UDK 528.088:53.088:006.8(100)
Pregledni znanstveni članak

PRORAČUN SASTAVNICA NESIGURNOSTI I SASTAVLJENE STANDARDNE NESIGURNOSTI

Dušan BENČIĆ – Zagreb*

SAŽETAK. U prošlom broju Geodetskog lista opisani su pojam i značenje mjerne nesigurnosti i istaknuti novi izrazi pri iskazivanju mjerne nesigurnosti. U ovome radu prikazuje se proračun sastavnica standardne nesigurnosti A-vrste i B-vrste i sastavljene standardne nesigurnosti na osnovi Uputa za iskazivanje mjerne nesigurnosti koje je objavila Međunarodna organizacija za normizaciju ISO, a na temelju međunarodnog dogovora.

Ključne riječi: sastavnica nesigurnosti, sastavljena standardna nesigurnost.

1. UVOD

Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti (Upute 1995) jedan su od najvažnijih dokumenata za jednoznačno tumačenje mjernih rezultata i mogućnosti njihove usporedbe, budući da su prihvaćene i preporučene od najistaknutijih organizacija u svjetskom mjeriteljstvu. Polazeći od *osnovnog pojma nesigurnosti* kao količinskog atributa, a uz *usmjerenje na rezultat*, odnosno *nesigurnost* oko točnosti navedenog *rezultata*, napuštaju se idealizirani pojmovi, kao što su "istinita" vrijednost i "pogreška".

Mjerna nesigurnost rezultata može se dobiti iz više sastavnica koje su podijeljene na dvije vrste. Način podjele i metode proračuna prikazat će se detaljnije, a zatim i sastavljena standardna nesigurnost na osnovi iskazanih standardnih nesigurnosti ulaznih veličina.

2. SASTAVNICE NESIGURNOSTI A-VRSTE I B-VRSTE

Preporuka INC-1 (Benčić 1998) svrstava sastavnice nesigurnosti na temelju *metode* njihova proračuna u dva razreda, na sastavnice A-vrste i B-vrste.

Svrstavanje sastavnica u razrede prema metodama ne treba shvatiti kao da postoji razlika u naravi sastavnica koje proizlaze iz dviju vrsta proračuna. Obje vrste proračuna temelje se na razdiobama vjerojatnosti, a sastavnice koje proizlaze iz tih vrsta proračuna količinski se iskazuju varijancama i standardnim odstupanjima. Treba shvatiti da su sve sastavnice nesigurnosti iste prirode i da se prema tome trebaju obrađivati na *istovjetan način*.

* Prof.dr.sc. Dušan Benčić, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10 000 Zagreb.

Svrstavanje sastavnica na "slučajne" i "sustavne" (DIN 1319, dio 3 1983) može biti u nekim slučajevima i nejasno, kad se općenito primjenjuje, budući da npr. "slučajna" sastavnica u jednom mjerenju može postati "sustavnom" u drugom mjerenju u kojem se rezultat prvog mjerenja rabi kao ulazni podatak. Svrstavanjem u razrede *metoda* proračuna sastavnica nesigurnosti, a ne samih sastavnica, izbjegava se takva nejasnoća. To *ne isključuje*, kad je to prikladno, združivanje pojedinih sastavnica proračunanih dvjema različitim metodama u određene skupine.

2.1. Proračun standardne nesigurnosti A-vrste

Taj se proračun temelji na opetovanim opažanjima mjerene veličine i poznatim statističkim računom procijenjene varijance.

U većini slučajeva najbolja je procjena očekivane vrijednosti pri mjerenjima u uvjetima ponovljivosti uz n neovisnih opažanja q_k[1] *aritmetička sredina* ili *prosjek* $\overline{q}$ iz tih n opažanja. Na osnovi pojedinačnih opažanja računa se na poznati način *procjena* varijance σ^2 razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable i označuje sa $s^2(q_k)$. Njezin pozitivni drugi korijen $s(q_k)$ naziva se *eksperimentalno standardno odstupanje*, koje je dano izrazom:

$$s(q_k)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k-\overline{q})^2},$$

a mjera je rasipanja opažanih vrijednosti q_k oko srednje vrijednosti $\overline{q}$.

