UDK 528.232.21:514.7
Pregledni znanstveni članak

POLUMJER ZAKRIVLJENOSTI MERIDIJANSKE ELIPSE

Miljenko LAPAINE – Zagreb*

SAŽETAK. Prikazano je sedam različitih matematičkih izvoda za polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse. Ni jedan od njih ne zahtijeva osobito znanje iz matematike i u tom smislu može se reći da su svi međusobno ravnopravni. Međutim, ono po čemu se bitno razlikuju je njihova duljina. Najstariji, ali ujedno najkraći i najljepši među njima je Helmertov izvod iz 1880. kojim se na izravan način stiže do cilja.

1. UVOD

Zakrivljenošću K krivulje u njezinoj točki A naziva se granična vrijednost omjera kuta između pozitivnih smjerova tangenata u točkama A i B i duljine luka AB kad duljina luka AB teži prema nuli, tj. kada se točka B približava točki A. Zakrivljenost K ima predznak + ili – ovisno o predznaku tog limesa. Zakrivljenost često smatramo pozitivnom veličinom, razumijevajući pod time apsolutnu veličinu navedenog limesa.

Polumjerom zakrivljenosti R u točki A krivulje naziva se veličina recipročna zakrivljenosti:

$$R = \frac{1}{K}. \tag{1.1}$$

Što je veća zakrivljenost krivulje u blizini zadane točke, to je veći K, a to manji R u toj točki. Kružnica s polumjerom a ima zakrivljenost $K = 1/a$ i polumjer zakrivljenosti $R = a$. Za pravac $K = 0$, $R = \infty$. Za druge krivulje zakrivljenost se mijenja od točke do točke.

Za računanje zakrivljenosti, odnosno polumjera zakrivljenosti, postoje različite formule. Tako se primjerice, u Matematičkom priručniku Bronštejna i Semendjajeva (1975) mogu naći sljedeće formule za računanje polumjera zakrivljenosti:

$$R = \frac{ds}{d\alpha} \tag{1.2}$$

gdje je ds diferencijal duljine luka, a $d\alpha$ diferencijal odgovarajućeg kuta između pozitivnih smjerova tangenata u krajnjim točkama luka ds.

* Dr. sc. Miljenko Lapaine, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Nadalje, ako je jednadžba krivulje zadana u eksplicitnom obliku $y=f(x)$,

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \tag{1.3}$$

ako je zadana u parametarskom obliku $x=x(t)$, $y=y(t)$,

$$R=\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}}, \tag{1.4}$$

ako je zadana u implicitnom obliku $F(x, y, z)=0$,

$$R=\frac{\left(F_x^2+F_y^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_x\\ F_{yx} & F_{yy} & F_y\\ F_x & F_y & 0\end{vmatrix}}, \tag{1.5}$$

ako je zadana u polarnom obliku $\rho=\rho(t)$,

$$R=\frac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}. \tag{1.6}$$

Nadalje, u istom se priručniku može naći i formula za polumjer zakrivljenosti elipse s poluosima a i b:

$$R=a^2b^2\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right]^{3/2}. \tag{1.7}$$

Pogledamo li u geodetsku literaturu, vidjet ćemo da se tu susrećemo s polumjerom zakrivljenosti meridijanske elipse koji se obično označava s M i zapisuje u obliku

$$M=\frac{a^2b^2}{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}, \tag{1.8}$$

gdje φ označava geografsku širinu promatrane točke, a e prvi numerički ekscentricitet elipse. Također se u geodetskoj literaturi može uočiti da su matematički izvodi formule (1.8) gotovo redovito nezgrapni i relativno dugački. S obzirom na veći broj postojećih formula koje nam stoje na raspolaganju (1.2)–(1.6) i relativno jednostavan oblik konačne formule (1.7) ili (1.8), postavlja se pitanje može li se izvod takve formule pojednostaviti.

2. PRVI IZVOD

Kod Jordana i Eggerta (1923), Horvata (1931), Baeschlina (1948), Zakatova (1953), Čubranića (1974a i 1974b) i Čolića (1986) nalazimo sljedeći izvod. Polazeći od kanonskog oblika jednadžbe elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.1}$$

nakon deriviranja

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \tag{2.2}$$

dobivamo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=\operatorname{tg}(90°+\varphi)=-\operatorname{ctg}\varphi. \tag{2.3}$$

U relaciji (2.3) s φ je označena geografska širina, odnosno kut između normale na meridijansku elipsu u promatranoj točki i osi x. Odatle možemo izraziti

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}\operatorname{ctg}\varphi \tag{2.4}$$

