UDK 528.088:53.088:389:006.3(100)
Pregledni znanstveni članak

ODREĐIVANJE PROŠIRENE NESIGURNOSTI ISKAZIVANJE MJERNOG REZULTATA

Dušan BENČIĆ – Zagreb*

SAŽETAK. U ovom radu prikazano je određivanje proširene mjerne nesigurnosti i iskazivanje mjernog rezultata na osnovi Uputa za iskazivanje mjerne nesigurnosti koje je objavila Međunarodna organizacija za normizaciju ISO, a na temelju međunarodnog dogovora.

Ključne riječi: proširena nesigurnost, faktor proširenja.

1. UVOD

U nastavku razmatranja o iskazivanju mjerne nesigurnosti, nakon što je objašnjeno značenje pojma nesigurnosti (Benčić 1998a) i nakon što je opisan proračun sastavnica i sastavljene standardne nesigurnosti (Benčić 1998b), u ovom radu dan je pregled određivanja proširene nesigurnosti i zaključno iskazivanje mjernog rezultata.

Treba ponovno istaknuti da je svrha međunarodnog dogovora o iskazivanju nesigurnosti rezultata primjena *jednakih metoda* proračuna i *izražavanja* mjerne nesigurnosti u cijelom svijetu u svim područjima mjeriteljstva, u znanosti, inženjerstvu, trgovini, industriji. Štoviše, uz uvođenje i nove terminologije (npr. standardne nesigurnosti rezultata) nema više (u načelu) svrstavanja sastavnica nesigurnosti na "slučajne" i "sustavne", što je često uzrokovalo nejasnoće, pa i pogrešna tumačenja. Naime, što je mjerenje preciznije, sve je teže razlikovati slučajna i sustavna odstupanja.

2. PROŠIRENA NESIGURNOST

Proširena nesigurnost U dobiva se množenjem sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ s *faktorom proširenja* k:

$$U = k\, u_c(y).$$

Mjerni rezultat dogovorno se izražava kao:

$$Y = y \pm U,$$

gdje je y *najbolja procjena* vrijednosti mjerene veličine, a $y - U$ do $y + U$ područje koje prema očekivanju obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti što bi se mogle razumno pripisati mjerenoj veličini, a to znači i:

* Prof.dr.sc. Dušan Benčić, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb.

$$y - U \leq Y \leq y + U.$$

Kako se interval $y - U$, odnosno $y + U$, određuje statističkom analizom, to ga nazivamo *intervalom pouzdanosti* ili *povjerenja* i naravno pridružujemo mu razinu *pouzdanosti p*.

Prema preporuci INC-1 (1980) treba uvijek navesti numeričku vrijednost faktora proširenja, ali i razinu pouzdanosti p.

Vrijednost faktora k bira se prema zahtijevanoj razini pouzdanosti i najčešće će biti između 2 i 3. Poznato je, da uz pretpostavku *normalne razdiobe* ovim faktorima odgovaraju razine pouzdanosti 95,45 %, odnosno 99,73 %. Za razinu pouzdanosti 99,0 % faktor iznosi 2,58.

Treba naglasiti sljedeće:

- množidba s faktorom proširenja ne daje nove podatke, nego proširuje nesigurnost rezultata, kako bi mu se pridala određena veća pouzdanost. Pri tome treba voditi računa o već rečenom o realnom iskazivanju nesigurnosti (Benčić 1998). Najgore bi bilo kad bi mjeritelj izabrao taj faktor samo na osnovi sumnja u postojeća sustavna odstupanja, bez statističke analize, kako bi po njegovu mišljenju "osigurao" pouzdanost rezultata.
- u većini slučajeva razina pouzdanosti p (posebno za vrijednosti p približno 1) prilično je nesigurna, ne samo zbog ograničenog znanja razdiobe vjerojatnosti za y i $u_c(y)$, napose u rubnim dijelovima, nego i zbog same nesigurnosti standardnog odstupanja, odnosno standardne nesigurnosti rezultata. Ta "nesigurnost nesigurnosti" srednje vrijednosti $\bar{q}$ kojoj je razlog ograničena veličina statističkog uzorka iznosi za n = 10 opažanja 24 %, a za n = 50 još uvijek 10 % .