Najbolja procjena varijance srednje vrijednosti: $\sigma^2(\overline{q})=\dfrac{\sigma^2}{n}$, dana je izrazom:

$$s^2(\overline{q})=\frac{s^2(q_k)}{n},$$

i naziva se *eksperimentalnom varijancom srednje vrijednosti*, a njezin pozitivni drugi korjen *eksperimentalnim standardnim odstupanjem srednje vrijednosti*. Ono količinski određuje mjeru koliko dobro $\overline{q}$ procjenjuje očekivanje veličine q, te je *mjera nesigurnosti* srednje vrijednosti $\overline{q}$ i prema tome *sastavnica nesigurnosti A-vrste*, ako se mjerna veličina mjeri izravno. Po tome i naziv *standardna nesigurnost A-vrste*.

Kad se mjerna veličina Y ne mjeri izravno nego se određuje iz N drugih veličina $X_1, X_2,\ldots, X_N$ *na temelju funkcijskog odnosa f*:

$$Y=f(X_1, X_2,\ldots, X_N),$$

onda su ulazne veličine $X_1, X_2,\ldots, X_N$ neposredno mjerene veličine koje i same mogu ovisiti o drugim veličinama, što uključuje ispravke i faktore ispravaka zbog sustavnih djelovanja. Procjena veličine X_i *(točnije procjena njezina očekivanja) u Uputama (1995) označuje se s* x_i (radi pojednostavljenja u Uputama se upotrebljava isti znak za fizičku veličinu (mjerenu veličinu) i za slučajnu varijablu koja predstavlja mogući ishod (opažanja te veličine)). *Procjena* mjerene veličine Y označena s y dobiva se *procjenom* ulaznih veličina $x_1, x_2,\ldots, x_N$ za vrijednosti tih N veličina $X_1, X_2,\ldots, X_N$, pa je procjena izlazne veličine y dana izrazom:

$$y=f(x_1, x_2,\ldots, x_N).$$

[1] Oznake prema Uputama (1995)

Za ulaznu veličinu X_i, određenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$, *standardna nesigurnost* $u(x_i)$ njezine procjene $x_i = \overline{X}_i$, uz $s^2(\overline{X}_i)$ (koje je najbolja procjena varijance srednje vrijednosti $\overline{X}_i$) jednaka je:

$$u(x_i) = s(\overline{X}_i),$$

a naziva se, kao što je rečeno, standardnom nesigurnošću A-vrste.

Procijenjeno standardno odstupanje pridruženo procjeni izlazne veličine ili mjernog rezultata y naziva se *sastavljenom standardnom nesigurnošću i označuje* $u_c(y)$.

U tom slučaju svako $u(x_i)$ proračunato je kao standardna nesigurnost A-vrste.

Kada je sastavljena standardna nesigurnost određena iz standardnih nesigurnosti i kovarijanca dobivenih samo iz proračuna A-vrste, označuje se s $u_{cA}(y)$.

2.2. Proračun standardne nesigurnosti B-vrste

Kad ulazna veličina X_i nije dobivena iz opetovanih opažanja, procjena varijance $u^2(x_i)$, odnosno standardna nesigurnost $u(x_i)$ proračunava se *znanstvenom prosudbom* koja se temelji na iskustvu i na raspoloživim podacima o mogućoj promjenjivosti $\overline{X}_i$, kao npr.: prijašnji mjerni podaci, iskustvo s instrumentima i tvarima, ili opće poznavanje ponašanja i svojstava instrumenta i bitnih tvari, proizvođačke specifikacije, podaci o potvrdama o umjeravanju i drugim potvrdama, podaci iz usporedbenih mjerenja, tj. mjernih vrijednosti ponovljivosti i obnovljivosti (Benčić, Dusman 1995), nesigurnosti dodijeljene referentnim podacima uzetim iz vjerodostojnih podataka iz priručnika.

