

UDK 528.21:528.221:550.347.62  
Izvorni znanstveni članak

# Utjecaj gustoće pripovršinskih masa Zemljine kore na geoidne undulacije

Boško PRIBIČEVIĆ, Damir MEDAK – Zagreb\*

Autori posvećuju rad uspomeni na akademika Petra Krešimira Čolića.

*SAŽETAK.* Razvojem GPS-tehnologije sve je jednostavnije odrediti elipsoidne, geometrijske visine točaka na površini Zemlje. Poznavanje točnih vrijednosti geoidnih undulacija omogućuje jednostavan prijelaz s geometrijskog modela na fizikalnu stvarnost, tj. izračunavanje ortometrijskih odnosno normalno-ortometrijskih visina iz elipsoidnih visina. Pri dosadašnjim računanjima plohe geoida obično je zanemarivan utjecaj gustoće pripovršinskih masa. Najčešći razlog bili su neadekvatni modeli gustoće, te procjena da gustoća neće bitno promijeniti rezultat računanja. U ovome članku na primjeru određivanja plohe geoida lokalnoga karaktera za područje Grada Zagreba pokazuje se da detaljni digitalni model gustoće znatno pridonosi kvaliteti rješenja plohe geoida. Ta je hipoteza potvrđena, dijelom i zbog toga što je točnost određivanja plohe geoida povećana toliko da su razlike u rješenjima s obzirom na utjecaj gustoće i bez obzira na gustoću postale signifikantne. Unapređenje točnosti plohe geoida bilo je moguće uzimanjem u obzir novih mjerenja, rezultati kojih se ovdje prvi put objavljuju, iz čega su proistekle nove znanstvene spoznaje.

*Ključne riječi:* geoid, digitalni model gustoće, fizikalna geodezija

## 1. Uvod

Brz razvoj geometrijskih metoda u geodeziji omogućio je znatno povećanje efikasnosti i točnosti pojedinih mjernih postupaka. Zahvaljujući GPS-tehnologiji, određivanje trodimenzionalnih koordinata pojedinačnih točaka s centimetarskom točnošću u jedinstvenom globalnom koordinatnom sustavu postaje rutinski, svakodnevni zadatak. Ranije metode triangulacije i trilateracije postali su prošlost, kao i potreba za oslanjanjem na polje stalnih točaka stare triangulacijske mreže dvojbene apsolutne točnosti.

Međutim, visine određene GPS-om odnose se na geometrijsku plohu elipsoida WGS84, dok su za praktične primjene potrebne visine koje se odnose na fizikalno

\*Dr. sc. Boško Pribičević i doc. dr. sc. Damir Medak, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb.

definiranu plohu. Takvu ekvipotencijalnu plohu koja najbolje aproksimira srednju razinu svjetskih mora Listing je još 1873. godine nazvao nazvao geoidom. Razlika između geometrijskih i fizikalnih visina, koja se naziva geoidnom undulacijom, može globalno dosegnuti i 100 m, dok je na području Hrvatske između 40 i 50 m. Kada bi točne vrijednosti geoidnih undulacija bile poznate s centimetarskom točnošću, bilo bi moguće i skupe radove preciznog nivelmana zamijeniti GPS-tehnologijom. Pri određivanju transformacijskih parametara između različitih datuma također se moraju uzeti u obzir geoidne undulacije, posebice u slučaju prijelaza između dva elipsoida bitno različitih dimenzija i položaja u prostoru, kao što je slučaj s Besselovim i WGS84-elipsoidom. Zbog toga geodetska znanost desetljećima ulaže goleme napore u istraživanje najpogodnijih metoda računanja modela plohe geoida.

Prema protezanju modela razlikuju se globalni, regionalni i lokalni geoidi. U ovom radu opisan je postupak računanja lokalnog geoida za jedno ograničeno područje protezanja 40 km × 40 km, za koje je na raspolaganju bio doista velik broj raznovrsnih geodetskih mjerenja. Raniji radovi na određivanju plohe geoida u Republici Hrvatskoj, a posebno u predmetnom području Grada Zagreba prikazani su u drugom poglavlju. Sažeto objašnjenje primijenjene metodologije – kolokacije po metodi najmanjih kvadrata u postupku remove-restore – dano je u trećem poglavlju. Podrijetlo, protezanje i točnost korištenih geodetskih mjerenja, te novo kombinirano rješenje plohe geoida Grada Zagreba, zajedno s usporedbom rješenja uz korištenje i bez korištenja gustoće pripovršinskih masa opisano je u četvrtom poglavlju. Rad završava zaključkom i pregledom budućih istraživanja.

## 2. Prethodni radovi

Syeobuhvatan pregled istraživanja plohe geoida u Hrvatskoj i Sloveniji dan je u (Čolić i dr. 1993). Primijenjena metodologija oslanjala se uglavnom na iskustva kolega iz Austrije. Valja istaknuti da su se početkom 1990-ih godina, u nedostatku kvalitetne računalne opreme, i sama računanja izvodila na Tehničkom sveučilištu u Grazu. Dugogodišnji ciljani istraživački radovi, posebno na progušćenju polja geoidnih točaka, omogućili su sukcesivna poboljšanja rješenja plohe geoida za područje Hrvatske (Čolić i dr. 1994), (Bašić i dr. 1995).