Već iz tog slijedi da *faktor proširenja* i razina pouzdanosti nemaju tako jednostavnu vezu kao što se to često primjenjuje, pa i u slučaju normalne razdiobe, a posebno kad se radi o sastavljenoj nesigurnosti, kad ulazne veličine mogu imati i druge razdiobe vjerojatnosti (Benčić 1998b vidi t. 1. Proračun standardne nesigurnosti B-vrste).

Izbor faktora proširenja i odgovarajuće razine pouzdanosti zahtijeva prema tome dobro poznavanje razdiobe vrijednosti koje opisuju mjerni rezultat i njegova sastavljena standardna nesigurnost. Premda su ti parametri od odlučne važnosti, oni sami nisu dostatni za određivanje intervala s točno poznatim razinama pouzdanosti.

- Preporuka INC-1 (1980) ne određuje kako bi se trebao uspostaviti odnos između k i p. Međutim, u mjernim situacijama gdje je razdioba vjerojatnosti koje opisuju mjerni rezultat y i sastavljenu nesigurnost $u_c(y)$ *približno normalna*, a broj *stupnjeva slobode* sastavljene standardne nesigurnosti *značajan* po iznosu, često je prikladan jednostavniji pristup. U tom slučaju, čestom u praksi, može se pretpostaviti da uzimanje $k = 2$ daje interval koji ima razinu pouzdanosti od *približno* 95 %, a uzimanje $k = 3$ razinu pouzdanosti od približno 99 % (Upute 1995).

Zaključujemo da je pri uzimanju faktora proširenja i odgovarajuće razine pouzdanosti nužno poznavati (ispitati) razdiobu vjerojatnosti. S obzirom na primijenjene statističke analize od posebnog je značenja *normalna razdioba*. Pri tome je za promatranje sastavljene standardne nesigurnosti potrebno poznavati jedan od osnovnih teorema statističke teorije, a to je središnji granični teorem.

Središnji granični teorem kaže: ako se sve ulazne veličine opisuju normalnim razdiobama i konačna konvolucijom dobivena razdioba izlazne veličine bit će normalna. Međutim, i u slučajevima kad razdiobe ulaznih veličina *nisu normalne*, razdioba izlazne veličine bit će često *približno normalna*, ako su ulazne veličine *neovisne* i ako je varijanca izlazne veličine mnogo veća od varijanci svake pojedinačne sastavnice.

Slijedi da će konvolucijom dobivena razdioba težiti prema normalnoj kad broj ulaznih veličina raste i kad su njihove varijance što bliže jedna drugoj i same razdiobe što bliže normalnoj razdiobi.

Tako je npr. pravokutna razdioba krajnji slučaj *nenormalne razdiobe*, ali je konvolucija *već triju* takvih razdioba iste širine *približno normalna*. Ako je poluširina svake od triju pravokutnih razdioba jednaka a, to je varijanca svake od njih jednaka $\frac{a^2}{3}$ (Benčić 1998b., v. Proračun standardne nesigurnosti B-vrste, pravokutna razdioba). Varijanca je konvolucijom dobivene razdiobe $\sigma^2 = a^2$. Intervali konvolucijom dobivene razdiobe s razinom pouzdanosti 95 % i 99 %, dani su izrazima $1{,}94\sigma$ i $2{,}38\sigma$, a odgovarajući intervali za normalnu razdiobu s istim σ su $1{,}96\sigma$ i $2{,}58\sigma$.

Prema tome, ako u sastavljenoj standardnoj nesigurnosti ne prevlada koja sastavnica dobivena iz proračuna A-vrste temeljena na samo nekoliko mjerenja, ili koja sastavnica B-vrste temeljena na pravokutnoj razdiobi, to se opravdano *može primijeniti* vrijednosti faktora proširenja iz *normalne razdiobe* (i odgovarajućom razinom pouzdanosti) kao prvo približenje (Upute 1995).