Proračun standardne nesigurnosti B-vrste može biti pouzdan isto kao i proračun A-vrste, posebno ako se proračun A-vrste temelji na malom broju neovisnih opažanja.

Kad bi postojalo neograničeno vrijeme za iscrpna istraživanja svakog uzroka nesigurnosti u uvjetima ponovljivosti i obnovljivosti, a nesigurnosti pridružene svim tim uzrocima mogle bi se proračunati statističkom analizom niza opažanja, sve bi se sastavnice nesigurnosti dobile proračunom A-vrste. No kako to nije izvedivo, mnoge se sastavnice nesigurnosti moraju proračunati na koji drugi praktički izvediv način.

Kad je mjerni rezultat proizvod samo jednog mjerenja, sve su sastavnice nesigurnosti B-vrste (Godec 1995).

Standardna nesigurnost B-vrste, pri skupu malog broja ulaznih podataka, ali pouzdanih podataka, temelji se na *pretpostavljenoj* funkciji gustoće vjerojatnosti, tj. *apriornoj razdiobi.*

Promotrimo neke slučajeve:

1. Na temelju dostupnih podataka možemo samo tvrditi da postoji vjerojatnost 0,5 (ili 50 %), da vrijednost ulazne veličine X_i leži unutar intervala od a_- do a_+, a pretpostavljamo da je razdioba mogućih vrijednosti X_i približno *normalna*, onda se može uzeti da je središte intervala najbolja procjena x_i veličine X_i i da je standardno odstupanje:

$$u(x_i) = 1{,}48a,$$

gdje je

$$a = \frac{(a_+ - a_-)}{2},$$

budući da za normalnu razdiobu s očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ interval $\mu \pm \dfrac{\sigma}{1{,}48}$ obuhvaća 50 % te razdiobe.

Pretpostavimo li, da je vjerojatnost da X_i leži unutar tog intervala jednaka 68% (približno 2/3), tada se može uzeti da je:

$$u(x_i) = a,$$

budući da za normalnu razdiobu interval obuhvaća oko 68,3% te razdiobe.

2. U nekim slučajevima procjenjujemo da vrijednost veličine X_i leži unutar intervala od a_- do a_+ i očekujemo da je vjerojatnost, da je vrijednost veličine X_i u središnjem dijelu intervala jednaka *jedinici*, a vrijednost u blizini granice intervala su manje vjerojatne. Razumno je tada pretpostaviti *trapeznu razdiobu* (istokračan trapez) sa širinom osnovice jednakom $a_+ - a_- = 2a$ i gornje stranice $2a\beta$, gdje je $0 < \beta < 1$.

Uz pretpostavku trapezne razdiobe, procjena očekivane vrijednosti X_i je:

$$x_i = \frac{(a_- + a_+)}{2}, \text{ a varijanca:}$$

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6.$$

Posebni slučajevi nastaju, ako je $\beta = 1$, odnosno $\beta = 0$.

Ako je $\beta = 1$, dobivamo jednoličnu *pravokutnu razdiobu*, a to znači da je vjerojatnost, da vrijednost veličine X_i leži u intervalu od a_- do a_+ jednaka *jedinici*. Najbolja procjena očekivane vrijednosti X_i je središte tog intervala s varijancom:

$$u^2(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12},$$

i ako je razlika granica intervala $a_+ - a_- = 2a$, slijedi:

$$u^2(x_i) = \frac{a^3}{3},$$

gdje je a poluširina intervala, a standardno odstupanje:

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Granice intervala a_- i a_+ biraju se tako da vjerojatnost da razmatrana veličina leži izvan intervala bude zanemarivo mala.

Ako je $\beta = 0$, dobivamo *trokutnu razdiobu* s varijancom:

$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{6}.$$

Pri trokutnoj razdiobi najveća je vjerojatnost da vrijednost veličine X_i leži u sredini intervala, a zatim pravilno pada sve do ništice na kraju intervala.