Mjerenja elipsoidne visine na nivelmanskim reperima omogućila su povezivanje modela plohe geoida, a time posredno i službenog visinskog sustava, s odabranim elipsoidom, pa je tako nedavno izračunan i novi, zahvaljujući brojnim podacima vrlo točni geoid za područje Republike Slovenije (Pribičević 2000).

Određivanje plohe geoida za područje Grada Zagreba izveo je istraživački tim akademika Krešimira Čolića u sklopu velikog projekta "GPS-mreža Grada Zagreba" (Čolić i dr. 1998a). Za šire područje Grada Zagreba tom je prilikom izmjerena i izjednačena temeljna GPS-mreža iznimne točnosti, te homogeno polje s ukupno 4250 GPS-točaka. Tako je bilo potpuno opravdano i računanje plohe centimetarskoga geoida za isto područje (Čolić i dr. 1998b). Dobiveno rješenje, nastalo na temelju 10 GPS/nivelmanskih točaka i 22 geoidne točke, imalo je unutrašnju točnost geoidnih undulacija od 10 do 15 mm unutar granica Grada Zagreba.

### 3. Metodologija: kolokacija u postupku remove-restore

Kolokacija metodom najmanjih kvadrata postupak je optimalne kombinacije geodetskih podataka različitih vrsta, različite točnosti i rasporeda za određivanje Zemljina oblika i gravitacijskog polja (Moritz 1988). Uobičajeni postupak izjednačenja po metodi najmanjih kvadrata nije moguće primijeniti, jer je zbog nepravilnosti gravitacijskog polja broj nepoznanica koje treba odrediti jako velik.

#### 3.1. Uklanjanje utjecaja masa i dugovalnih utjecaja (remove postupak)

Geodetska se mjerenja gotovo uvijek odnose na točke na Zemljinoj površini. Ako se kolokacijom trebaju odrediti vrijednosti geoidnih undulacija, sva je mjerenja potrebno reducirati na plohu geoida. Utjecaj topoizostatskih masa uklanja se topoizostatskom redukcijom, npr. uz pomoć kompjutorskog programa TC (Forsberg 1984). Dugovalni utjecaj globalnoga geopotencijalnog modela također se može izračunati, npr. uz pomoć programa GeopHarm – GEOpotential from spherical HARMonics, (Abd-Elmotaal 1998). Tako dobivene reducirane vrijednosti mjerenja pogodno su "izgladene" za kolokaciju (Čolić 1998).

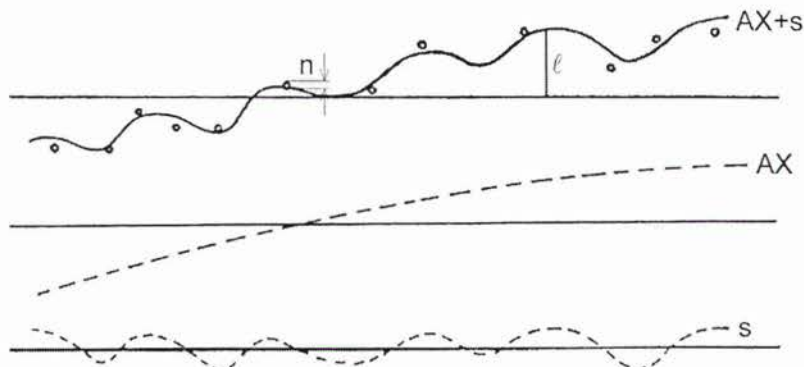
#### 3.2. Kolokacija po najmanjim kvadratima

Kolokacijska jednadžba mjerene vrijednosti  $l$  (vidi sliku 1) u matričnom obliku ima oblik:

$$l = AX + s + n \quad (1)$$

pri čemu je:

- AX funkcionalni ili sistematski dio u linearnom ili lineariziranom obliku,
- s vektor stohastičkih veličina koja u fizikalnoj geodeziji obilježava utjecaj poremećajnoga gravitacijskog polja  $T$  na mjerenja  $l$  ("signal"),
- n vektor stohastičkih veličina koja označuje utjecaj slučajnih pogrešaka mjerenja ("noise" – šum).



Slika 1. Osnovni model kolokacije: signal ( $s$ ), sistematski utjecaj ( $AX$ ), mjerenja ( $l$ ) i šum ( $n$ ), prema (Moritz 1989).

Ako na prethodnu formulu primijenimo uopćeno načelo najmanjih kvadrata:

$$s^T C^{-1} s + n^T D^{-1} n = \text{minimum} \quad (2)$$

dolazimo do rješenja:

$$X = (A^T C_{ll}^{-1} A)^{-1} A^T C_{ll}^{-1} l \quad (3)$$

$$s = C_{sl} C_{ll}^{-1} (l - AX) \quad (4)$$

gdje je:

$$C_{ll} = C + D \quad (5)$$

i označava ukupnu kovarijancnu matricu, koja se sastoji iz kovarijancne matrice  $C$  signala  $s$  i kovarijanc matrice  $D$  slučajnih pogrešaka  $n$ ; dok je  $C_{sl}$  matrica kovarijanci između signala  $s$  i mjerenja  $l$ .

