

NAJUDALJENIJA TOČKA LOKSODROME OD ORTODROME

Radimir VIHER, Miljenko LAPAINE – Zagreb*

SAŽETAK. U radu je prikazan problem određivanja najudaljenije točke loksodrome od ortodrome pri čemu obje prolaze dvjema zadanim točkama. Najprije je objašnjena klasična metoda rješavanja problema prema Kavrajskome, a zatim je iznijeta vlastita metoda. Objе se metode svode na kraju na rješavanje nelinearne jednađžbe. Određivanje najudaljenijih točaka loksodrome od ortodrome ilustrira se dvama primjerima.

Ključne riječi: loksodroma, ortodroma

1. UVOD

Pretpostavit ćemo da Zemlja ima sferni oblik, inače bi problem bio bitno teži. Poznato je da se jednađžba loksodrome na sferi parametriziranoj geografskom parametризacijom može dobiti rješavanjem diferencijalne jednađžbe

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (1)$$

pri čemu je $\alpha = \operatorname{const}$. kut između loksodrome i meridijana u njihovu presjecištu. Opće rješnje jednađžbe (1) može se napisati u obliku

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \lambda_0, \quad (2)$$

pri čemu se konstante λ_0 i α mogu odrediti na različite načine. Na primjer, može se postaviti uvjet da loksodroma prolazi kroz dvije zadane točke $A = (\varphi_1, \lambda_1)$ i $B = (\varphi_2, \lambda_2)$. U tom slučaju vrijedi (Lapaine, 1997):

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_2 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \lambda_1 \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (3)$$

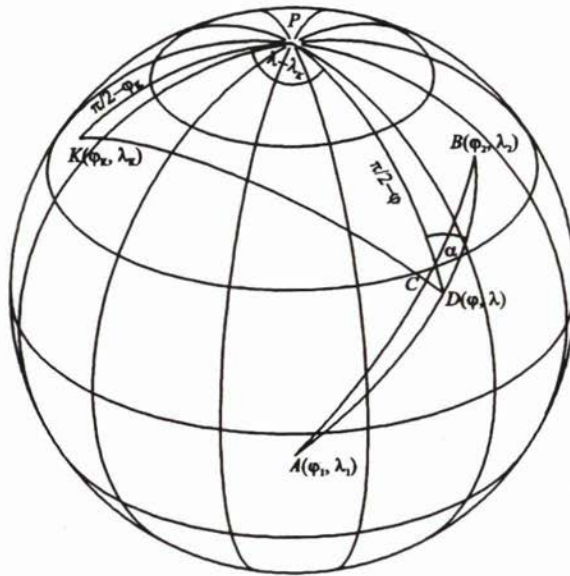
* Dr. sc. Radimir Viher, Građevinski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, doc. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mlapaine@public.srce.hr

i

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \quad (4)$$

Neka je nadalje zadana ortodroma koja prolazi istim točkama A i B . Da bismo odredili onu točku loksodrome koja je najudaljenija od ortodrome možemo postupiti na dva bitno različita načina. Prvi je u načelu lakši jer se upotrebljavaju samo formule sferne trigonometrije, dok je drugi složeniji jer se upotrebljava, da je tako nazovemo, sferna analiza, ali zato ima prednosti u donekle lakšoj tehnici računanja. Prvi je način primijenio Kavrajskij (1959), dok je drugi način razvijen samostalno.

2. PRVA METODA



Slika 1. Određivanje najudaljenije točke loksodrome od ortodrome

Neka je K pol glavne kružnice koja prolazi točkama A i B , a P sjeverni pol (vidi sliku 1). Potom neka je KD luk one glavne kružnice koja prolazi kroz K i za koju je luk CD maksimalne duljine. Pritom je točka C presjek s ortodromom koja prolazi točkama A i B , a D presjek s loksodromom koja prolazi istim točkama A i B . U tom će slučaju luk KD u točki D biti okomit na loksodromu. Promotrimo sada sferni trokut KDP i napišimo za njega poučak o kotangensima:

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin (\lambda - \lambda_K) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_K \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos (\lambda - \lambda_K), \quad (5)$$

ili

$$\operatorname{tg} \alpha \sin (\lambda - \lambda_K) + \sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_K) = \operatorname{tg} \varphi_K \cos \varphi \quad (6)$$

Da bismo našli vezu između λ_K , φ_K i λ_1 , φ_1 , λ_2 , φ_2 napišimo najprije kosinusev poučak za stranicu AK sfernog trokuta

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_K \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_K \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \right) \cos (\lambda_1 - \lambda_K) \quad (7)$$

ili

$$\sin \varphi_K \sin \varphi_1 + \cos \varphi_K \cos \varphi_1 \cos (\lambda_1 - \lambda_K) = 0 \quad (8)$$

Analogno u slučaju sfernog trokuta $\triangle BPK$ dobivamo

$$\sin \varphi_K \sin \varphi_2 + \cos \varphi_K \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_K) = 0 \quad (9)$$

Nakon eliminiranja veličine φ_K iz (8) i (9) te nakon sređivanja dobili smo sljedeće formule

$$\operatorname{tg} \lambda_K = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \cos \lambda_2 - \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \lambda_1}{\operatorname{tg} \varphi_2 \sin \lambda_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \lambda_2} \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_K = -\operatorname{ctg} \varphi_1 \cos (\lambda_1 - \lambda_K) = -\operatorname{ctg} \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_K). \quad (11)$$

Dakle, problem nalaženja najudaljenije točke loksodrome od ortodrome svodi se na rješavanje sljedećeg sustava od dvije jednačbe s dvije nepoznanice

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \lambda_0 \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \sin (\lambda - \lambda_K) + \sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_K) = \operatorname{tg} \varphi_K \cos \varphi, \quad (13)$$

pri čemu se $\operatorname{tg} \alpha$ i λ_0 odrede iz uvjeta da loksodroma prolazi točkama A i B , a λ_K i φ_K se izračunaju pomoću formula (10) i (11).

Ukoliko još želimo izračunati maksimalnu udaljenost, tj. duljinu luka CD , tada napišemo kosinusev poučak za stranicu KD sfernog trokuta $\triangle KDP$ i imamo

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_K \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \quad (14)$$

$$+ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_K \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos (\lambda - \lambda_K)$$

$$-\sin \delta = \sin \varphi_K \sin \varphi + \cos \varphi_K \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_K), \quad (15)$$

gdje smo s δ označili središnji kut koji pripada luku CD na sferi. Duljina luka CD bit će

$$s = R \delta$$

gdje je R odabrani polumjer Zemljine sfere.

3. NOVA METODA

Kada bismo tražili maksimalnu udaljenost točaka neke krivulje na sferi od glavne kružnice koja leži u ravni XY (ekvator), tada analogno uvjetu $y' = 0$ (u slučaju ravninske krivulje) u ovom slučaju stoji uvjet

$$\vec{k} \cdot \vec{t} = 0, \quad (16)$$

pri čemu je \vec{t} tangencijalni vektor te krivulje (vidi sliku 2). U slučaju traženja maksimalne udaljenosti točaka neke krivulje na sferi od glavne kružnice koja prolazi točkama A i B dobivamo analogno (16)

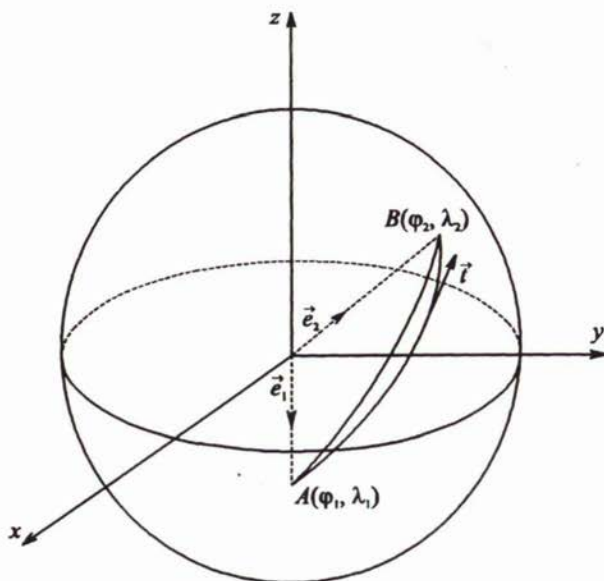
$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{t} = 0, \quad (17)$$

