

UDK 528:551.43(497.5):517.3/4
Izvorni znanstveni članak

Računanje korekcije reljefa u prostornoj i spektralnoj domeni

Mario BRKIĆ, Tomislav BAŠIĆ – Zagreb*

SAŽETAK. Primjenom metoda numeričke integracije i Fast Fourier Transforma na digitalne modele visina i gustoća, izračunana je korekcija reljefa (tc) za odabrano područje Republike Hrvatske. Pri tom je posebna pozornost posvećena ispunjenju zahtjeva samih metoda. Razmatran je utjecaj broja članova razvoja u red ravninske aproksimacije korekcije reljefa. Također je pronađen nezanemariv utjecaj uključenja digitalnog modela površinskih gustoća na tc -rješenje. Usporedbom metoda potvrđena je zadovoljavajuća kvaliteta i nadmoćna učinkovitost metoda spektralne domene.

Ključne riječi: korekcija reljefa, numerička integracija, spektralne metode, FFT.

1. Uvod

U rješavanju problema fizikalne geodezije vezanih uz Zemljino polje sile teže uobičajeno se koriste mjerenja ubrzanja sile teže. Ta se opažanja, kao što je poznato, izvode u diskretnim točkama na fizičkoj površini Zemlje. Međutim, rješenja problema fizikalne geodezije obično su dana za ekvipotencijalnu plohu Zemljina polja sile teže, kao što je primjerice geoid (vidi npr. Bašić i dr. 1998). Time ulazimo u područje problema vezanih uz graničnu plohu, npr. geoida, tzv. *Problema graničnih vrijednosti* (engl. *Boundary Value Problems, BVP*).

Rješenje geodetskog BVP-problema predikcije undulacija geoida iz mjerenja ubrzanja sile teže moguće je pronaći uporabom dobro poznate klasične Stokesove teorije ili kompliciranije moderne teorije Molodenskoga (za daljnje reference i pregled tih teorija čitatelj se upućuje npr. na Tziavos 1993).

Neizravna spona spomenutoga klasičnog i modernog pristupa, tj. Stokesove integralne formule i Molodenskijevе jednadžbe, jest klasična korekcija ubrzanja sile teže radi reljefa (engl. *terrain correction*). Korekcija reljefa također se koristi pri

* Mr.sc. Mario Brkić, Institut za obrambene studije, istraživanje i razvoj, MORH, Bijenička 46, Zagreb.
Prof.dr.sc. Tomislav Bašić, Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb.

određivanju redukcija reljefa, važnih poradi glačanja podataka sile teže, bilo s pretpostavkom ili bez pretpostavke o površinskoj varijabilnosti gustoća (Forsberg 1984), ali i pri numeričkoj evaluaciji geodetskih *BVP-a* kod jako varijabilnog reljefa (Tziavos 1993).

U slučaju primjene korekcije odnosno redukcija za reljef u modeliranju Zemljina polja sile teže poželjno je poznavati raspodjelu gustoća, barem pri površini Zemlje. Uobičajena pretpostavka prosječne gustoće od 2670 kgm^{-3} prikladna je za kontinent na razini površine mora. Međutim, gustoća raste do vrijednosti približno 2900 kgm^{-3} na dnu kore, zatim skače na 3300 kgm^{-3} na Moho-diskontu i dalje raste kroz plašt. Proizvoljni izbor vrijednosti za gustoću ili prihvaćanje prosječne vrijednosti gustoće uvodi nesigurnosti ili pogreške u računanje korekcije odnosno redukcija za reljef. Utjecaj je tih pogrešaka znatan te je poželjno, ako postoje pouzdani digitalni modeli gustoća, uključiti ih u računanje korekcije i redukcija reljefa (Brkić 1994).

Cilj je ovog rada da se pri računanju korekcije reljefa za odabrano područje Republike Hrvatske usporede rezultati računanja u spektralnoj domeni s onima dobivenima u prostornoj domeni. Naime, uporaba konvencionalnih tehnika računanja korekcije reljefa u prostornoj domeni, primjerice numeričke integracije (NI), vremeniski je vrlo zahtjevna. S druge strane, odgovarajuće formule korekcije reljefa mogu se reformulirati kao integrali konvolucije, koji se mogu učinkovito računati u spektralnoj domeni, primjerice tehnikom *Fast Fourier Transform (FFT)*.

Spektralne su metode tijekom posljednjeg desetljeća široko korištene za različite probleme u fizikalnoj geodeziji, posebice za računanje Stokesova i Vening-Meineszova integrala, Molodenskijeva reda, efekta reljefa na podatke ubrzanja sile teže i gradijenata mjenjenih iz zraka (engl. *airborne gravity and gradiometry*) (Schwarz i dr. 1990).

Glavne prednosti tehnike *FFT-a* s obzirom na konvencionalne analitičke, integralne ili metode kolokacije su: velika brzina i učinkovitost računanja uz uporabu pravilnih mreža podataka, čak i velikih područja od interesa; učinkovit račun funkcija kovarijance, stupanjskih varijanci te gustoće spektra snage; mogućnost transformacije konvolucijskih integrala prostorne domene u frekvencijsku domenu, bilo u ravninskom ili sfernom obliku uz implementaciju specifične projekcije, te reformulacija nekih metoda kao npr. kolokacije i kontinuirane prema gore odnosno prema dolje (engl. *upward/downward continuation*) iz prostorne u spektralnu domenu. Prirodno, niz problema vezano je uz spektralne metode. Međutim, samo se neki mogu pripisati isključivo spektralnim metodama i samo neki utječu na točnost rezultata. Samu formulaciju metode *FFT-a* te njezina svojstva i nedostatke čitatelj može potražiti u nabrojenoj literaturi.

