadratične aproksimacije FFT2, opisanim u (Brkić i Bašić 2000). Budući da se rms-vrijednosti doprinosa kreću unutar 0,5 mgala, možemo zaključiti da NI4 i FFT4 mogu biti korišteni prilikom rješavanja problema graničnih vrijednosti fizikalne geodije. Prema tome, temeljna svrha ovog rada može se smatrati ispunjenom.

Potom je trebalo razmotriti u kakvom odnosu stoje metode NI4 i FFT4. Stoga je kao 'referentno' tc -rješenje definirano ono dobiveno metodom NI4 uz korištenje digitalnih modela s inkrementom 0,5 km. Pronađeno je da najmanje odstupanje FFT4 od referentnog tc -rješenja nastupa uporabom 0,5 km digitalnih modela. Iako to odstupanje može u ekstremnim vrijednostima biti veliko i značajno, uporaba

FFT4 kao zamjenske metode za NI4 prihvatljivo je budući da su rms-točnosti unutar $\pm 0,5$ mgala.

U računanjima su, osim digitalnih modela visina i površinskih gustoća, korišteni i digitalni modeli dubina i gustoća PT baze sedimenata. Da bi se istražila osjetljivost formulacije korekcije reljefa na varijabilnost PT-horizonta, provedena su dva ciklusa računanja. Prvi, u kojem se pretpostavio 'gladak' PT horizont, aproksimiran srednjim vrijednostima dubina i gustoća, te drugi, gdje su korišteni kompletni PT digitalni modeli. Iako to u ovom radu nije pokazano, iznosi najvećih razlika FFT4 i NI4 tc-a prvog i drugog ciklusa manji su od 0,08 mgala, uz rms oko $\pm 0,002$ mgala.

To ipak ne znači da ta nova tc-formulacija 'trpi' i uporabu ne previše realističnih digitalnih modela. Nerealističnost podataka, numerička nestabilnost pretpostavljenog modela gustoće (u slučaju bliskosti površine i horizonata) te, dodatno, nekonzistentnost podataka mogu rezultirati u umjetno visokim vrijednostima i promjenama vertikalnoga gradijenta gustoće, čiju je strukturu dalje moguće pratiti u tc-rješenjima i usporedbama. To je posebno jasno uočljivo kod metode prostorne domene: metoda NI4 daleko je osjetljivija nego FFT4 na aktualnu formulaciju modela gustoće. Moglo bi se pokazati da ovisno o kontaminaciji pogreškama, NI4 daje nerealistično visoka, pa čak i u potpunosti razorena tc-rješenja.

Vežano uz učinkovitost razmatranih metoda prostorne i spektralne domene, valja ponajprije istaknuti značajan napor u slučaju računanja tc-a metodom NI4. Na računaru HP Vectra VL egzaktna numerička integracija NI4 za odabrano test-područje i inkremente 1 i 0,5 km traje 0,68 h i 9,67 h, što je približno dvostruko duže nego u slučaju numeričke integracije NI1, korištene u (Brkić i Bašić 2000). Upravo zbog vremenske neučinkovitosti metode NI4, nije bilo moguće provesti računanja za one inkremente ulaznih mreža od kojih bi se očekivala najtočnija tc-rješenja. S druge strane, znatne vremenske uštede mogu proizaći uporabom metode FFT4: proračuni tada traju samo 4,56 i 23,99 sekunde, što potvrđuje neusporedivu učinkovitost spektralnih metoda.

ZAHVALA. Na plodnim razgovorima te ustupljenim digitalnim modelima zahvalan sam prof. dr. sc. Tomislavu Bašiću, dekanu Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Literatura:

- Brkić M., Bašić, T. (2000): Računanje korekcije reljefa u prostornoj i spektralnoj domeni, *Geodetski list*, 4, 259–273.
- Brkić M., Bašić, T. (1997): Three Layer Earth's Crust Approximation in Topographic Reductions: a Theory and Practice, *Annales Geophysicae, XXII European Geophysical Society General Assembly*, Beč.
- Čolić, K., Bašić, T., Pribičević, B., Medak, D. (1996): A geodetic gravimetric method for better modelling of geological structures in the test area of the Croatia, *Geologica Croatia*, 49/2, 211–215.
- Tziavos, I. N. (1993): Numerical Considerations of FFT Methods in Gravity Field Modelling, *Report Nr.188, Wissenschaftliche arbeiten der fachrichtung vermessungswesen der Universität Hannover*.

Terrain Correction by Means of Spatial Density Model

ABSTRACT. Simple, linear density function was implemented in the planar terrain correction (tc) approximation. The methods of exact numerical integration and Fast Fourier Transform for the tc quadratic approximation were redefined to include, besides height and surface density digital models, the subsurface horizon's depth and density digital models as well, in our case the horizon being PT base of the sediments. In accordance to this, the terrain correction was computed for various fineness of the digital models in the chosen area of the Republic of Croatia. The redefined methods were compared with numerical integration and FFT methods in which only surface variable density model was utilized. The relationship of the redefined spatial and spectral domain methods was investigated, as well as their sensitivity to the chosen density model. Superior time efficiency of the FFT was confirmed. It was shown that the terrain correction with proposed spatial density model can be used in practice in solving physical geodesy problems.

Key Words: terrain correction, density model, numerical integration, FFT

Primljeno: 2000-11-21