pri čemu su \vec{e}_1 i \vec{e}_2 jedinični vektori vektora \overline{OA} i \overline{OB} . Ako je $\varphi = \varphi(\lambda)$ jednadžba te krivulje, tada derivirajući vektorsku funkciju

$$\vec{r}(\lambda) = \cos \lambda \cos \varphi(\lambda) \vec{i} + \sin \lambda \cos \varphi(\lambda) \vec{j} + \sin \varphi(\lambda) \vec{k} \quad (18)$$

po λ dobivamo (jer je (18) vektorska jednadžba krivulje $\varphi = \varphi(\lambda)$ na jediničnoj sferi)

$$\vec{t} = \vec{r}'(\lambda) = (-\varphi' \cos \lambda \sin \varphi - \sin \lambda \cos \varphi) \vec{i} + (-\varphi' \sin \lambda \sin \varphi + \cos \lambda \cos \varphi) \vec{j} + \varphi' \cos \varphi \vec{k}. \quad (19)$$



Slika 2. Određivanje najudaljenije točke loksodrome od ortodrome vlastitom metodom

Analogno (18) izražavaju se i jedinični vektori

$$\vec{e}_i = \cos \lambda_i \cos \varphi_i \vec{i} + \sin \lambda_i \cos \varphi_i \vec{j} + \sin \varphi_i \vec{k}, \quad (i=1,2). \quad (20)$$

Uz pomoć formule (20) nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 &= (\sin \lambda_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \lambda_2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) \bar{i} + \\ &+ (\sin \varphi_1 \cos \lambda_2 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \lambda_1 \cos \varphi_1) \bar{j} + \\ &+ \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \bar{k} = A \bar{i} + B \bar{j} + C \bar{k}.\end{aligned}\quad (21)$$

Iz (17), (19) i (21) slijedi

$$\begin{aligned}\bar{i} \cdot (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) &= A (-\varphi' \cos \lambda \sin \varphi - \cos \varphi \sin \lambda) + \\ &+ B (-\varphi' \sin \lambda \sin \varphi + \cos \varphi \cos \lambda) + C \varphi' \cos \varphi = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Iz (22) dobivamo nakon dijeljenja s $\cos \varphi$, uvažavajući (1), sljedeću relaciju

$$(A \cos \lambda + B \sin \lambda) \sin \varphi - C \cos \varphi = B \operatorname{tg} \alpha \cos \lambda - A \operatorname{tg} \alpha \sin \lambda.\quad (23)$$

Ako podijelimo (23) s $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2$, dobivamo, uvažavajući (21),

$$(A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda) \sin \varphi - \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi = \operatorname{tg} \alpha (B_1 \cos \lambda - A_1 \sin \lambda),\quad (24)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}A_1 &= \sin \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2 - \sin \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1 \\ B_1 &= \cos \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_1 - \cos \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_2.\end{aligned}\quad (25)$$

Primjenom (25) dobivamo

$$\begin{aligned}A_1 \cos \lambda + B_1 \sin \lambda &= \operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_2) - \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda - \lambda_1) \\ \operatorname{tg} \alpha (B_1 \cos \lambda - A_1 \sin \lambda) &= \operatorname{tg} \alpha [\operatorname{tg} \varphi_1 \cos (\lambda - \lambda_2) - \operatorname{tg} \varphi_2 \cos (\lambda - \lambda_1)]\end{aligned}\quad (26)$$