2. Korekcija reljefa u prostornoj domeni

Temeljna formula za računanje korekcije reljefa u točki P na sfernoj referentnoj površini dana je u linearnoj aproksimaciji dvostrukim integralom (Tziavos 1993):

$$tc(\phi_p, \lambda_p) = \frac{1}{2} GR^2 \iint_{\sigma_Q} \rho \frac{\Delta h^2}{l^3} \sigma_Q \quad (2.1)$$

Ovdje je $\Delta h = h(\phi_Q, \lambda_Q) - h(\phi_p, \lambda_p)$, $d\sigma_Q = \cos \phi_Q d\phi_Q d\lambda_Q$, R radijus referentne sfere, l udaljenost između točaka P i Q na sferi, a $d\sigma_Q$ referentna sfera: $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$, $-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$. Definiramo li dalje

$$\begin{aligned} dx &= R \cos \phi d\lambda \\ dy &= R d\phi \end{aligned} \quad (2.2)$$

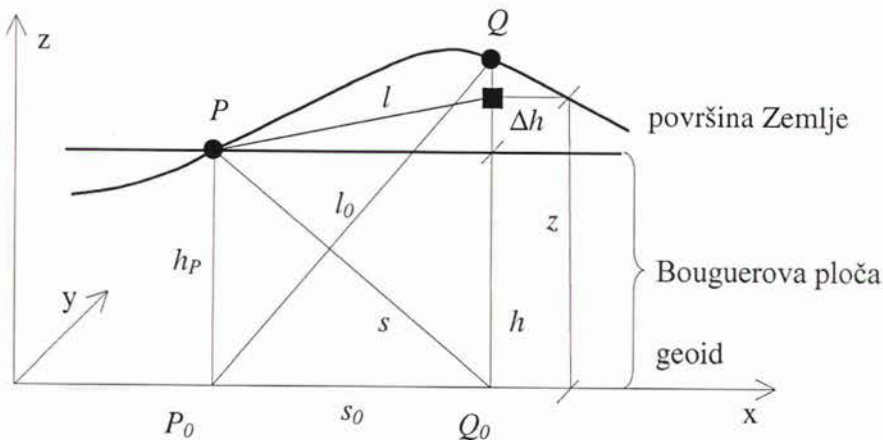
i

$$l^{-3}(x - x_p, y - y_p) = \begin{cases} [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{-3/2} & \text{za } x \neq x_p \text{ i } y \neq y_p \\ 0 & \text{za } x = x_p \text{ i } y = y_p \end{cases} \quad (2.3)$$

projekcijom izraza (2.1) na ravninu, slijedi ravninska aproksimacija korekcije reljefa (Tziavos 1993):

$$tc(x_p, y_p, z_p) = G \int_E \int_{h_p}^h \rho \frac{(z - h_p)}{[(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2]^{3/2}} dx db dy dz. \quad (2.4)$$

Uočava se pri tom da iz geometrijske reprezentacije (slika 1) vrijede i sljedeći odnosi $l^2 = s_0^2 + (z - h_p)^2$, $s_0^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$, $\Delta h = h - h_p$ i $z_p = h_p$.



Slika 1. Ravninska reprezentacija korekcije reljefa.

Integrira li se (2.4) po varijabli z , tada možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 tc(x_p, y_p) &= G \iint_E \rho \left\{ -\frac{1}{[s_0^2 + (z - h_p)^2]^{1/2}} \right\}^h dx dy = \\
 &- G \iint_E \rho \frac{1}{s_0} \left\{ \left[1 + \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} dx dy = \\
 &G \iint_E \rho \left\{ \frac{1}{s_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta h}{s_0} \right)^4 \right] \right\} dx dy.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Numeričkom integracijom te formule može se računati tzv. 2D aproksimacija. Općenito vrijedi da pri razvoju $[1 + (h/s_0)^2]^{1/2}$ u red mora biti zadovoljen uvjet konvergencije, $|h/s_0| < 1$. Drugim riječima, nagib topografije ne smije premašivati 45. Vidljivo je da u konačnom obliku tog izraza za korekciju reljefa, zvanom još i kvadratična aproksimacija, osim prvog, linearnoga, zadržavamo i nelinearni član. To je nužno ako se žele postići najviše točnosti u računu korekcije reljefa kod vrlo varijabilnog reljefa. Štoviše, i članovi reda višeg od kvadratičnoga također mogu biti uključeni u razvoj, ali tada se odgovarajuće poboljšanje točnosti nalazi unutar 0,1 mgal (Tziavos i dr., 1988.; 1 mgal = 10^{-5} ms⁻²).

Referentna ravnina E u jednadžbama (2.4) i (2.5) obično je male veličine, do nekoliko desetaka km. Doprinos udaljenijih točaka zanemariv je zbog toga što funkcija l^{-3} naglo trne s porastom udaljenosti točke Q od ishodišta P . To je glavni razlog zašto su pogreške ravninske aproksimacije sferne formule (2.1) malene.

Korekciju reljefa moguće je računati u prostornoj domeni izravnom numeričkom integracijom uz pomoć pravokutnih prizmi, kako to pokazuju npr. Forsberg 1984. ili Tziavos 1993. U ovom je radu takvo 'egzaktno' računanje korekcije reljefa (2.4) uzeto kao referentno za sve kasnije usporedbe.

3. Korekcija reljefa u spektralnoj domeni

Poradi prelaska u spektralnu domenu, kvadratičnu formulu korekcije reljefa (2.5) može se, koristeći oznake

$$\begin{aligned}
 r_3(x, y) &= s_0^{-3}(x, y) \\
 r_5(x, y) &= s_0^{-5}(x, y)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