Usporedimo pravokutnu i trokutnu razdiobu s apriornom normalnom razdiobom za interval $2a$.

Kako vjerojatnost da razmatrana veličina X_i leži izvan tog intervala treba biti zanemarivo mala, to pretpostavimo za normalnu razdiobu da interval obuhvaća približno 99,73 % te razdiobe. Uz standardno odstupanje σ normalne razdiobe s očekivanjem μ (sredina intervala $2a$), to će odgovarati području $\mu \pm 3\sigma$, odnosno veličini $\frac{a}{3}$ poluintervala a, dakle: $\mu \pm a$. Varijanca apriorne normalne razdiobe je prema tome $u^2(x_i) = \frac{a^2}{9}$.

Usporedimo li ovu varijancu s varijancom pravokutne razdiobe $\frac{a^2}{3}$ i trokutne $\frac{a^2}{6}$, vidimo da je varijanca normalne razdiobe najmanja, a varijanca trokutne razdiobe je između pravokutne i normalne, zbog toga što je apriorna trokutna razdioba gruba aproksimacija normalne razdiobe. Očito, najnepovoljnija je pravokutna razdioba, ali ona se mora primijeniti kad o mogućim vrijednostima veličine X_i u danom intervalu ne postoji nikakvo posebno znanje i pretpostavlja se da je *jednaka* vjerojatnost da X_i leži bilo gdje unutar tog intervala, a izvan intervala da je vjerojatnost jednaka nuli. Često takva skokovita razdioba vjerojatnosti nije prirodna, pa je razumno primijeniti simetričnu trapeznu razdiobu, kad za to imamo iskustvena znanja ili više mjernih podataka.

Primjer: Razlučivanje digitalnog pokazivanja

Ako su i sva opetovana pokazivanja istovjetna, mjerna nesigurnost nije jednaka ništici jer postoji područje ulaznih signala koji mogu dati isto pokazivanje. Kada je razlučivanje pokaznog uređaja jednako δ_x, vrijednost poticaja koji uzrokuje dano pokazivanje X može ležati s jednakom vjerojatnošću bilo gdje u intervalu od $X - \frac{\delta_x}{2}$ do $X + \frac{\delta_x}{2}$. Primijenit ćemo pravokutnu razdiobu vjerojatnosti intervala δ_x s varijancom:

$$u^2 = \frac{\delta_x^2}{12},$$

što znači standardnu nesigurnost pokazivanja $u = 0{,}29\ \delta_x$.

Primjer: Histereza

U instrumentu oko ravnotežne točke mogu postojati skrivene oscilacije. Ako je područje mogućih očitanja zbog tog uzroka δ_x, opet ćemo primijeniti pravokutnu razdiobu s varijancom $u^2 = \frac{\delta_x^2}{12}$ i standardnom nesigurnošću zbog histereze $u = 0{,}29\ \delta_x$.

U slučajevima kada nema drugih podataka, nesigurnost procjene x_i uzima se iz specifikacije proizvođača, potvrde o umjeravanju ili drugih izvora. Ako se iskazana nesigurnost navodi kao višekratnik standardnog odstupanja (npr. 3σ), to će standardna nesigurnost $u(x_i)$ biti jednaka navedenoj vrijednosti podijeljenoj s tim višekratnikom. Umjesto navedenog višekratnika može biti naveden interval s razinom pouzdanosti (npr. 90, 95 ili 99 %). Ukoliko nema drugih podataka može se pretpostaviti da je za računanje navedene nesigurnosti primijenjena normalna razdioba. U tom se slučaju navedena proširena nesigurnost dijeli s odgovarajućim primijenjenim faktorom (za navedene razine pouzdanosti redom: 1,64; 1,96 i 2,58), pa će se dobiti standardna nesigurnost procjene x_i.