2.1. Problem broja mjerenja i određivanja broja stupnjeva slobode

Kao što smo istaknuli, uz problematiku poznavanja razdiobe vjerojatnosti, postoji značajan problem nesigurnosti *procjene standardnog* odstupanja, kao temeljne odrednice standardne nesigurnosti, zbog *ograničene veličine* statističkog uzorka, odnosno broja neovisnih opetovanih opažanja (n). Stoga se za manje uzorke primjenjuje za intervalnu procjenu simetrična, ali nešto spljoštenija *t-razdioba* ili *Studentova razdioba* s $\nu = n - 1$ stupnjeva slobode. U tu svrhu se u tablici za različite vrijednosti broja stupnjeva slobode ν i različite vjerojatnosti p daju vrijednosti $t_p(\nu)$.

U jednostavnom slučaju *proširena nesigurnost*, uz *malen broj* neovisnih opažanja izrazit će se sa:

$$U_p = k_p\, u_c(y) = t_p(y)\, u_c(y),$$

gdje je p razina pouzdanosti za taj interval.

Općenito, međutim t-razdioba *neće opisivati* razdiobu varijable $\frac{y-Y}{u_c(y)}$, ako je $u^2_c(y)$ zbroj dviju ili više *procijenjenih sastavnica* varijance $u^2_i(y) = c^2_i\, u^2(x_i)$, čak i ako je svako x_i procjena ulazne veličine X_i s *normalnom razdiobom*.

Međutim, razdioba te varijable može se *približno* opisati *t-razdiobom* uz *efektivni broj* stupnjeva slobode ν_{eff} dobiven iz Welch-Satterthwaiteove formule:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

s $\nu_{\mathrm{eff}} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i$, a *proširena nesigurnost* će biti:

$$U_p = k_p\, u_c(y) = t_p(\nu_{\mathrm{eff}})\, u_c(y).$$

Broj stupnjeva slobode koji treba pripisati *standardnoj nesigurnosti B-vrste* može se odrediti približno prema izrazu (Upute 1995):

$$\nu_i \approx \frac{1}{2} \frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\, u(x_i)}{u(x_i)}\right)^{-2}.$$

Veličina $\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$ je *relativna nesigurnost nesigurnosti*. To je subjektivna veličina čija se vrijednost dobiva znanstvenom *prosudbom* (Upute 1995).

Npr. ako je procjena da je relativna nesigurnost 0,25 (25 %) broj stupnjeva slobode je $v_i = \frac{(0{,}25)^{-2}}{2} = 8.$.

Pri pravokutnoj razdiobi, $u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$ smatra se stalnicom bez nesigurnosti, budući da se a_- i a_+ biraju tako da vjerojatnost, da razmatrana veličina leži izvan intervala od a_- do a_+ bude zanemarivo mala. U tom su slučaju stupnjevi slobode beskonačno veliki.

Primjenjivost analiza za ocjenu proširene nesigurnosti ovisit će o tome koliko npr. faktor k = 2 mora biti blizu vrijednosti faktora $t_{95}(v_{\text{eff}})$ i koliko faktor k = 3 treba biti blizu vrijednosti faktora $t_{99}(v_{\text{eff}})$, tj. koliko razina pouzdanosti intervala određenog s $U = 2u_c(y)$, odnosno $U = 3u_c(y)$ treba biti blizu vrijednostima 95 % ili 99 %.

2.2. Primjer: Račun proširene nesigurnosti pri komparaciji mjerne vrpce

U prošlom broju ovog lista (Benčić 1998b) opisana je komparacija mjerne vrpce u Laboratoriju za mjerenja i mjernu tehniku Geodetskog fakulteta u Zagrebu. Osim analize sastavnica nesigurnosti istaknuto je, da na mjernu nesigurnost rezultata komparacije bitno utječu nesigurnost umjeravanja invarne vrpce i nesigurnost izmjerene razlike duljina pri komparaciji.

Standardna nesigurnost umjeravanja duljine invarne vrpce 10,0 m dana je u certifikatu i iznosi $u(l_i) = 0{,}034$ mm.

Standardna nesigurnost izmjerene razlike duljina vrpci dana prethodnim ispitivanjima iznosi $u(d) = 0{,}056$ mm.

Sastavljena standardna nesigurnost izračunana je na osnovi ovih sastavnica B-vrste:

$$u_{cB} = 0{,}066 \text{ mm}.$$

Za proračun proširene nesigurnosti potrebno je izračunati faktor proširenja $k_p = t_p(v_{\text{eff}})$, uz izabranu razinu pouzdanosti $p = 95$ %.