Kolokaciju je u geodeziji moguće primijeniti u najrazličitije svrhe: obradu podataka opažanja umjetnih Zemljinih satelita, transformacije između koordinatnih sustava u geodeziji i fotogrametriji, modeliranja pogreške nanošenja podjele na limb teodolita (Moritz 1989). Ipak, osnovnu primjenu nalazi kolokacija u fizikalnoj geodeziji, i to za predikciju anomalija ubrzanja sile teže i geoidnih undulacija.

Otkloni vertikalne i anomalije slobodnog zraka povezani su s nepoznatim, poremećajnim potencijalom  $T$  sljedećim izrazima:

$$\xi = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6)$$

$$\eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (7)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{R} T \quad (8)$$

Formule 6, 7 i 8 označuju sfernu aproksimaciju u kojoj je  $R=6371$  km, dok je  $xyz$  lokalni koordinatni sustav u kojem je os  $z$  vertikalna i pozitivna prema zenitu, a os  $x$  usmjerena prema sjeveru (Moritz 1983). Primijeni li se teorija kolokacije na prethodne izraze, koji su u stvari linearne funkcije, rezultat će biti prediicirane geoidne undulacije svedene na plovu geoida. Na kraju je još potrebno "vratiti" u prethodnom koraku odbijeni utjecaj masa kako bi se dobivene geoidne undulacije odnosile na odabrani elipsoid.

### 3.3. Vraćanje utjecaja masa (restore – postupak)

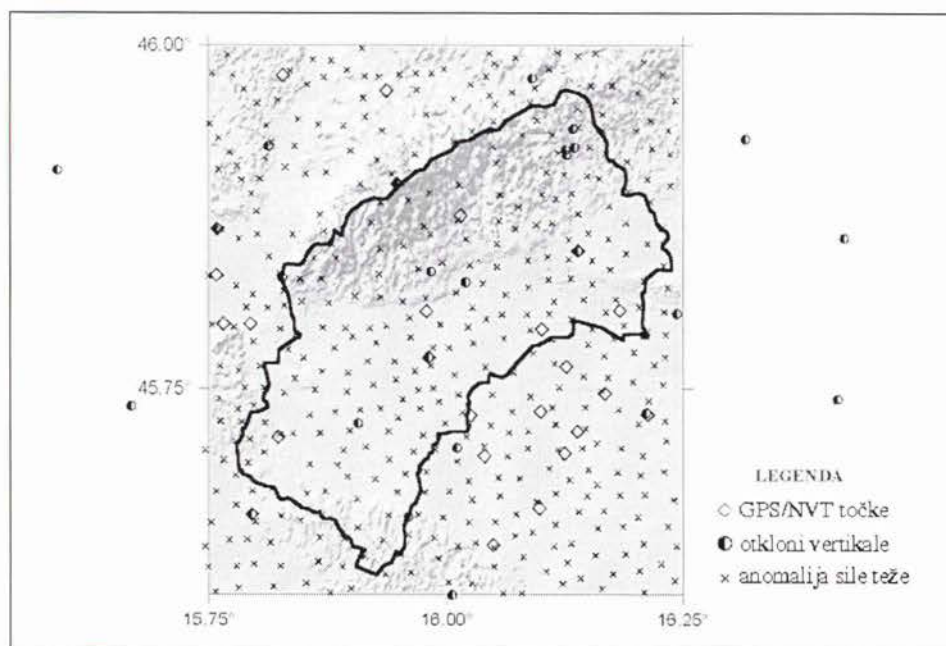
Nakon što se postupkom kolokacije po najmanjim kvadratima izračunaju vrijednosti geoidnih undulacija u točkama predikcije, u istim se točkama izračunaju efekti globalnoga geopotencijalnog modela (u ovom slučaju EGM96), kao i topoizostatski

utjecaji (uz pomoć programa TC), koji se ovaj put dodaju sa suprotnim predznakom. Tako se vrijednosti izračunane na plohi geoida "vraćaju" na fizičku površinu Zemlje. Postupak računanja geoidnih undulacija time završava.

## 4. Računanje plohe geoida za područje grada Zagreba

### 4.1. Prikupljeni podaci

U predmetnim istraživanjima korišteni su rezultati raznovrsnih geodetskih mjerenja u digitalnom obliku: otkloni vertikale, anomalije slobodnog zraka te GPS/nivelmanski podaci. Osim toga iskorištene su datoteke digitalnih modela reljefa i gustoće različite razlučivosti, te Zemljin globalni geopotencijalni model EGM96.

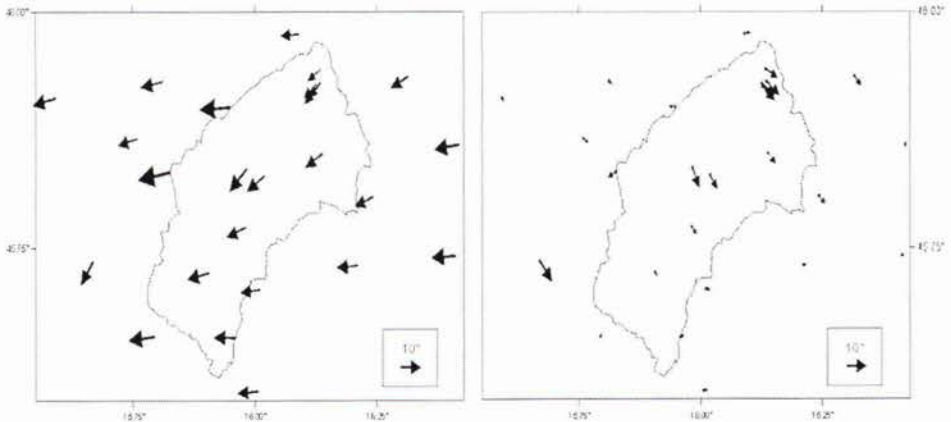


Slika 2. Prikaz digitalnog modela reljefa predmetnog područja s prostornim rasporedom mjerenja: otklona vertikale, GPS/nivelmanskih točaka i anomalija slobodnog zraka. Crna linija prikazuje administrativnu granicu Grada Zagreba.