Iz (24) i (26) na kraju slijedi

$$\begin{aligned}[\operatorname{tg} \varphi_1 \sin (\lambda_2 - \lambda) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin (\lambda - \lambda_1)] \sin \varphi + \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi &= \\ = \operatorname{tg} \alpha [\operatorname{tg} \varphi_2 \cos (\lambda - \lambda_1) - \operatorname{tg} \varphi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda)],\end{aligned}\quad (27)$$

što zajedno s

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \lambda_0\quad (28)$$

čini sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice λ i φ . Dakle, na taj smo način došli do drugog oblika jednadžbe (6) u kojemu nema veličina λ_K i φ_K . Do tog oblika može se doći i iz (6), eliminacijom λ_K i φ_K uz pomoć formula (10) i (11), ali nakon poduzetog računa.

Na kraju treba pripomenuti da je prednost sustava (27), (28) s obzirom na sustav (12), (13) u tome što u njemu nema posrednih veličina λ_K i φ_K .

4. NUMERIČKI PRIMJERI

Jednadžbe (27) i (28) čine sustav od dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Budući da je u jednadžbi (28) geografska duljina λ izražena eksplicitno pomoću geografske širine φ , to se sama po sebi nameće mogućnost reduciranja sustava na jednu nelinearnu jednadžbu po φ :

$$F(\varphi) = 0, \quad (29)$$

gdje smo označili

$$F(\varphi) = [\operatorname{tg} \varphi_1 \sin(\lambda_2 - \lambda) + \operatorname{tg} \varphi_2 \sin(\lambda - \lambda_1)] \sin \varphi + \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha [\operatorname{tg} \varphi_2 \cos(\lambda - \lambda_1) - \operatorname{tg} \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda)], \quad (30)$$

a λ je u formuli (30) izražen pomoću φ relacijom (28). Rješenja jednadžbe (29) tražimo u intervalu $[\varphi_1, \varphi_2]$.

Za numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi postoji više metoda (Lončar 1972), na primjer iterativna metoda, Newtonova metoda ili metoda tangente, metoda sekante itd. U sljedeća dva primjera primijenjena je metoda raspolavljanja.

Primjer 1.

Sporazumom s Italijom iz 1968. koji je stupio na snagu 1970., određeno je razgraničenje epikontinentskog pojasa na području Jadranskog mora (Sporazum 1970), a prigodom razgraničenja primijenjeno je uglavnom načelo "srednje linije" (Stražičić 1989).

Prema tom sporazumu liniju razgraničenja epikontinentskog pojasa čine lukovi *Velikog kruga* (istaknuli autori ovog rada) između točaka određenih vrijednostima geografskih širina i duljina koje su navedene u popisu. Kako se može pročitati u sporazumu, koordinate su određene grafički na pomorskim kartama HIJRM mjerila 1:750000, i to br. 101 (izdanje veljače 1963., s ispravicama do lipnja 1966.) i broj 102 (izdanje prosinca 1952. s ispravicama do lipnja 1966.) i na odgovarajućoj talijanskoj pomorskoj karti. Popis sadrži 43 točke. Prvih 33 točaka i točke 37 do 43 dane su brojačno, dok su točke 34 do 36 dane opisno. Budući da su karte o kojima je riječ izrađene uzimanjem rotacijskog elipsoida Besselovih dimenzija za model Zemlje, onda je pojam 'Veliki krug' pogrešno upotrijebljen. Naime, na rotacijskom elipsoidu nema 'Velikih krugova', a jedine su kružnice paralele. Najvjerojatnije se mislilo na geodetske linije koje su na sferi zaista velike kružnice.

Međutim, u svrhu ovoga rada možemo pretpostaviti da se radi o koordinatama na Zemljinoj sferi polumjera $R = 6370$ km. Za svake dvije susjedne točke iz spomenutog popisa riješili smo nelinearni sustav jednadžbi (27), (28). Nakon toga mogli smo izračunati koliko je najudaljenija točka loksodrome udaljena od pripadne ortodrome. Rezultati su dani pregledno u tablici 1.