3. SASTAVLJENA (SLOŽENA) STANDARDNA NESIGURNOST[2]

Standardna nesigurnost mjernog rezultata dobiva se primjenom metode zbrajanja varijanci sastavnica nesigurnosti A-vrste i B-vrste.

Kad su *ulazne veličine neovisne, sastavljena standardna nesigurnost* $u_c(y)$ pozitivni je drugi korijen sastavljene varijance $u_c^2(y)$ koja je dana izrazom:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i).$$

Svaka standardna nesigurnost ulazne veličine $u(x_i)$ proračunana je prema opisu proračuna standardne nesigurnosti A-vrste ili prema opisu B-vrste.

Sastavljena varijanca $u_c^2(y)$ temelji se na približnom određenju (linearizacija funkcije) razvojem u Taylorov red i izražava *zakon prijenosa nesigurnosti*.

Sastavljena varijanca $u_c^2(y)$ može se promatrati kao zbroj članova od kojih svaki predstavlja *procijenjenu* varijancu pridruženu *procjeni* izlazne veličine proizvedene *procijenjenom* varijancom pridruženu svakoj *procjeni* ulazne veličine x_i, pa se jednadžba sastavljene varijance piše i u obliku:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left[c_i u(x_i)\right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y),$$

gdje je:

$$c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i},\ u_i(y)\equiv |c_i|\, u(x_i).$$

Veličine c_i nazivaju se često *koeficijentima osjetljivosti* jer pokazuju kako se procjena vrijednosti izlazne veličine mijenja s promjenama vrijednosti procjena ulaznih veličina.

Kad su *ulazne veličine korelirane*, odgovarajući izraz za *sastavljenu varijancu* $u_c^2(y)$ pridruženu mjernom rezultatu glasi:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\, u(x_i,x_j)$$

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\, u(x_i,x_j),$$

gdje su x_i i x_j procjene veličina X_i i X_j, a $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ procijenjena je kovarijanca pridružena procjenama x_i i x_j.

Stupanj korelacije između x_i i x_j opisuje se *procijenjenim koeficijentom korelacije*:

$$r(x_i,x_j)=\frac{u(x_i,x_j)}{u(x_i)\,u(x_j)},$$

[2] U Uputama (6.) primijenjen je isključivo izraz "sastavljena standardna nesigurnost". Prema napomeni recenzenta ovog rada, nesigurnost mjernog rezultata dobivenog izravnim ili posrednim mjerenjem općenito je sastavljena od više komponenti. Kako bi ih međusobno razlikovali, za mjerne rezultate dobivene posrednim mjerenjem uveden je i pojam "složena nesigurnost".

gdje je:

$$-1 \leq r(x_i, x_j) \leq 1.$$

Kako se kovarijancijski član sastavljene varijance može izraziti kao:

$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)\,u(x_j)\,r(x_i,x_j)$, sastavljenu varijancu možemo izraziti i:

$$u_c^2(y)=\sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2(x_i)+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_j\;u(x_i)\,u(x_j)\,r(x_i,x_j).$$

U posebnom slučaju, kad su sve procjene ulaznih veličina korelirane, uz $r(x_i,x_j) = +1$, bit će:

$$u_c^2(y)=\left(\sum_{i=1}^{N}c_i\;u(x_i)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x}u(x_i)\right)^2.$$

Prema tome, sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ u tom je slučaju jednaka pozitivnom drugom korjenu *linearnog zbroja* članova koji predstavljaju promjene procjene izlazne veličine uzrokovane standardnim nesigurnostima svake od procjena ulaznih veličina.

Iz ovog prikaza osnovnih računanja sastavljene standardne nesigurnosti uočujemo analogiju s matematičkim modelima poznatim iz teorije pogrešaka. No poznati izrazi dani su i kako bi se dobio uvid ne samo u novu terminologiju, već i shvatili pojmovi na osnovi međunarodnog dogovora. Posebno se to odnosi na shvaćanje slučajnih i sustavnih odstupanja, a što je pri njihovu odvajanju moglo uzrokovati niz nedoumica. Kako pri računanju nesigurnosti nije nužno svrstavanje sastavnica na "slučajne" i "sustavne" (budući da se obrađuju na isti način), to nesigurnost nije ni "slučajne" ni "sustavne" prirode, već je uvjetovana međuodnosom veličina u matematičkom modelu koji opisuje mjerenje.