#### 4.1.1. Otkloni vertikale

Za takvo određivanje plohe geoida uzeto je u obzir 25 geoidnih točaka s mjerenim astronomskim koordinatama. Točnost astronomskih koordinata dobivenih na temelju mjerenja u dvije sesije iznosi prosječno  $\pm 0,5''$  za astronomsku širinu  $\varphi$ , te  $\pm 0,75''$  za astronomsku duljinu  $\lambda$ . Geodetske koordinate tih točaka transformirane su u sustav ETRS89, odnosno u njemu vrlo bliski GRS80 koristeći Helmertovu sedam-para-

metarsku transformaciju s potpuno zadovoljavajućom točnošću za predmetnu svrhu. Zatim su izračunane komponente otklona vertikale  $\xi$  i  $\eta$  u apsolutnoj orijentaciji. Na slici 3 prikazani su vektori otklona vertikale u relativnoj i apsolutnoj orijentaciji. Posljedice loše orijentacije još uvijek službenoga koordinatnog sustava koji se oslanja na Besselov elipsoid, posebno u komponenti  $\eta$ , jasno su vidljive.



Slika 3. Otkloni vertikale u odnosu na Besselov elipsoid (lijevo) i otkloni vertikale u odnosu na GRS80 (desno). Referentna veličina totalnog otklona vertikale od  $10''$  prikazana je u donjem desnom kutu slike.

#### 4.1.2. Anomalije slobodnog zraka

Za potrebe računanja kombiniranog rješenja plohe geoida korištena je novoformirana datoteka točkastih vrijednosti ubrzanja sile teže, preračunanih u anomalije slobodnog zraka ( $\Delta g$ ). Originalna mjerenja su vezana na svjetsku standardnu gravimetrijsku mrežu IGSN 1971 (Grašić 1976). Raspored gravimetrijskih mjerenja u predmetnom području računanja vrlo je povoljan (vidi sliku 2). Normalna vrijednost ubrzanja sile teže izračunata je u odnosu na elipsoid GRS80. Ukupno je korišteno 420 vrijednosti anomalija slobodnog zraka s *a priori* ocjenom točnosti od  $\pm 5$  mgala. Ovakva ocjena točnosti je vrlo konzervativna s obzirom na točnost mjerenih relativnih vrijednosti ubrzanja sile teže, ali je uzeta kao takva prvenstveno zbog lošije točnosti određivanja položaja točaka, a time i pripadajućih redukcija.

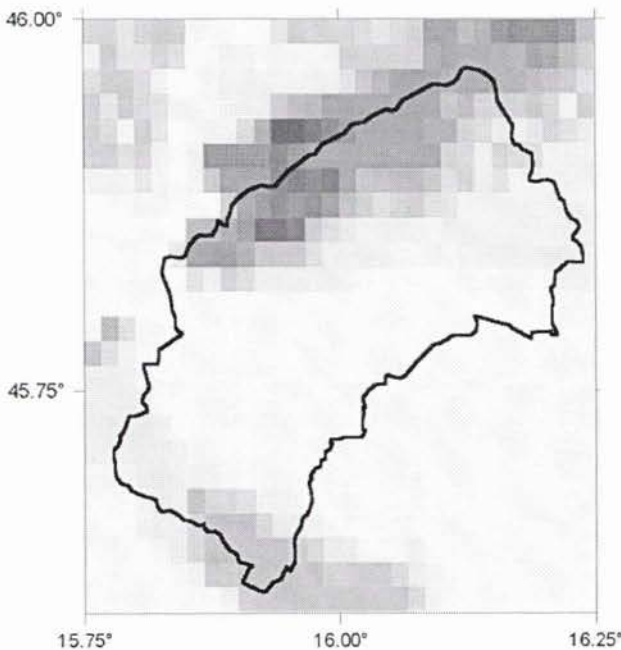
#### 4.1.3. GPS/nivelmanske točke

Na većem broju repera nivelmanskih vlakova koji prolaze promatranim područjem određene su GPS-mjerenjima i elipsoidne visine ( $h$ ). Takve točke nazivaju se GPS/nivelmanske točke. Kako su za njih poznate visine u službenom visinskom sustavu (normalne ortometrijske visine), može se po jednostavnoj formuli izračunati geoidna undulacija u tim točkama ( $N=h-H$ ), te rezultat iskoristiti kao ulazni podatak za računanje plohe geoida. Posebno je važna uloga GPS/nivelmanskih točaka

za apsolutnu orijentaciju plohe geoida, koja u konačnici biva oslonjena na elipsoid WGS84. Za kombinirano rješenje plohe geoida formirana je datoteka s ukupno 25 GPS/nivelmanskih točaka, koje su relativno povoljno raspoređene po cijelom području računanja. Točke su povezane metodom preciznog nivelmana na repere nivelmanske mreže i za *a priori* ocjenu njihove točnosti je u ovom radu uzeto  $\pm 1\text{cm}$ , što je također vrlo konzervativna procjena s obzirom na točnost mjerenja, a detaljno je opisano u (Čolić 1998).