Tablica 1. Geografske koordinate φ, λ točaka na crti razgraničenja epikontinentskog pojasa između Italije i Hrvatske, rješenje φ_D, λ_D sustava jednadžbi (27), (28) i udaljenost s najudaljenije točke loksodrome od ortodrome u metrima

Točka	φ	λ	φ_D	λ_D	s [m]
1.	45°27'12"	13°12'54"	45°26'21"0042	13°11'59"9977	0.18
2.	45°25'30"	13°11'06"	45°22'48"0424	13°08'32"9792	1.58
3.	45°20'06"	13°06'00"	45°18'27"0158	13°04'53"9946	0.38
4.	45°16'48"	13°03'48"	45°14'33"0295	13°02'26"9909	0.63
5.	45°12'18"	13°01'06"			

Točka	φ	λ	φ_D	λ_D	s [m]
6.	45°11'00"	13°00'06"	45°11'39"0025	13°00'35"9990	0.07
			45°04'42"2309	13°02'12"0388	2.59
7.	44°58'24"	13°04'18"	44°52'21"2129	13°05'12"0156	1.04
			44°45'12"0070	13°06'21"0008	0.05
8.	44°46'18"	13°06'06"	44°37'12"2770	13°07'09"0106	0.72
			44°29'24"0047	13°09'12"0037	0.40
9.	44°44'06"	13°06'36"	44°28'18"0002	13°11'12"0003	0.04
			44°22'54"1573	13°19'45"1139	11.77
10.	44°30'18"	13°07'42"	44°15'12"0364	13°32'57"0345	4.32
			44°11'42"0058	13°39'12"0029	0.26
11.	44°28'30"	13°10'42"	44°05'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°59'12"0131	14°03'03"0072	0.69
12.	44°28'06"	13°11'42"	43°56'00"0168	14°07'33"0116	1.27
			43°48'39"1859	14°15'48"0806	7.26
13.	44°17'42"	13°27'48"	43°41'36"0114	14°22'36"0042	0.37
			43°39'24"0037	14°24'21"0011	0.01
14.	44°12'42"	13°38'06"	43°37'15"0106	14°25'39"0025	0.20
			43°34'03"0199	14°28'15"0085	0.79
15.	44°10'42"	13°40'18"	43°31'09"0064	14°31'00"0023	0.21
			43°27'45"0322	14°33'45"0106	0.93
16.	44°00'42"	14°01'12"	43°19'03"2350	14°40'57"0816	7.37
			43°11'30"0084	14°47'12"0026	0.23
17.	43°57'42"	14°04'54"	43°07'00"0635	14°51'36"0270	2.69
			43°03'42"1455	13°50'45"1377	17.67
18.	43°54'18"	14°10'12"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
19.	43°43'00"	14°21'24"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
20.	43°40'12"	14°23'48"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
21.	43°38'36"	14°24'54"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
22.	43°35'54"	14°26'24"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
23.	43°32'12"	14°30'06"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
24.	43°30'06"	14°31'54"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
25.	43°25'24"	14°35'36"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
26.	43°12'42"	14°46'18"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
27.	43°10'18"	14°48'06"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
28.	43°03'42"	14°55'06"	43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67
			43°00'42"1455	13°50'45"1377	17.67

Točka	φ	λ	φ_D	λ_D	s [m]
			43°02'18"0114	14°56'33"0047	0.47
29.	43°00'54"	14°58'00"	43°00'06"0037	14°59'24"0026	0.33
30.	42°59'18"	15°00'48"	42°53'30"1962	15°05'15"0587	5.43
31.	42°47'42"	15°09'42"	42°42'12"1766	15°15'51"0750	8.00
32.	42°36'42"	15°22'00"	42°33'09"0736	15°33'30"0887	19.25
33.	42°29'36"	15°45'00"			
37.	42°15'54"	16°37'18"	42°11'27"1158	16°47'00"0891	14.84
38.	42°07'00"	16°56'42"	42°03'12"0845	17°04'54"0631	10.62
39.	41°59'24"	17°13'06"	41°57'00"0337	17°16'03"0141	1.73
40.	41°54'36"	17°19'00"	41°52'15"0323	17°28'12"0426	11.99
41.	41°49'54"	17°37'24"	41°44'00"2038	17°48'42"1286	20.86
42.	41°38'06"	18°00'00"	41°34'03"0961	18°06'27"0491	7.27
43.	41°30'00"	18°12'54"			