raspisati kao sumu konvolucija

$$\begin{aligned}
tc(x_p, y_p) = & \frac{1}{2} G \iint_E (\rho(x, y) h^2(x, y)) r_3(x - x_p, y - y_p) dx dy - \\
& Gh(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y) h(x, y)) r_3(x - x_p, y - y_p) dx dy + \\
& \frac{1}{2} Gh^2(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y)) r_3(x - x_p, y - y_p) - \\
& \frac{3}{8} G \iint_E (\rho(x, y) h^4(x, y)) r_5(x - x_p, y - y_p) dx dy + \\
& \frac{3}{2} Gh(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y) h^3(x, y)) r_5(x - x_p, y - y_p) dx dy - \\
& \frac{9}{4} Gh^2(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y) h^2(x, y)) r_5(x - x_p, y - y_p) dx dy + \\
& \frac{3}{2} Gh^3(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y) h(x, y)) r_5(x - x_p, y - y_p) dx dy + \\
& \frac{3}{8} Gh^4(x_p, y_p) \iint_E (\rho(x, y)) r_5(x - x_p, y - y_p) dx dy.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Za praktično računanje članova korekcije reljefa (3.2) metodom *FFT- α* nužno je da se i točka računanja (x_p, y_p) kao i točka (x, y) odnose na pravilnu mrežu u ravnini (zadanih u obliku digitalnih modela visina i digitalnih modela gustoća), s inkrementima Δx i Δy , u x odnosno y smjeru. Pravilna mreža sastoji se od $M \times N$ točaka, gdje su x i y dani s (2.2). Prema tim pretpostavkama dvostruki integrali smiju biti evaluirani kao dvostruke sumacije od 0 do $M-1$ i od 0 do $N-1$.

Reprezentacijom točaka mreže pomoću njihovih valnih brojeva, uzevši u obzir temeljna svojstva 2D *FFT-a*, gornji dvostruki integrali odnosno odgovarajuće dvostruke sumacije mogu biti zapisane kao konvolucije:

$$\begin{aligned}
tc(x_p, y_p) = & \frac{1}{2} G [(\rho h^2) \cdot r_3 - 2h_p(\rho h) \cdot r_3 + h_p^2 \rho \cdot r_3] - \\
= & \frac{3}{8} G [(\rho h^4) \cdot r_5 - 4h_p(\rho h^3) \cdot r_5 + 6h_p^2(\rho h^2) \cdot r_5 - 4h_p^3(\rho h) \cdot r_5 + h_p^4 \rho \cdot r_5]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Označimo li Fourierove transforme ovih veličina s

$$\begin{aligned}
R_3(u, v) &= \mathbf{F}\{r_3(x, y)\} \\
R_5(u, v) &= \mathbf{F}\{r_5(x, y)\} \\
D(u, v) &= \mathbf{F}\{\rho(x, y)\} \\
DH_i(u, v) &= \mathbf{F}\{\rho(x, y) h^i(x, y)\}; \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{3.4}$$

tada se uz primjenu temeljnih svojstava Fourierova transformata dobiva formula za računanje korekcije reljefa, napisanu u spektralnoj domeni:

$$tc(x_p, y_p) = \frac{1}{2} G \left[\mathbf{F}^{-1} \{ DH_2 \cdot R_3 \} - 2h_p \mathbf{F}^{-1} \{ DH \cdot R_3 \} + h_p^2 \mathbf{F}^{-1} \{ D \cdot R_3 \} \right] - \frac{3}{8} G \left[\mathbf{F}^{-1} \{ DH_4 \cdot R_5 \} - 4h_p \mathbf{F}^{-1} \{ DH_3 \cdot R_5 \} + 6h_p^2 \mathbf{F}^{-1} \{ DH_2 \cdot R_5 \} - 4h_p^3 \mathbf{F}^{-1} \{ DH \cdot R_5 \} + h_p^4 \mathbf{F}^{-1} \{ D \cdot R_5 \} \right] \quad (3.5)$$

Promatrano s praktičnog, računalnog stajališta, algoritam 2D FFT rabi se za računanje spektara R_3 , R_5 , D i DH_i . Kako bi se izračunale konvolucije (3.3), primjenjuje se dalje inverzni Fourierov transform umnožaka spektara, budući da konvoluciji u prostornoj domeni odgovara množenje u spektralnoj.

O uporabi konstantne i varijabilne pretpostavke gustoće u formulaciji korekcije reljefa, te uz to pridruženim problemima i rješenjima preporučuje se Tziavos 1993. Na istom mjestu prikazane su i alternativne formulacije korekcije reljefa, primjerice, Harrison-Dickisonov pristup, Parkerova formulacija, korekcije terestričkih i prostornih mjerenja ubrzanja sile teže i gradiometrije te formulacija Molodenskijevim operatorom. Promatrano s teorijskog stajališta značajno je kao prednost u ovom radu korištene formulacije istaknuti nesingularnost kernel funkcija R_3 i R_5 .

4. Praktični problemi u primjeni spektralnih metoda

Diskretni Fourierov transform (DFT) definiran je jedino za periodične funkcije; drugim riječima, diskretni Fourierov transform zahtijeva periodičku kontinuitetu i prostorne i spektralne funkcije. Činjenica da je prostorna funkcija reprezentirana konačnim brojem točaka mjerenja, u kombinaciji sa zahtjevom periodičnosti DFT-a, uzrokuje diskontinuitete na kraju zapisa podataka odnosno granicama razmatranog područja. Ti diskontinuiteti rezultiraju pojavom novih valnih brojeva, koji nisu sadržani u originalnim podacima, dovode do izobličenja spektra funkcije (engl. *spectral leakage*). Implicitna pretpostavka periodičnosti pri uporabi metoda FFT-a znači zamjenu konvolucije cikličkom konvolucijom: za točku blizu ruba razmatranog područja od interesa, točke u blizini suprotnog ruba imat će golem neželjeni utjecaj. Stoga se polje reprezentirano 2D nizom ponavlja u spektralnoj domeni oko središnje točke u objema dimenzijama uvodeći u proračun tzv. *edge effect* ili *circular convolution*. Za eliminaciju utjecaja tih pogrešaka u ovom je radu upotrijebljena tzv. *zero-padding* tehnika, koja se sastoji u dodavanju nula oko originalnog (ulaznog) polja vrijednosti, čime se praktično dupliciraju dimenzije polja. Za posljedicu se u slučaju velikih polja podataka znatno povećava vrijeme računanja. Kao što je pokazano u Tziavos 1993., tehnika *zero-padding* je, u svrhu otklanjanja pogrešaka vezanih uz periodicitet, nadmoćnija često korištenoj tehnici *windowing*. Nedavne studije pokazuju da 100%-tno pridodavanje nula (50% sa svake strane) oko polja visina i kernel-funkcije, računanje vrijednosti kernel-funkcija i u točkama podataka i u nulama te evaluacija spektra pomoću DFT-a daje najbolje rezultate u računu korekcije reljefa.