#### 4.1.4. Digitalni model reljefa

I ovom je prilikom korišten raspoloživi digitalni model reljefa (DMR) u rasteru  $4'' \times 5''$ , koji je uzet za finiji raster, dok je spajanjem tih elemenata u veće s dimenzijama  $60'' \times 75''$  formiran grublji raster. Valja napomenuti da se na predmetnom području visine protežu od 97 m do 1032 m. U modeliranju masa oko točke korišten je fini raster do udaljenosti 5 km od točke mjerenja, a grubi raster do 167 km. Za modeliranje dalekih masa (udaljenih više od 50 km) prizma dobivena iz digitalnog modela reljefa i digitalnog modela gustoće aproksimirana je točkom, na udaljenostima od 6 km do 50 km linijom mase, a do 6 km je modelirana egzatnom formulom za prizmu kako bi se postigla najviša točnost računanja. Obje datoteke digitalnog modela reljefa pokrivaju područje sljedećih dimenzija: po geodetskoj širini od  $44^\circ$  do  $47^\circ$ , po geodetskoj duljini od  $14^\circ$  do  $18^\circ$ .



Slika 4. Prikaz digitalnog modela gustoće za predmetno područje: svjetlija područja predočavaju područja manje gustoće ( $2000 \text{ kg/m}^3$ ), dok najtamnija područja predočavaju područja veće gustoće (maksimalno do  $2800 \text{ kg/m}^3$ ).

#### 4.1.5. Digitalni model gustoće

Korišteni digitalni model gustoće pripovršinskih masa (DMG) zasnovan je na istraživanjima opisanim u (Čolić i dr. 1992), koja su nadopunjena novim podacima iz geološko-geofizičkog profila Medvednice (vidi sliku 4). Tako su nastale dvije vrste rastera: 1'×1' za uže područje računanja i 2,5'×2,5' za šire područje. Da bi se mogli zajednički primijeniti, digitalni model gustoće i digitalni model reljefa moraju biti kompatibilni u razlučivosti i protezanju. Zbog toga je digitalni model gustoće trebalo preračunati u naprijed navedene razlučivosti: finiji raster 4"×5" i grublji raster 60"×75". Uvođenjem tog modela gustoće u računanja plohe geoida postiže se osjetno bolje približenje modela računanja stvarnom stanju u prirodi, što će se poslije i pokazati na numeričkom primjeru.

#### 4.1.6. Globalni geopotencijalni model Zemlje (EGM96)

U radu je korišten geopotencijalni model Zemlje EGM96. Model se sastoji od koeficijentata sfernih harmonijskih funkcija do reda i stupnja 360, a upotrebljava se za računanje dugovalnih struktura Zemljina polja sile teže. Model obuhvaća cijelu Zemlju, a uz svu dostupna terestrička i gravimetrijska mjerenja uključuje i podatke pridobivene od više vrsta satelita. Utjecaj EGM96 računa se korištenjem programa GeopHarm – GEOpotential from spherical HARMonics (Abd-Elmotaal, 1998). Usporedba mjerenih i reduciranih vrijednosti za geoidne undulacije, komponente otklona vertikala i anomalija slobodnog zraka prikazana je u tablici 1. Usporedba aritmetičkih sredina i standardnih devijacija prije i poslije redukcije pokazuje da su reducirane vrijednosti daleko pogodnije centrirane (uglađene) za kolokaciju.

Tablica 1. Pregledni prikaz mjerenih i reduciranih vrijednosti mjerenja korištenih pri računanjima.

	$N_{mjer}$	$N_{red}$	$\xi_{mjer}$	$\xi_{red}$	$\eta_{mjer}$	$\eta_{red}$	$\Delta g_{mjer}$	$\Delta g_{red}$
broj mjerenja	25	25	25	25	25	25	420	420
minimum	44,90	-1,92	-7,94	-2,88	-4,12	-5,10	-4,72	-11,32
maksimum	45,83	-1,53	0,89	0,67	6,43	2,38	112,22	37,48
sredina	45,27	-1,79	-2,49	-0,75	2,35	-0,24	15,10	0,98
stand. dev.	0,22	0,09	2,50	0,96	2,77	2,02	19,31	7,52

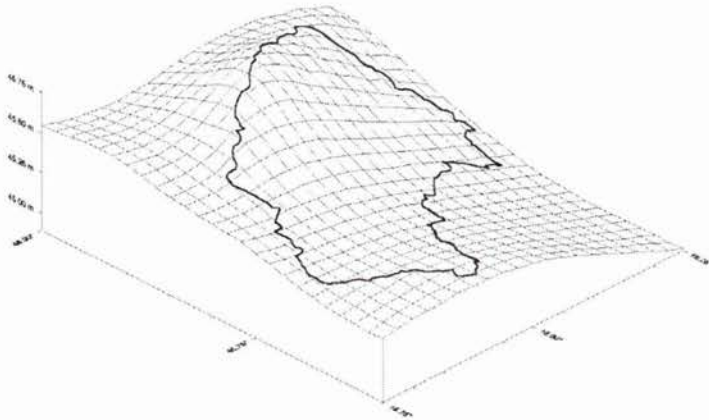
#### 4.2. Novo rješenje plohe geoida za područje Grada Zagreba