U tradicionalnom nazivlju često se govori o "općem zakonu prijenosa (prirasta) pogrešaka". U tom se zakonu matematički utvrđuje oblik *prijenosa pogrešaka* mjerenih veličina na traženu veličinu, ako je ona određena matematičkom povezanošću, odnosno funkcijom. Kad su poznate srednje pogreške mjerenih veličina, može se odrediti i srednja pogreška tražene veličine (Feil 1989). No jednadžbu zakona prijenosa pogrešaka prikladno je nazivati *zakonom prijenosa nesigurnosti*, jer ona pokazuje kako se nesigurnosti ulaznih veličina (ako su *jednake standardnim odstupanjima* razdioba vjerojatnosti tih veličina) sastavljaju da bi dale *nesigurnost izlazne veličine* (ako je ta nesigurnost jednaka standardnom odstupanju razdiobe vjerojatnosti izlazne veličine) (Upute 1995).

Veza između nesigurnosti i pogreške može se razumjeti tumačenjem zakona prijenosa nesigurnosti s gledišta nepoznate "istinite" vrijednosti ulazne veličine i pogreške, uz *pretpostavku* da je očekivanje razdiobe vjerojatnosti svake pogreške *jednako nuli*. Bez obzira na to smatra li se standardna nesigurnost mjerom rasipanja vjerojatnosti razdiobe ulazne veličine, ili mjerom rasipanja vjerojatnosti pogreške te veličine oba pristupa daju iste brojčane rezultate, pa pojam nesigurnosti, koji je danas prihvaćen, uklanja *mogućnost neispravne* upotrebe izraza pogreške i nesigurnosti. Dakle, ako je težište u opažanoj (ili procijenjenoj) vrijednosti veličine i opažanoj (ili procijenjenoj) njezinoj promjenjivosti, to čini svako spominjanje *pogreške* nepotrebnim (Upute 1995).

Primjer: Komparacija mjerne vrpce

U Laboratoriju za mjerenja i mjernu tehniku Geodetskog fakulteta u Zagrebu obavljaju se komparacije mjernih vrpca različitih duljina na osnovi usporedbe s invarnom vrpcom duljine 12 m (sa certifikatom J. CARPENTLER PARIS 2567H). Vrpce se polažu paralelno na horizontalno položene polirane čelične tračnice učvršćene na zidu i zatežu propisanom silom preko koloturja na kraju tračnice. Zbog duljine invarne vrpce kompariranje se obavlja na duljinama po 10 m. Mjerenje razlika duljina obavlja se finim pomicanjem mikrometra s mjernim satom s podatkom očitanja 0,01 mm ugrađenim u nosač s povećalom i nitnim križem za viziranje crta vrpci uz telecentrični hod zraka svjetlosti (kako bi se uklonio svaki utjecaj paralakse pri viziranju). Pri komparaciji će se izvršiti očitanja mikrometra (po dva na crtice svake vrpce) i to na početku i na kraju duljine 10 m, te se uzima srednja vrijednost.

No ovaj jednostavni mjerni zadatak imat će složen proračun mjerne nesigurnosti rezultata.

Matematički model i proračun sastavljene standardne nesigurnosti

Rezultat usporedbe mjerne vrpce i invarne vrpce je *razlika d* njihovih duljina:

$$d = l(1+\alpha\Delta t) - l_i(1+\alpha_i\Delta t_i), \quad \text{gdje je}$$

l	mjerena duljina vrpce koja se umjerava kod 20 °C,
l_i	duljina invarne vrpce pri 20 °C kako je dana u potvrdi o umjeravanju (certifikatu),
α i α_i	koeficijenti toplinskog širenja mjerne vrpce, odnosno invarne vrpce,
Δt i Δt_i	*odstupanja temperature* od referencijske temperature od 20 °C mjerne vrpce, odnosno invarne vrpce.