Za uspješno računanje korekcije reljefa na raspolaganju trebaju biti dovoljno gusti digitalni modeli. Ključno je pitanje: koliko gusti? Utjecaj veličine inkrementa mreže podataka može se u slučaju podataka bez pogrešaka provjeriti npr. usporedbom

korekcije reljefa dobivene uz različite inkremente mreže s onom dobivenom uporabom originalnog polja visina. Tziavos i dr. 1988 pokazali su da je nužno uzeti u obzir učinak inkrementa mreže: ako želimo da točnost korekcije reljefa bude unutar 0,5 mgala, tada inkrementi moraju biti manji od 0,5 km. Također, ako interval uzorkovanja (engl. *sampling*) nije dovoljno malen, dolazi do gubitka vrijednih informacija; neadekvatni izbor rezultira u izobličenom spektru uzorkovane kontinuirane funkcije. To se izobličeno naziva *aliasing*. Da bi se izbjegao *aliasing* potrebno je izabrati interval uzorkovanja jednak polovici recipročne vrijednosti najviše Nyquistove frekvencije ili jednak polovici najkraće valne duljine prisutne u podacima.

S druge strane, u ovom radu je izabran inkrement mreže koji zadovoljava i uvjet konvergencije razvoja u (2.5). Iz tog uvjeta proizlazi da u najgorem slučaju razlika visina Δh uvijek mora biti manja od inkrementa mreže Δx odnosno Δy , što je teško postići kod jako varijabilnog reljefa. Gusto uzorkovani digitalni modeli reljefa utječu na konvergenciju rješenja tako da razvoj u red divergira nakon drugog člana reda, a ponekad je divergencija uočljiva već kod linearnog člana! (Za prevladavanje tog problema, Tziavos i Andritsanos, 1998. predlažu kombinirani algoritam koji koristi numeričku integraciju u zoni bliskoj točki računanja i *FFT* u vanjskoj zoni.)

Podaci pravilne mreže mogu se prilikom primjene metode *FFT-a* razmatrati ili kao točkasti ili kao osrednjene vrijednosti, što odgovara reprezentaciji linijskim masama odnosno prizmama. Pri tome su rezultati s osrednjenim vrijednostima u boljem slaganju s rezultatima NI (Sideris i Tziavos 1988). Važno je uočiti da za guste mreže nema bitnih razlika tih dviju reprezentacija: za korekcije u aerogravimetriji razlike iznose do 1 mgal kod inkrementa 1 km (Tziavos i dr. 1988). U Tziavos 1993. pokazano je da pri evaluaciji konvolucijskih integrala pomoću *FFT-a*, uporabom točkaste vrijednosti, umnožak spektara treba pomnožiti s 2D *sinc* funkcijom ako želimo da se rezultat odnosi na srednje vrijednosti.

Za mreže gušće od 1 km nelinearni članovi mogu pridonijeti numeričkoj nestabilnosti (oscilirajućem ponašanju) iz čega slijede nerealistično visoke vrijednosti t_c -a kao posljedica pojačanja *aliasinga* i drugih pogrešaka zbog derivacija višeg reda (Tziavos 1992). Rješenje za takvu situaciju je *niskopropusno filtriranje podataka* zajedno sa *zero paddingom*. Tu je katkad korisno još i razmnožiti originalne podatke bez dodavanja novih detalja.

5. Rezultati

U računanju korekcije reljefa korištene su formule (2.4) i (2.5) prostorne domene te (3.5) spektralne domene. Test-područje Republike Hrvatske, izabrano poradi dobre pouzdanosti ulaznih digitalnih modela, dimenzija je 89×75 km, definirano s y : 5 601 000 – 5 690 000 m i x : 5 045 000 – 5 120 000 m. Izrađena su dva para digitalnih modela, s inkrementima mreža (intervalima uzorkovanja) 0,5 i 1 km (tablica 1).

Budući da je apsolutna točnost podataka nepoznata, pretpostavlja se da su podaci bez pogrešaka, iz čega proizlazi da su sve usporedbe po prirodi relativne. Gornji dio slike 1 prikazuje digitalni model reljefa (DMR) inkrementa 0,5 km. Taj DMR po-

Tablica 1. Statistike digitalnih modela reljefa i gustoća.

	$\Delta = 0,5 \text{ km}$		$\Delta = 1,0 \text{ km}$	
	$h \text{ [m]}$	$\rho \text{ [kgm}^{-3}\text{]}$	$h \text{ [m]}$	$\rho \text{ [kgm}^{-3}\text{]}$
maks.	831,00	2 800	816,00	2 800
min.	93,00	1 980	94,00	1 980
sred.	157,22	2 115	157,55	2 116
rms	$\pm 170,99$	$\pm 2 121$	$\pm 171,71$	$\pm 2 121$