Korištenjem svih upravo opisanih mjerenja u postupku remove-restore dobiveno je novo rješenje za plohu geoida širega područja Grada Zagreba. Za topozostatsku redukciju korišten je modificirani Forsbergov program TC, u kojem je izabrana opcija korištenja raspoloživa varijabilnog modela gustoće, a pri čemu je za donju granicu prizmi uzeta konstantna vrijednost dubine Mohorovičićeva diskontinuiteta. Kolokacija je provedena uz pomoć komputorskog programa LSC (Least Squares Collocation) prof. Hansa Sünkela s Tehničkog sveučilišta u Grazu. Geoidne su undulacije iz-

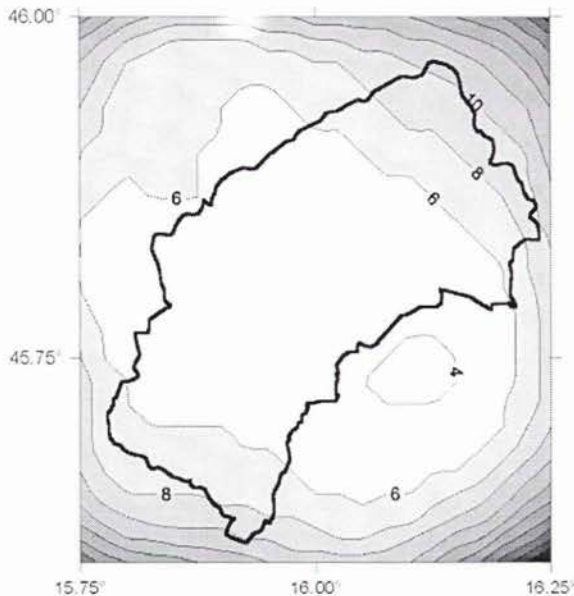


računane za točke u pravilnom rasteru dimenzija elemenata  $1' \times 1,5'$ , što u linearnoj mjeri odgovara  $1850 \text{ m} \times 1950 \text{ m}$ . Trodimenzionalni model plohe geoida prikazan je na slici 5. Korelacija geoida s reljefom predmetnog područja dobro je uočljiva: najviša vrijednost geoidne undulacije odnosi se na vrh Zagrebačke gore (Medvednice).

Slika 6 prikazuje ocjenu točnosti geoida. Srednja pogreška izražena je u milimetrima i za najveći dio područja Grada Zagreba kreće se ispod vrijednosti 6 mm, dok je



Slika 5. Trodimenzionalni prikaz plohe geoida za područje Grada Zagreba (pogled s jugozapadne strane). Visinsko mjerilo je naglašeno povećano.



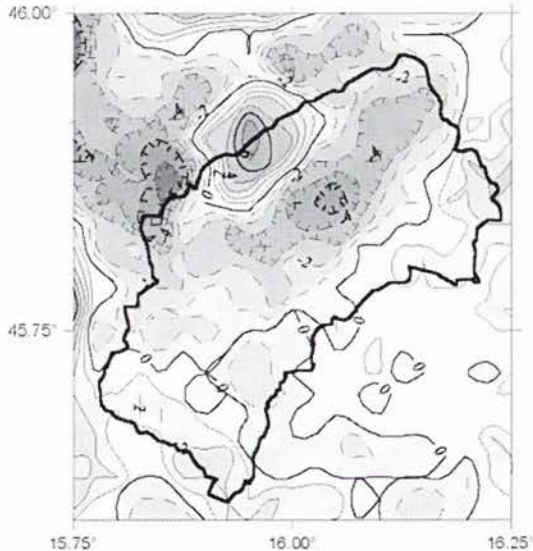
Slika 6. Ocjena točnosti plohe geoida za područje Grada Zagreba (ekvidistanca = 2 mm).

za cijelo područje – izuzimajući zanemarivo malo područje u sjeveroistočnom dijelu – unutar 10 mm, što je veliko poboljšanje u odnosu na ranija rješenja (Čolić i dr. 1998a) i (Čolić i dr. 1998b). U predjelu Velike Gorice točnost je još veća (unutar 4 mm), zahvaljujući većoj koncentraciji GPS/nivelmanskih podataka, ali i mirnijoj topografiji toga područja.

Zahvaljujući dovoljnom broju i povoljnom rasporedu raznovrsnih geodetskih mjerenja postignuta je tako vrlo visoka unutrašnja točnost plohe geoida, koja je teorijski apsolutno orijentirana prema elipsoidu WGS84. Takav model geoida zadovoljava sve praktične potrebe transformacije elipsoidnih visina u normalne ortometrijske visine službenoga visinskog sustava Republike Hrvatske. Vanjska se točnost može utvrditi samo neovisnim mjerenjima (GPS/nivelmanska mjerenja). S obzirom da je u predmetna računanja uključen velik broj dobro raspoređenih GPS/nivelmanskih točaka, za očekivati je da će i takve neovisne kontrole potvrditi visoku vanjsku točnost modela plohe geoida.