Mjerena veličina dana je prema tome izrazom:

$$l = \frac{l_i(1+\alpha_i\Delta t_i)+d}{(1+\alpha\Delta t)}, \text{ a razvojem u Taylorov red:}$$

$$l = l_i + d + l_i\,(\alpha_i\Delta t_i - \alpha\Delta t) + \ldots$$

Ako označimo:

$\delta t = \Delta t - \Delta t_i$, kao razliku temperature između mjerne vrpce i invarne vrpce,
$\delta\alpha = \alpha - \alpha_i$ kao razliku njihovih koeficijenata toplinskog širenja, to će biti:

$$l = l_i + d - l_i\left[\delta\alpha\Delta t + \alpha_i\delta t\right].$$

Pretpostavljamo, da $\delta\alpha$ i α_i, Δt i δt nisu korelirane veličine.
Kako je $l = f(l_i,\ d,\ \alpha_i,\ \Delta t,\ \delta\alpha$ i $\delta t)$, sastavljena varijanca nesigurnosti bit će:

$$u_c^2(l) = c_i^2 u^2(l_i) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_i}^2 u^2(\alpha_i) + c_{\Delta t}^2 u^2(\Delta t) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta t}^2 u^2(\delta t).$$

Koeficijenti osjetljivosti su:

$$c_i = \frac{\partial l}{\partial l_i} = 1 - (\delta\alpha\Delta t + \alpha_i\delta t) = \pm 1$$

$$c_d = \frac{\partial l}{\partial d} = 1,$$

$$c_{\alpha_i} = \frac{\partial l}{\partial \alpha_i} = -l_i \delta t,$$

$$c_{\Delta t} = \frac{\partial l}{\partial \Delta t} = -l_i \delta \alpha,$$

$$c_{\delta\alpha} = \frac{\partial l}{\partial \delta\alpha} = -l_i \Delta t,$$

$$c_{\delta t} = \frac{\partial l}{\partial \delta t} = -l_i \alpha_i.$$

1. *Nesigurnost umjeravanja invarne vrpce* $u(l_i)$ dana je u certifikatu sa standardnom nesigurnošću za duljinu 10 m: $u(l_i)$ = 0,034 mm (sastavnica B-vrste)

2. *Nesigurnost izmjerene razlike duljina* $u(d)$ može se odrediti prethodnim ispitivanjima na osnovi više serija mjerenja. Prema izvršenim ispitivanjima standardna nesigurnost jedne serije $u(\bar{d})$ = 0,056 mm (Tirić 1992).

Za određivanje ukupne standardne nesigurnosti $u(d)$ mjerene razlike treba uzeti u obzir i standardnu nesigurnost mikrometra zbog slučajnih i sustavnih odstupanja.

3. *Nesigurnost koeficijenta toplinskog širenja invarne vrpce* $u(\alpha_i)$ nije dana u certifikatu. Ako uzmemo granice ± 1 × 10^{-6} °C^{-1}, onda je uz apriornu pravokutnu razdiobu standardna nesigurnost:

$$u(\alpha_i) = 1 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1} / \sqrt{3} = 0{,}6 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1} \text{ (sastavnica B-vrste).}$$

4. *Nesigurnost odstupanja temperature mjerne vrpce od referencijske temperature* $u(\Delta t)$. Ako se temperatura mjerne prostorije mjeri običnim živinim termometrom, nesigurnost tog mjerenja bit će povećana. Daljnji je nepovoljan faktor što prostorija nema klimatizaciju. Može se pretpostaviti, i uz potrebno održavanje stalne temperature, da su granice nesigurnosti mjerenja temperature ± 0,7 °C. Primjenom pravokutne razdiobe standardna nesigurnost iznosi:

$$u(\Delta t) = 0{,}7\ {}^\circ\mathrm{C} / \sqrt{3} = 0{,}4\ {}^\circ\mathrm{C} \text{ (sastavnica B-vrste).}$$