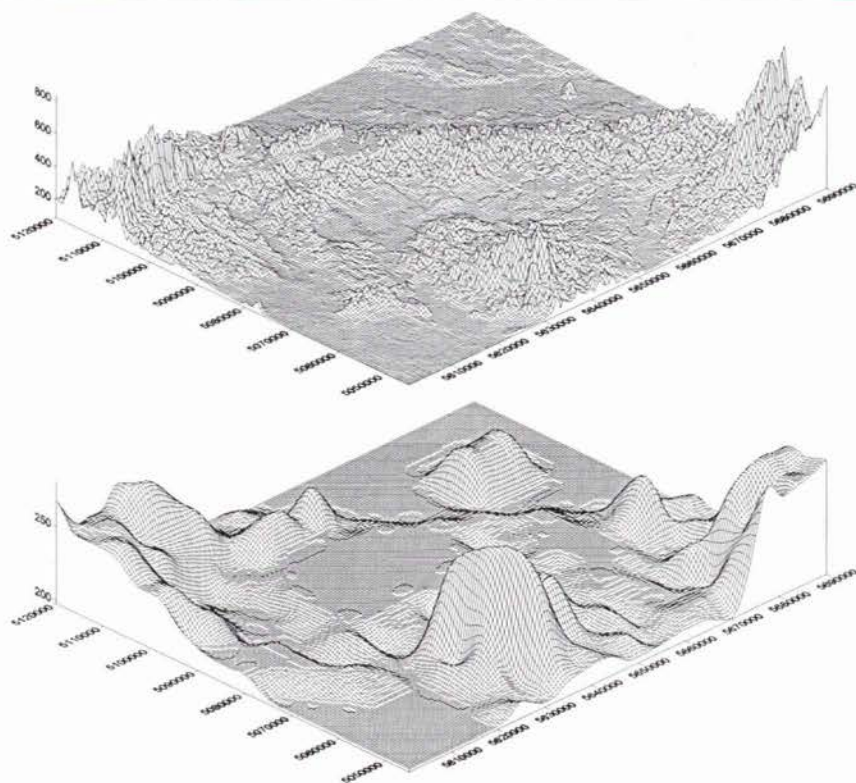
tječe od 4"×5" datoteke visina nastale digitalizacijom izohipsi zemljovida mjerila 1:25 000 te pripisivanjem vrijednosti najviših kota svakom 4"×5" elementu. U računanjima kod kojih se pretpostavlja konstantna vrijednost gustoće, uzeta je vrijednost 2120 kgm⁻³, budući da uporaba srednje vrijednosti gustoće (iz tablice 1) daje realističnije tc -rezultate za razmatrano test-područje. Površinska varijacija gustoća reprezentirana je digitalnim modelom gustoća (DMG) inkrementa 0,5 km (donji dio slike 1). DMG potječe iz datoteke 2,5'×2,5' nastale na temelju uzorkovanih površinskih gustoća u odabranom test-području Republike Hrvatske, u okviru posebnog projekta Geodetskog fakulteta za INA-Naftaplin (Čolić i dr. 1996).

U prvom ciklusu računanja pretpostavlja se konstantna gustoća masa Zemljine kore. Korekcija reljefa nalazi se numeričkom integracijom NI1 (egzaktnom, 3D formulom) i metodom FFT-a (linearna FFT1 te kvadratična FFT2 aproksimacija) uz 100% zero-padding. U numeričkim eksperimentima korišteni su znatno modificirani i za metodu FFT2 metodu prošireni fortranski programi TCSUMD i TCCFFTDP dobiveni od prof.dr.sc. Iliasa N. Tziavosa (priv. komunik.).

Zbog dugotrajnosti računanja tc -a numeričkom integracijom uz inkrement 0,1 km (više od 4 mjeseca, na HP Vectri VL), referentni tc definirat ćemo kao onaj izračunan numeričkom integracijom digitalnih modela s inkrementom 0,5 km. Budući da se točnost tc -a računano s inkrementom digitalnih modela 0,5 km smanjila za oko 0,5 mgala u odnosu na tc s inkrementom 0,1 km (Tziavos i dr. 1988), te usporedbe valja promatrati kao relativne, ali indikativne i za našu svrhu dovoljne. Tablica 2 prikazuje statistiku korekcije reljefa dobivenih egzaktnom numeričkom integracijom i spektralnim metodama, a slika 3 pokazuje jaku korelaciju tc -rješenja s DMR-om.

Iz tablice 2 i slike 3 vidljiva je međusobna podudarnost tc -metoda te izrazita korelacija s DMR-om. Značajno smanjenje statističkih parametara tc -razlika u slučaju računanja s inkrementom 0,5 km upućuje na to da je upravo taj DMR najpogodniji za računanje u spektralnoj domeni, a da pri tom efekti nedostatka konvergencije ne degradiraju rezultat. Promatrajući razlike FFT1 od NI1 u odnosu na razlike FFT2 od NI1, možemo uočiti da primjenom kvadratične formulacije (3.5) u tom slučaju nema značajnog približenja metodi NI1.

Drugim ciklusom ponavlja se navedeni plan eksperimenta, ali sada uz uporabu digitalnih modela površinske gustoće. O opravdanosti uvođenja varijabilnih gustoća (tablica 1 i slika 2) možemo se uvjeriti međusobnom usporedbom tablica 2 i 4. Dalje