Prvo računamo broj stupnjeva slobode pomoću Welch-Satterthwaitove formule:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{v_i}}.$$

U našem slučaju je:

$$v_{\text{eff}} = \frac{0{,}066^4}{\frac{0{,}034^4}{v(l_i)} + \frac{0{,}056^4}{v(d)}}.$$

Broj stupnjeva slobode ulaznih veličina određujemo s pomoću relativne nesigurnosti na osnovi procjene kako je određena ulazna veličina i njezina standardna nesigurnost, i to:

- relativna nesigurnost umjeravanja 0,10 i
- relativna nesigurnost razlike duljina vrpci (10 m) 0,50,

pa će biti:

$$\nu(l_i) = \frac{0{,}10^{-2}}{2} = 50,$$

$$\nu(d) = \frac{0{,}50^{-2}}{2} = 2.$$

Prema tome dobit ćemo $\nu_{eff} = 3{,}84$.

Tu vrijednost zaokružujemo na prvi manji cijeli broj, pa će stvarni broj stupnjeva slobode biti: $\nu_{eff} = 3$.

Iz tablice za $t_{95}(3)$ dobit ćemo kao faktor proširenja 3,18, pa je *proširena nesigurnost* za $l = 10$ m:

$$U_{95} = t_{95}\ (3)\ u_{cB}(l) = 3{,}18 \times 0{,}066 \text{ mm} = 0{,}21 \text{ mm},$$

uz približnu razinu pouzdanosti 95 %.

3. ISKAZIVANJE MJERNOG REZULTATA

Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti predviđene su za primjenu na svim područjima mjeriteljstva. Ne može se očekivati, međutim, da se mjerni rezultati jednako iskazuju u vrhunskoj metrologiji i preciznim mjerenjima i u izvještajima svakodnevnih rutinskih mjerenja. Zato se predlažu tri razine iskazivanja mjernog rezultata (Godec 1995):

a. *Niska razina.*

Mjerni rezultat se iskazuje izmjerenom vrijednošću (brojem i jedinicom) s tolikim brojem znamenaka da je nesigurnost zaokruživanja manja od četvrtine ukupne mjerne nesigurnosti.

b. *Srednja razina.*

Mjerni rezultat treba sadržavati ispravljenu mjerenu (srednju) vrijednost, nesigurnost i broj ponovljenih mjerenja n (ili broj stupnjeva slobode), uz opis mjernog postupka s popisom i svojstvima upotrijebljene mjerne opreme.

c. *Visoka razina.*

Mjerni rezultat treba sadržavati sve relevantne podatke koji omogućuju uporabu, provjeru i obnavljanje navedenog rezultata i njegove nesigurnosti.

U Uputama se naglašava da u praksi količina podataka ovisi o njegovoj namjeravanoj uporabi i zahtijeva se da to temeljno načelo ostaje nepromijenjeno, kad se iskazuje mjerni rezultat i njegova nesigurnost; bolje je pogriješiti da se osigura previše podataka nego premalo.

Posebne upute

Kad se iskazuje mjerni rezultat i kad je mjera nesigurnosti sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$, trebalo bi:

a) dati potpun opis određenja mjerne veličine Y,

b) dati procjenu y mjerne veličine Y i njezinu sastavljenu standardnu nesigurnost $u_c(y)$, te mjernu jedinicu,

c) uključiti, kad je to prikladno, relativnu sastavljenu standardnu nesigurnost

$$\frac{u_c(y)}{|y|},\ za\ |y| \quad 0.$$

Za daljnju uporabu rezultata korisno je prikazati procijenjeni efektivni broj stupnjeva slobode ν_{eff}.

Kad se iskazuje mjerni rezultat uz proširenu nesigurnost $U = k\ u_c(y)$, trebalo bi:

a) dati potpun opis određenja mjerne veličine Y,

b) navesti mjerni rezultat u obliku $Y = y \pm U$,

c) uključiti, kad je to prikladno, relativnu proširenu nesigurnost $\frac{U}{|y|}$, uz $|y| \quad 0$,

d) dati vrijednost faktora proširenja k,

e) dati približnu razinu pouzdanosti pridruženu intervalu $y \pm U$ i navesti kako je određena.