5. *Nesigurnost razlike koeficijenata toplinskog širenja* $u(\delta\alpha)$. Ako primijenimo granice promjena razlike koeficijenata toplinskog širenja ± 1 × 10^{-6} °C^{-1}, (pri komparaciji čelične vrpce) to je uz pravokutnu razdiobu standardna nesigurnost:

$$u(\delta\alpha) = 1 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1} / \sqrt{3} = 0{,}58 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1} \text{ (sastavnica B-vrste).}$$

6. *Nesigurnost razlike temperature vrpca* $u(\delta t)$. Ako za tu razliku pretpostavimo granice intervala ± 0,1 °C, standardna nesigurnost razlike je:

$$u(\delta t) = 0{,}1\ {}^\circ\mathrm{C} / \sqrt{3} = 0{,}06\ {}^\circ\mathrm{C} \text{ (sastavnica B-vrste).}$$

Analiza pokazuje da su sastavnice nesigurnosti uz dane pretpostavke ad 3., 4. i 6. zanemarive s obzirom na zahtjevanu točnost. Na utjecaj nesigurnosti razlike koeficijenata toplinskog širenja znatno utječe izmjereno odstupanje temperature Δt. Ukoliko je ono veće od 1 °C, mora se ta sastavnica uzeti u obzir.

Vidimo da na mjernu nesigurnost rezultata komparacije bitno utječu nesigurnost umjeravanja invarne vrpce i nesigurnost izmjerene razlike duljina pri komparaciji, što se i moglo očekivati.

Ako je standardna nesigurnost mikrometra, odnosno komparatora zanemariva i ako je komparacija izvedena u uvjetima da se mogu ostale nesigurnosti sastavnica sastavljene nesigurnosti zanemariti, to će, uz danu standardnu nesigurnost izmjerene razlike duljina jedne serije (uzeta kao sastavnica B-vrste), sastavljena varijanca biti:

$$u_c^2(l) = u^2(l_i) + u^2(d),$$

$$u_c^2(l) = (0{,}034\ \mathrm{mm})^2 + (0{,}056\ \mathrm{mm})^2,$$

a sastavljena standardna nesigurnost

$$u_{cB} = 0{,}066\ \mathrm{mm},$$

dobivena na osnovi proračuna sastavnica B-vrste pri usporedbi duljine vrpci od 10 m.

U sljedećem broju Geodetskog lista biti će prikazano: *Određivanje poširene nesigurnosti i iskazivanje mjernog rezultata.*

LITERATURA

Benčić, D. (1998): Pojam, značenje i iskazivanje mjerne nesigurnosti, Geodetski list 1, 23-30.

Benčić, D., Dusman, F. (1995): Pojam i značenje mjerne ponovljivosti i obnovljivosti, Geodetski list 2, 107-120.

Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilišni udžbenik, Zagreb.

Godec, Z. (1995): Iskazivanje mjernog rezultata, "Graphis", Zagreb.

Tirić, D. (1992): Komparacija vrpce, diplomski rad, Geodetski fakultet, Zagreb.

Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti (1995), Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Grafok, d.o., Zagreb.

DIN 1319, Teil 3, 1983.

CALCULATION OF COMPONENTS OF UNCERTAINTY AND COMBINED STANDARD UNCERTAINTY

ABSTRACT. In the previous issue of Geodetski list the concept and the meaning of measuring uncertainty were described and the new terms to the expression uncertainty in measurement pointed out. This paper presents the calculation of the standard uncertainty components of A-type and B-type and the combined uncertainty on the basis of Guide to the expression of uncertainty in measurement published by the International Standards Organisation.

Key words: component of uncertainty, combined standard uncertainty.

Primljeno: 1998-02-10