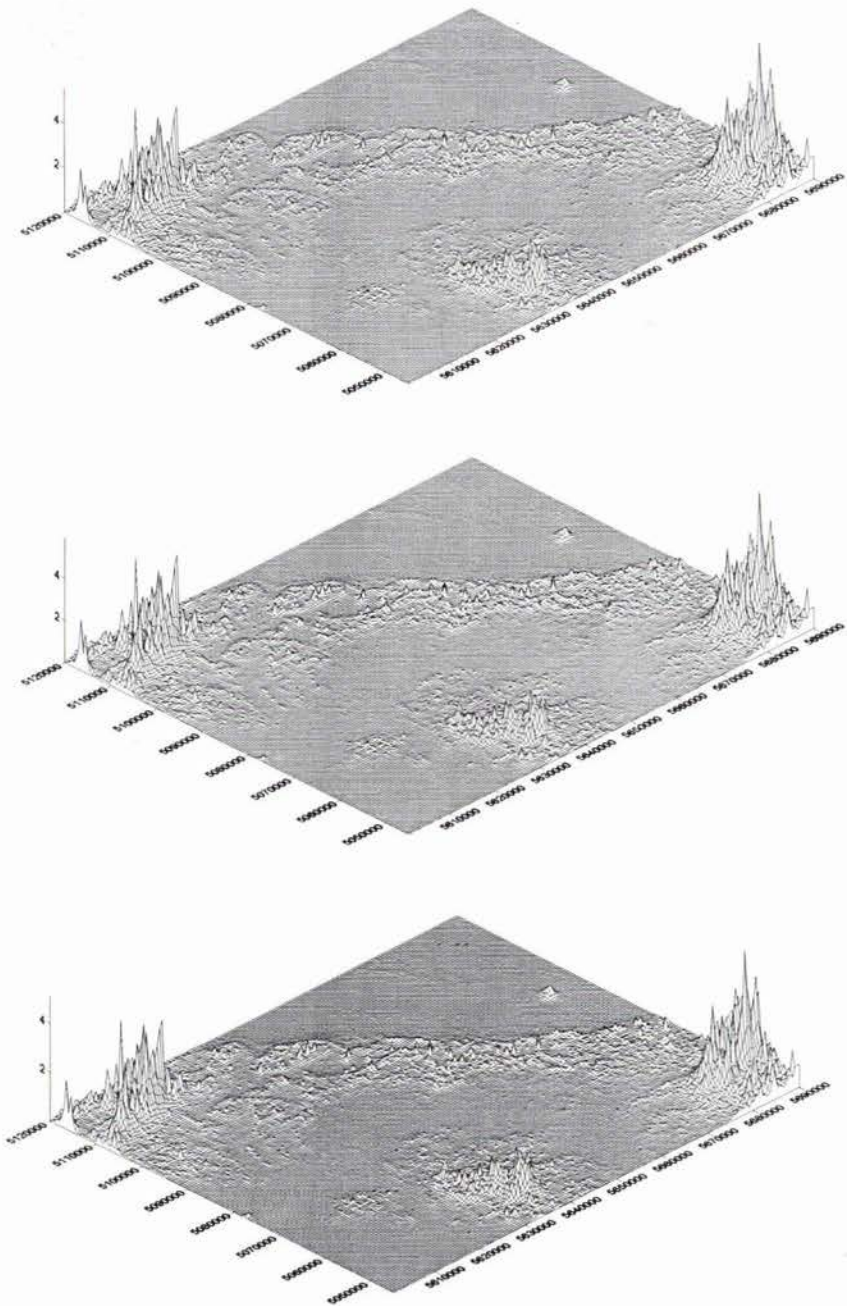


Slika 2. Digitalni model reljefa i digitalni model gustoće inkrementa 0,5 km.

ćemo usporediti korekcije reljefa računane numeričkom integracijom NI1 s metodom FFT-a uz 100% zero-padding. Pri tome će referentno rješenje korekcije reljefa i u tom dijelu biti dobiveno numeričkom integracijom uz ulazne digitalne modele s inkrementom 0,5 km.

Tablica 2. Korekcija za reljef metodama NI1, FFT1 i FFT2 uz $\rho = \text{const.}$

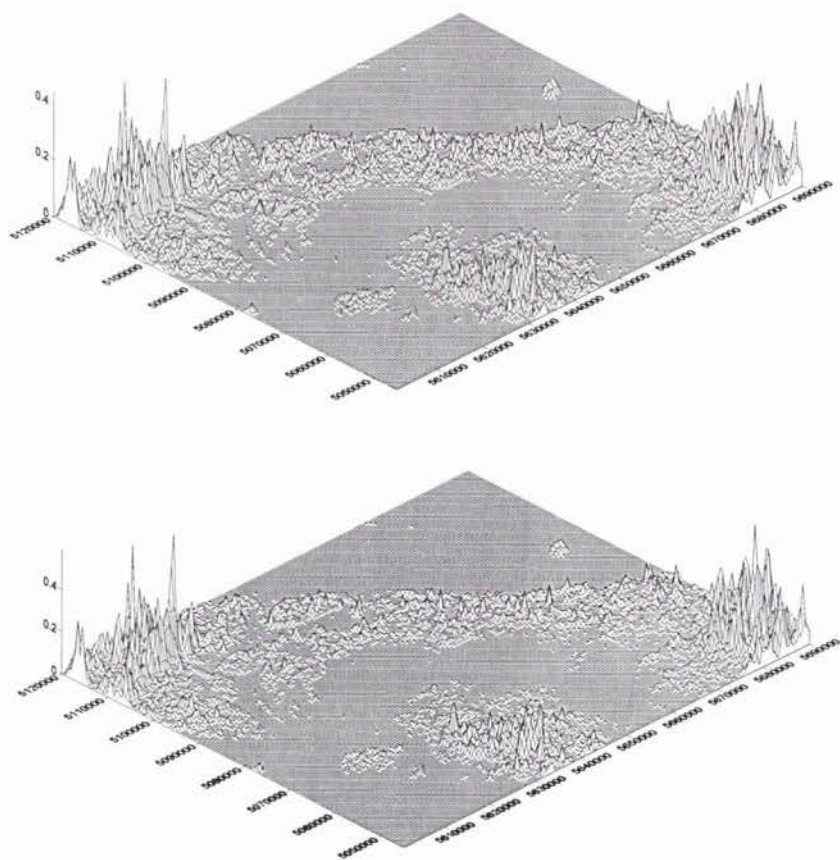
Δg [mgal]	NI1		FFT1		FFT2	
	Δ [km]		Δ [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	5,603	3,249	5,273	3,001	5,089	2,977
min.	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
sred.	0,100	0,084	0,091	0,074	0,090	0,074
rms.	$\pm 0,273$	$\pm 0,233$	$\pm 0,249$	$\pm 0,205$	$\pm 0,246$	$\pm 0,203$
st. dev.	0,254	0,217	0,232	0,191	0,229	0,189



Slika 3. Korekcija reljefa metodama NI1, FFT1 i FFT2 uz $\rho = \text{const.}$ i inkrement 0,5 km.

Tablica 3. Usporedba vrijednosti FFT-a s referentnim vrijednostima korekcije reljefa uz $\rho = \text{const.}$

Δg [mgal]	FFT1-NI1		FFT2-NI1	
	Δ [km]		Δ [km]	
	0,5 – 0,5	1,0 – 0,5	0,5 – 0,5	1,0 – 0,5
maks.	0,000	1,170	0,000	1,127
min.	-0,442	-4,014	-0,585	-4,024
sred.	-0,010	-0,025	-0,010	-0,026
rms	$\pm 0,026$	$\pm 0,110$	$\pm 0,029$	$\pm 0,110$
st. dev.	0,024	0,107	0,027	0,107

Slika 4. Razlike korekcija reljefa NI1 – FFT1 i NI1 – FFT2 uz $\rho = \text{const.}$ i inkrement 0.5 km.