### 4.3. Usporedba rješenja s utjecajem digitalnog modela gustoće i bez njega

Nakon računanja plohe geoida prema naprijed opisanoj metodologiji koristeći potpuno identične mjerene veličine i parametre računanja izračunane su ponovno vrijednosti geoidnih undulacija s jedinom razlikom da ovaj put za topoizostatsku redukciju nije korišten varijabilni model gustoće pripovršinskih masa, nego je primijenjena jedinstvena veličina od  $2670 \text{ kg m}^{-3}$ . Potom su izračunane razlike između prije dobivenog rješenja s varijabilnom gustoćom i rješenja s konstantnom gustoćom, te su dobivene razlike prikazane slojnim planom na slici 7.



Slika 7. Prikaz razlika vrijednosti geoidnih undulacija izračunanih s utjecajem i bez utjecaja gustoće pripovršinskih masa (ekvidistanca = 2 mm). Izolinije s negativnim vrijednostima prikazane su isprekidanim linijama i naglašene okomitim crticama, dok su pozitivne vrijednosti prikazane punom linijom.

Za minimalnu i maksimalnu vrijednost razlike dobivene su vrijednosti od  $-7$  mm i  $+8$  mm. Na slici 7 uočljiva je značajna razlika na području Medvednice, gdje se vrijednost mijenja od  $+6$  mm na vrhu do  $-6$  mm u nedalekom podnožju. Iako su apsolutne vrijednosti dobivenih razlika na granici dobivene točnosti geoidnih undulacija za predmetno područje (vidjeti sliku 6), njihov suprotni predznak rezultira rasponom od gotovo 15 mm. Takva je razlika značajan iznos koji pokazuje da je digitalni model gustoće potrebno uzimati u obzir pri lokalnom određivanju geoida. Naime, sasvim je sigurno da je teoretski pravilnije prihvatiti kao bolje ono rješenje kod čijeg su računanja korištena stvarno izvršena mjerenja (u ovom slučaju vrijednosti gustoće pripovršinskih masa Zemljine kore) od rješenja u kojem se uzima konstantna vrijednost nekog parametra.

## 5. Zaključak

U ovom radu opisan je postupak računanja lokalnoga geoida za jedno ograničeno područje protezanja oko  $40$  km  $\times$   $40$  km, za koje je na raspolaganju bio doista velik broj raznovrsnih geodetskih mjerenja. Postignuta je subcentimetarska točnost, koja omogućuje lagano preračunavanje GPS-tehnologijom određenih elipsoidnih visina u pouzdane visine u službenom visinskom sustavu. Poboljšana točnost posljedica je korištenja GPS-nivelmanskih točaka na području izvan granica Grada Zagreba (posebno se to odnosi na područje Velike Gorice), te u još većoj mjeri uključivanjem u računanje podatke za anomalije ubrzanja sile teže ( $\Delta g$ ). Tako je još jednom došla do izražaja svestranost kolokacije kao metode kojom se raznorodna geodetska mjerenja mogu zajednički iskoristiti za optimalno računanje geoidnih undulacija kao jednog od najvažnijih parametara Zemljina polja sile teže.

Uspješno je potvrđena hipoteza da digitalni model gustoće pripovršinskih masa malo, ali značajno utječe na rezultat računanja detaljne plohe geoida. Apsolutne vrijednosti dobivenih razlika između rješenja za koje je uzeta u obzir varijabilna gustoća i rješenja s konstantnom su gustoćom na granici točnosti određivanja geoidnih undulacija, ali pokazuju sustavni trend. Raspon dobivenih razlika više je nego dvostruko veći od postignute točnosti, pa se može zaključiti da pri računanju preciznih geoidnih undulacija u brdovitim područja obavezno treba uzeti u obzir podatke o gustoći pripovršinskih masa Zemljine kore.

Naravno, potrebno je poznavati podrijetlo, metodologiju pridobivanja i točnost podataka o gustoći, a to nije uvijek lako. Interdisciplinarna suradnja sa stručnjacima iz drugih geoznanosti, kako u prikupljanju podataka tako i u interpretaciji dobivenih rezultata, od neprocjenjivog je značenja za budućnost geodezije.

## 6. Buduća istraživanja

Poboljšanje točnosti određivanja plohe geoida neraskidivo je povezano s poboljšanjem kvalitete ulaznih podataka za računanje. Na tom se planu u bliskoj budućnosti očekuju značajni pomaci. Mjerenjima apsolutnog ubrzanja sile teže u Republici Hrvatskoj stvorena je osnova za novu gravimetrijsku izmjeru, koja bi prema svjetским iskustvima trebala omogućiti poboljšanje postojećeg visinskog sustava, za sada oslonjenoga na normalno polje ubrzanja sile teže.

Primjenom GPS-tehnologije, točnost koje se stalno povećava, mogao bi se odrediti veći broj još pouzdanijih GPS/nivelmanskih točaka, te u kombinaciji s anomalijama sile teže ostvariti vrlo točna predikcija geoidnih undulacija. Naravno, poboljšanja se očekuju i na polju digitalnih modela reljefa, a posebnu pozornost valja pokloniti suradnji s geolozima i petrolozima u istraživanju modela gustoće pripovršinskih masa Zemljine kore.

U korisničkom segmentu već sada se javlja potreba za automatskim uključivanjem modela plohe geoida u GPS-softver, kako bi se nadmorske visine još na terenu mogle neposredno odrediti iz GPS-om izmjerenih elipsoidnih visina. U tu svrhu poželjan je i optimalan algoritam za interpolaciju geoidnih undulacija u proizvoljnoj točki.