Ako se mjerenjem određuje istodobno više mjerenih veličina, tj. ako ono daje više procjena izlaznih veličina y_i, tada osim davanja y_i i $u_c(y_i)$ treba dati i *kovarijancijsku matricu* elemenata $u(y_i, y_j)$ ili *matricu korelacijskih koeficijenata* $r(y_i, y_j)$, a najbolje i jedno i drugo.

Procjene ulaznih i izlaznih veličina trebale bi se zaokruživati *u skladu* sa svojim nesigurnostima.

U iscrpnom izvještaju trebalo bi uz dane preporuke dati:

a) vrijednost svake procjene x_i ulazne veličine i njezine standardne nesigurnosti $u(x_i)$ zajedno s opisom kako su dobivene,

b) procijenjene kovarijance i procijenjene koeficijente korelacije pridružene svim procjenama ulaznih veličina koje su korelirane i metodama koje su primijenjene za njihovo dobivanje,

c) broj stupnjeva slobode za standardnu nesigurnost svake procjene ulazne veličine i kako je ona dobivena,

d) funkcijski odnos $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ i, kad se to čini korisnim, parcijalne derivacije ili koeficijente osjetljivosti $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Osim toga trebali bi biti dani i svi koeficijeti osjetljivosti koji su određeni eksperimentalnim ispitivanjima (Upute 1995).

Na kraju čitavog prikaza o iskazivanju mjerne nesigurnosti kažimo, da je o toj složenoj problematici dan samo širi pregled. Istaknimo da i same Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti, iako s više detalja, ipak daju u osnovi samo *opća pravila*, a ne iscrpne upute prilagođene određenoj grani tehnike. Bitno je, da su načela tih uputa namijenjena da budu primjenjiva na *širok spektar mjerenja* sa svrhom ujednačene terminologije i iskazivanja mjernog rezultata primjenom pojma mjerne nesigurnosti. Osnovno je, da se prihvaćeni pojam mjerne nesigurnosti temelji na *mjernim rezultatima* i *njihovoj procijenjenoj nesigurnosti*, a ne više na neutvrdivim veličinama, kao što su "istinita" vrijednost i pogreška. Istaknimo, da je svaka procjena standardne nesigurnosti bilo kojom metodom, a posebno sastavljene i proširene nesigurnosti, uvijek *odgovoran zadatak* mjeritelja pri kojem se bez analize ne mogu *primijeniti šablone*. Tako bi, npr. kod intervalne procjene rezultata bilo pogrešno, bez kritičke statističke analize, primijeniti recimo faktor 2 uz tvrdnju da se uz 95 % pouzdanosti unutar intervala 2σ nalazi i "istinita" vrijednost. U nekim slučajevima, ta pouzdanost može biti i manja od 50 % (Mendel 1987).

Završimo s citatom iz Uputa (1995):

"Proračun nesigurnosti nije ni rutinski ni čisto matematički zadatak, on ovisi o iscrpnom poznavanju naravi mjerene veličine i mjerenja. Kakvoća i upotrebljivost iskazane nesigurnosti mjernog rezultata prema tome konačno ovise o razumijevanju, kritičkoj analizi i poštenju onih koji pridonose određivanju njezine vrijednosti."

Stoga ne govorimo uzalud o petoj koordinati rezultata naših mjerenja koju određuje čovjek-mjeritelj.

LITERATURA

Benčić, D. (1998a): Pojam, značenje i iskazivanje mjerne nesigurnosti, Geodetski list 1, 23-30.
Benčić, D. (1998b): Proračun sastavnica nesigurnosti i sastavljene standardne nesigurnosti, Geodetski list 2, 89–98.
Godec, Z. (1995): Iskazivanje mjernog rezultata, "Graphis", Zagreb.
Mandel, J. (1987): The Nature of Repeatability and Reproducibility Journal of Quality Technology, Vol 19, No 1.
Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti (1995), Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Grafok, d.o.o., Zagreb

DETERMINATION OF THE EXPANDED UNCERTAINTY EXPRESSION OF MEASURING RESULT

ABSTRACT. This paper presents the determination of the expanded uncertainty in measurement and expression measuring results on the basis of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement published by the International Organisation of Standardisation, and refering to the international agreement.

Key words: expanded uncertainty, coverage factor.

Primljeno: 1998-02-10