Tablica 4. Korekcija reljefa metodama NI1, FFT1 i FFT2 uz $\rho \neq \text{const.}$

Δg [mgal]	NI1		FFT1		FFT2	
	Δ [km]		Δ [km]		Δ [km]	
	0,5	1,0	0,5	1,0	0,5	1,0
maks.	7,163	4,111	6,411	3,487	6,176	3,458
min.	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
sred.	0,111	0,094	0,101	0,083	0,100	0,083
rms.	$\pm 0,324$	$\pm 0,276$	$\pm 0,286$	$\pm 0,233$	$\pm 0,282$	$\pm 0,231$
st. dev.	0,304	0,260	0,268	0,218	0,264	0,216

Zamjetan porast maksimalne vrijednosti kod inkrementa 0.5 km već je uočen kod svih metoda u tablici 2. Teoretski, za taj inkrement i metodu FFT-a mogao bi biti uočljiv nedostatak konvergencije. Međutim, budući da je porast uočen i kod metode NI1, gdje uvjet konvergentnosti ne igra nikakvu ulogu, može se zaključiti da uočeni porast nije posljedica nedostatka konvergencije. S druge strane, smanjenje inkrementa mreže u obje domene djeluje na eliminaciju *aliasinga*. Zamijećena promjena maksimalne vrijednosti korekcija za reljef posljedica je uporabe finijih ulaznih digitalnih modela, i to u prvom redu visina. Razlike u digitalnom modelu visina generirale su razlike dobivenih korekcija.

Uočava se da za razlike korekcija reljefa (tablica 5) vrijedi da su korelirane s topografijom te da su veće u odnosu na odgovarajuće vrijednosti dobivene s konstantnom gustoćom (tablica 3). Razlike metoda prostorne i spektralne domene velike su i značajne, a najmanje odstupanje od referentnih vrijednosti slijedi uporabom najfinijeg digitalnog modela.

Tablica 5. Usporedba vrijednosti FFT-a s referentnim vrijednostima korekcija reljefa uz $\rho = \text{const.}$

Δg [mgal]	FFT1-NI1		FFT2-NI1	
	Δ [km]		Δ [km]	
	0,5 – 0,5	1,0 – 0,5	0,5 – 0,5	1,0 – 0,5
maks.	0,103	1,253	0,093	1,207
min.	-0,752	-5,306	-0,987	-5,318
sred.	-0,011	-0,028	-0,011	-0,029
rms	$\pm 0,041$	$\pm 0,136$	$\pm 0,044$	$\pm 0,136$
st. dev.	0,039	0,133	0,043	0,133

Istaknimo konačno i znatne vremenske uštede proizašle uporabom metode spektralne domene s obzirom na prostornu domenu. Na računalo HP Vectra VL numerička integracija za ciljano test-područje i inkremente 1, 0,75 i 0,5 km traje redom 0,3 h, 0,92 i 4,62 sata. Kod metode FFT1 proračuni traju 1,23, 2,13 i 5,24 sekunde, a kod metode FFT2 2,58, 4,40 i 11,08 sekundi. Kao što je poznato, NI-metoda temeljena na sumaciji prizmi zahtijeva CPU-vrijeme približno proporcionalno $M \times N$, gdje je M broj točaka u kojima se računa, a N broj točaka mreže. S druge strane, CPU-vrijeme računanja metodom FFT-a približno je proporcionalno $N \log N$ (tu je N simultano broj točaka mreže i broj točaka računanja). Kao što vidimo, spektralna je metoda vremenski daleko učinkovitija od NI-metode.

6. Zaključak

Prva zadaća ovog rada bila je izračunati korekcije reljefa uporabom spektralnih metoda što bliže rješenjima prostorne domene i u najmanjoj mjeri kontaminirane pogreškama. U tu svrhu, a imajući na umu jaku međuovisnost samih algoritama, numeričkih metoda i polja podataka, definirane su adekvatne ulazne mreže podataka, tj. takve koje, unutar granica metoda, daju dovoljno kvalitetna rješenja. Kvaliteta korekcija reljefa dobivenih spektralnim metodama procijenjena je usporedbom s rezultatima numeričke integracije u prostornoj domeni. Time je definirana točnost. Definira li se prihvatljive točnosti veličina srednjaka i rms-a unutar 0,5 mgal, tada nalazimo ovo istraživanje, u kojem te veličine poprimaju vrijednosti oko $-0,01$ i $\pm 0,2$ mgala, ne samo opravdanim već i potencijalno korisnim. Uzeta je vrijednost 0,5 mgala jer smo se 'odrekli' upravo tolike točnosti proglašivši referentim korekcije reljefa dobivene s 0,5 km digitalnim modelima. S druge strane, rms točnost unutar 0,5 mgala sasvim je dovoljna pri rješavanju Problema graničnih vrijednosti.

Pogreške u samim ulaznim podacima kontaminiraju konačno rješenje. Tako je poznato da sustavne ili slučajne pogreške visina vrijednosti do 50 m generiraju pogreške korekcija reljefa do 0,8 mgala (Sideris 1985). Budući da je apsolutna točnost podataka nepoznata, sve usporedbe u ovom radu valja smatrati relativnima. Također nismo mogli utjecati ni na činjenicu da je rješenje kontaminirano numeričkim pogreškama. S druge strane, da bi se pronašao optimalni digitalni model (ili rang zadovoljavajućih DM-a), nužno je pridržavati se zahtjeva koji proizlaze iz samih metoda.

Dva kritična uvjeta postavljena pred podatke čine zahtjev za minimizacijom *aliasinga* te zahtjev za konvergencijom reda iz ravninske aproksimacije korekcije reljefa. Budući da iz prvoga slijedi zahtjev za što manjim, a iz drugoga za što većim inkrementom uzorkovanja digitalnih modela, ta su dva uvjeta u tom smislu potiruća i treba ih uravnotežiti. U svrhu promatranja učinaka na rezultate, sva su računanja izvođena za digitalne modele uzorkovane dvama različitim inkrementima. Pronađeno je da DMR uzorkovan inkrementom 0,5 km, jedini DM od uporabljenih koji striktno ne zadovoljava uvjet konvergencije, daje najzadovoljavajuće rezultate u smislu naprijed definirane točnosti. U našem slučaju nekonvergentnost reda nije imala značajan učinak na *tc*-rješenje. Nadalje, da bi se eliminirali nepoželjni efekti cirkularne konvolucije karakteristične za metode FFT-a, uporabljena je tehnika 100% *zero paddinga* i oko matrica signala i oko kernel-funkcije.