U prva dva stupca u tablici 1. navedene su geografske koordinate točaka iz Sporazuma (1970), samo što su kutne veličine izražene u stupnjevima, minutama i sekundama, dok su u Sporazumu stupnjevi i minute s jednom decimalom. U druga dva stupca u tablici 1. navedene su geografske koordinate točke D na loksodromi koja je najudaljenija od pripadne ortodrome. Geografske koordinate te točke dobivene su rješavanjem nelinearnog sustava (27), (28). U posljednjem stupcu u tablici 1. navedene su udaljenosti najudaljenije točke loksodrome od ortodrome izražene u metrima.

Iz tablice 1 vidi se da je najveće odstupanje loksodrome od ortodrome na izabranom primjeru bilo oko 20 metara. Je li to značajan iznos ili se može zanemariti, ovisit će o konkretnoj primjeni.

Primjer 2.

Kao drugi primjer izabran je trokut Pula, Osijek, Dubrovnik. Polazne koordinate i izračunane vrijednosti dane su pregledno u tablici 2.

Tablica 2. Geografske koordinate φ , λ Pule, Osijeka i Dubrovnika, rješenje φ_D , λ_D sustava jednadžbi (27), (28) i udaljenost s najudaljenije točke loksodrome od ortodrome u metrima

Točka	φ	λ	φ_D	λ_D	s [m]
Pula	44°52'	13°52'			
			45°12'32"	16°16'21"	2871
Osijek	45°33'	18°41'			
			44°07'14"	18°23'56"	279
Dubrovnik	42°40'	18°07'			
			43°46'25"	15°59'51"	2693
Pula	44°52'	13°52'			

Iz tablice 2 može se vidjeti da je najudaljenija točka loksodrome od odgovarajuće ortodrome između Pule i Osijeka te između Pule i Dubrovnika nešto manja od 3 km. Udaljenost najudaljenije točke loksodrome od pripadne ortodrome između Osijeka i Dubrovnika manja je od 300 m jer je razlika geografskih duljina tih gradova relativno mala.

Uočimo na kraju da u oba primjera, za sve parove točaka vrijedi *približno*

$$\varphi_D = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \lambda_D = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Odgovor na pitanje je li to slučajno ili tako uvijek mora biti, mogao bi biti predmet daljih istraživanja.

5. LITERATURA

- Kavraskij, V. V. (1959): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vyp. 2, Izdanie Upravljenija načal'nika Gidrografičeskoj službi VMF.
- Lapaine, M. (1997): Vektorska analiza, Zbirka riješenih zadataka, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Lončar, J. (1972): Numerička analiza, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
- Sporazum između Vlade SFRJ i Vlade Republike Italije o razgraničenju epikontinentalnog pojasa između dvije zemlje; Uredba o ratifikaciji istog sporazuma (1970): Službeni list SFRJ, Međunarodni ugovori i drugi sporazumi, br. 28 od 2. srpnja 1970.
- Stražičić, N. (1989): Pomorska geografija Jugoslavije, Školska knjiga, Zagreb.

THE MOST REMOTE POINT OF LOXODROME FROM ORTHODROME

ABSTRACT. The work presents the problem of determining the most remote point of loxodrome from the corresponding orthodrome connecting two points. First, the classical method of solving the problem according to Kavraskiy is described, and then our own method is presented. Both methods are at the end reduced to the solution of non-linear equation. The determination of the most remote point of loxodrome from the orthodrome is illustrated by two examples.

Key words: loxodrome, orthodrome

Primljeno: 1998-01-19