*ZAHVALA. Autori zahvaljuju Državnoj geodetskoj upravi na dugogodišnjem sufinanciranju znanstveno-stručnih projekata u sklopu kojih su pridobivena brojna mjerenja iskorištena za potrebe predmetnih istraživanja. Posebno se zahvaljujemo Gradskom zavodu za katastar i geodetske poslove Grada Zagreba za podršku u izvođenju projekta GPS-mreža Grada Zagreba, u okviru kojeg je također izračunan prethodni model plohe geoida za područje Grada Zagreba, te Zavodu za fotogrametriju d.d., Zagreb, za ustupljene podatke.*

#### Literatura:

- Abd-Elmotaal, H. (1998): An alternative capable technique for the evaluation of geopotential from spherical harmonic expansions. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, 57, 25–38.
- Bašić, T., Čolić, K., Pribičević, B., Medak, D. (1995): Gravity Field solution for Croatia "CRO 95". *International Union of Geodesy and Geophysics, XXI General Assembly, IAG. G10 Gravity Field Determination*, July 2–14, Boulder, Colorado, GB 11I-13, B32.
- Čolić, K. (1998): GPS-mreža Grada Zagreba. Republička geodetska uprava i Zavod za katastar i geodetske poslove Grada Zagreba, Zagreb.
- Čolić, K., Bašić, T., Petrović, S., Pribičević, B., Ratkajec, M. (1993): Istraživanje Zemljinog polja sile teže u Hrvatskoj i Sloveniji (1975–1992). *Zbornik Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu u povodu 30. obljetnice samostalnog djelovanja 1962–1992*, (L. Feil, ur.), Zagreb, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 123–136.
- Čolić, K., Bašić, T., Pribičević, B., Medak, D. (1994): Gravity Field Determination in Croatia – Status Report. *Joint IAG – Symposium "Gravity and Geoid" of the International Gravity Commission and International Geoid Commission*, (H. Sünkel, ur.), 11–17 September 1994, Graz, Springer Verlag, Berlin, 647–653.
- Čolić, K., Pribičević, B., Ratkajec, M., Stopar, R., Šumanovac, F., Velić, J. (1992): Početni digitalni model gustoće pripovršinskih masa Zemljine kore u test-području "Slovenija i okolni dio Hrvatske" za regionalne potrebe fizikalne geodezije. *Geodetski list*, 46(69), 2, 263–281.
- Čolić, K., Pribičević, B., Švehla, D. (1998a): 3D-Geodynamic Network of Broader Area of the City of Zagreb. *Geodynamics of Alps-Adria Area by means of Terrestrial and Sa-*

- tellite Methods*, (K. Čolić and H. Moritz, ur.), September 28 – October 2, 1998, Dubrovnik, Faculty of Geodesy, University of Zagreb and State Geodetic Administration of the Republic of Croatia, 63–74.
- Čolić, K., Pribičević, B., Švehla, D. (1998b): First cm-Geoid in The Republic of Croatia – The Capital City Zagreb Pilot Project. *Second Continental Workshop on the Geoid in Europe*, (M. Vermeer and J. Adam, ur.), March 10 – 14, Budapest, Reports of the Finnish Geodetic Institute, Vol. 98:4, 245–249.
- Forsberg, R. (1984): A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling. Department of Geodetic Science, Report 355, Ohio State University.
- Grašić, M. (1976): Međunarodna standardna gravimetrijska mreža 1971 i naša osnovna gravimetrijska mjerenja. *Simpozij o osnovnim geodetskim radovima u Jugoslaviji*, (P. Jovanović, ur.), Hercegnovi, SGIGJ, 136–147.
- Moritz, H. (1983): Theorie der lokalen Geoidbestimmung. *Das Geoid in Österreich*, (H. Lichtenegger, K. Rinner, and H. Sünkel, ur.), Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz, 21–48.
- Moritz, H. (1988): Kolokacija metodom najmanjih kvadrata. *Geodetski list*, 42 (65), 4–6, 97–102.
- Moritz, H. (1989): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
- Pribičević, B. (2000): Uporaba geološko-geofizičnih in geodetskih baz podatkov za računanje ploskve geoida Republike Slovenije. Doktorska disertacija, Fakulteta za gradbeništvo in geodeziju, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

## Impact of the Surface Rock Density on Geoid Undulations

**ABSTRACT.** GPS-technology provides efficient and accurate determination of ellipsoidal, geometrical heights of the points on the Earth's surface. Knowledge of accurate geoid undulations allows for simple transformation from the geometrical model to the physical reality, i.e. calculation of orthometric or normal-orthometric heights from ellipsoidal heights. The impact of surface rock density was usually negligible in determination of geoid undulations. The reason behind was inadequacy of density models and the estimation that the result of calculation shall be practically the same as the result without using the density model. This paper shows that a detailed digital model of density improves the quality of solution for the model of the geoid, whereas the area of the City of Zagreb was used as the running example. The hypothesis was proven, partly because the accuracy of the geoid determination was improved to such extent that previously neglected differences became significant. This improvement was possible because new measurements were used and the results obtained are presented for the first time in this paper, yielding new scientific insight.

**Keywords:** geoid, digital density models, physical geodesy

*Primljeno:* 2000-12-27