Jedan od ciljeva ovog rada bio je i promotriti utjecaj broja članova razvoja u red ravninske aproksimacije korekcije reljefa. Pravilnost i visoka podudarnost vrijednosti u tablicama pokazuju da uvođenjem kvadratične aproksimacije (FFT2) nema pojave numeričkih nestabilnosti rješenja, te stoga ni potrebe za tehnikama niskoprolaznog i/ili drugih filtriranja. Moglo bi se pokazati, a što je ovdje izostavljeno, da se razlike metoda FFT1 i FFT2 povećavaju smanjenjem inkrementa ulaznih DM-a te mogu u našem slučaju kod 0,5 km DM-a poprimiti maksimalne vrijednosti oko 0,2 mgala, dok se srednjaci i rms-vrijednosti tih razlika kreću oko 0,001 mgal. Tako malen utjecaj kvadratičnog člana uočavamo i u našim tablicama.

Iz tablica se mogu uočiti i znatne razlike u rezultatima proizašle uvođenjem varijabilnog polja površinskih gustoća. Kada bismo posebno razmotrili razliku tc-rješenja dobivenih metodom NI1, uz DMG i bez njega, tada bismo najprije našli da te razlike rastu smanjenjem inkrementa, što govori o dominantnoj osjetljivosti tc-rješenja na finoću ulaznog DMR-a. Tako maksimalne razlike NI1, kod 0,5 km DM-a, iznose oko 0,7 mgala, srednje oko 0,02 mgala, a rms oko $\pm 0,06$ mgala te je stoga utjecaj varijabilnih gustoća nezanemariv.

Napomenimo još i da je DMR nastao interpolacijom izvornih točkastih podataka. Stoga se ulazne podatke u FFT i NI može smatrati osrednjenim podacima, odnosno Zemljinu topografiju reprezentiranu prizmama.

Vidljivo je, i to ne bez razloga, da uporaba metoda spektralne domene u modernoj fizikalnoj geodeziji zauzima istaknuto mjesto. Mnogi se pravci i rukavci evolucije te daljnjeg razvoja spektralnih metoda već desetljećima upisuju u svjetsku znanstvenu literaturu. A kakva je situacija kod kuće? Autori ovog rada nadaju se da su zahvaćanjem relativno malog segmenta kao što je računanje korekcije reljefa uspjeli ilustrirati jednu od mogućih primjena spektralnih metoda fizikalne geodezije i otkriniti vrata njezinu širem uvođenju u hrvatsku današnjicu.

ZAHVALA. Istaknimo da je ovaj rad ostvaren uz ljubaznu potporu prof.dr.sc. Iliasa N. Tziavosa sa Sveučilišta u Solunu, Grčka.

Literatura

- Bašić, T., Brkić, M., Suenkel, H. (1999): A New, More Accurate Geoid for Croatia, Physics and Chemistry of the Earth, Vol. 24, No. 1, 67-72, Elsevier Science Ltd.
- Brkić, M. (1994): Poboljšana metoda modeliranja masa Zemljine kore, Geodetski list, Br. 3, 253-264, Zagreb.
- Čolić, K., Bašić, T., Pribičević, B., Medak, D. (1996): A Geodetic-Gravimetric Method for Better Modelling of Geological Structures in the Test Area of Croatia, Geologia Croatica, Vol. 49/2, 211-215, Zagreb.
- Forsberg, R. (1984): A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling, Report No. 355, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus.
- Forsberg, R. (1985): Gravity Field Terrain Effect Computations by FFT, Bulletin Géodésique, No. 59, 342-360, Paris.

- Tziavos, I. N. (1993): Numerical Considerations of FFT Methods in Gravity Field Modelling, Report Nr.188, Wissenschaftliche arbeiten der fachrichtung vermessungswesen der Universität Hannover.
- Tziavos, I. N., Andritsanos, V. D. (1998): Recent Advances in Terrain Correction Computations, 2nd Continental Workshop on the Geoid in Europe, Budapest, March 10-14, 1998.
- Tziavos, I. N., Sideris, M.G., Forsberg, R. and Schwartz, K.P. (1988): The Effect of the Terrain on Airborne Gravity and Gradiometry, Journal Of Geophysical Research, 93(B8), 9173-9186.
- Tziavos, I. N., Sideris, M.G. i Schwartz, K.P. (1992): A Study of the Contributions of Various Gravimetric Data Types on the Estimation of Gravity Field Parameters in the Mountains, Journal Of Geophysical Research, 97(B6), 8843-8852.
- Sideris, M. G. (1985): A FFT Method for Computing Terrain Corrections, Manuscripta Geodaetica, No. 10, 66-73.
- Sideris, M.G. i Tziavos, I.N. (1988): FFT-Evaluation and Applications of Gravity Field Convolution Integrals with Averaged and Point Data, Bulletin Géodesique, No. 62, 521-540.
- Schwarz, K. P., Sideris, M. G. i Forsberg, R. (1990): "The Use of FFT Techniques in Physical Geodesy", Gephys. J. Int 100, 485-514

Space and Spectral Domain Terrain Correction Computation

ABSTRACT. Terrain correction (tc) for the chosen area of the Republic of Croatia was computed by application of numerical integration and Fast Fourier Transform methods on digital terrain and density models. In doing so, special attention was paid to the fulfillment of the method's requirements. Impact of higher order terms in the series of the planar terrain correction approximation was investigated. A substantial effect of inclusion of surface density digital models to the tc result was found. Comparison of the methods confirmed the adequate quality and superior efficiency of the spectral domain methods.

Key words: terrain correction, numerical integration, spectral methods, FFT.

Primljeno: 2000-09-25