Shvatimo li izraze (2.1) i (2.4) kao sustav dviju jednadžbi s nepoznanicama x i y, možemo nakon njihova rješavanja doći do izraza

$$x=\frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}},\qquad y=\frac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} \tag{2.5}$$

koji je jednadžba elipse u parametarskom obliku, pri čemu je parametar geografska širina φ. Nadalje, uzevši u obzir definiciju prvog ekscentriciteta

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{2.6}$$

jednadžbe (2.5) mogu se napisati i u obliku

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\qquad y=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \tag{2.7}$$

Polumjer zakrivljenosti M meridijanske elipse u bilo kojoj točki može se dobiti iz poznatoga matematičkog izraza za polumjer zakrivljenosti:

$$M=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{2.8}$$

Prema (2.3) je:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\varphi \tag{2.9}$$

pa je:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}. \tag{2.10}$$

Treba još odrediti veličinu $\frac{d\varphi}{dx}$. Iz prve jednakosti izraza (2.5) možemo dobiti $\frac{dx}{d\varphi}$:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right)^2}\left[-\sin\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi} - \right.$$

$$\left. -\cos\varphi\,\frac{-a^2\cos\varphi\sin\varphi + b^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2}{\left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\right)^3}\left[\sin\varphi\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)+\left(-a^2+b^2\right)\sin\varphi\cos^2\varphi\right]$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2}{\left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\right)^3}\,b^2\sin\varphi\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)$$

odakle

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}{a^2b^2\sin\varphi} \tag{2.11}$$

pa je prema (2.10):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}{a^2b^2\sin^3\varphi}. \tag{2.12}$$

Uvrstimo li (2.10) i (2.12) u (2.8), ispustivši pritom predznak minus smatrajući veličinu duljine polumjera pozitivnom, možemo dobiti:

$$M = \frac{a^2b^2}{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{2.13}$$

3. DRUGI IZVOD

Kod Svečnikova (1953) i Muminagića (1981) nalazimo sljedeći izvod. Iz matematike znamo da se polumjer zakrivljenosti neke krivulje $y=f(x)$ računa po formuli

$$\rho=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{3.1}$$

"Lakše" (*pod navodnike stavio M. Lapaine*) ćemo doći do rezultata ako pođemo od opće definicije polumjera zakrivljenosti

$$\rho=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\alpha}=\frac{dS}{d\alpha}, \tag{3.2}$$

prema kojoj je polumjer zakrivljenosti granična vrijednost kvocijenta prirasta duljine luka krivulje ΔS i prirasta kuta $\Delta\alpha$, koji zatvara tangenta u promatranoj točki s pozitivnim smjerom osi x kada $\Delta\alpha$ teži nuli. Primijenit ćemo to na meridijansku elipsu. Kako nam ni dS, ni $d\alpha$ nisu poznati, do rješenja ćemo doći posredno. Za tu svrhu uzmimo na elipsi dvije beskonačno bliske točke. Duljina je luka između njih

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3.3}$$

Kut između tangenata u tim dvjema točkama je $d\alpha$ i jednak je također kutu između normala na elipsu u tim točkama jer se radi o kutovima s okomitim kracima. S obzirom na definiciju geografske širine, možemo napisati $\alpha=90^\circ+\varphi$ i odatle

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{ctg}\varphi \tag{3.4}$$

i $d\alpha=d\varphi$. Ako to uvrstimo u (3.3) dobit ćemo

$$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}=-\frac{1}{\sin\varphi}. \tag{3.5}$$

Predznak minus je izabran zato jer pozitivnom prirastu kuta φ odgovara negativni prirast apscise x.

Na temelju (3.2) treba naći odnos $\frac{dS}{d\alpha}$, ili što je isto $\frac{dS}{d\varphi}$. Do sada nismo našli funkciju koja povezuje duljinu luka S sa širinom φ. S obzirom da smo dobili izraz za $\frac{dS}{dx}$, ako još nađemo $\frac{dx}{d\varphi}$, možemo riješiti problem jer je

$$\frac{dS}{d\varphi}=\frac{dS}{dx}\frac{dx}{d\varphi}. \tag{3.6}$$

Funkciju koja povezuje x i φ već smo izveli (! *Ovdje je taj dio izostavljen, jer je i bez toga izvod pretjerano dugačak. Opaska M. Lapainea.*):

$$x=a\cos\varphi\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Nakon logaritmiranja izraza (3.7), diferenciranja i uvrštavanja izraza za x iz (3.7), možemo dobiti

$$\frac{dx}{x} = -\mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\frac{2e^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= -\frac{a \sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + \frac{a\, e^2 \sin\varphi \cos^2\varphi}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^3}} = \\ &= -\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^3}}\left(1-e^2\sin^2\varphi - e^2\cos^2\varphi\right) = \\ &= -\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^3}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

pa je polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse

$$M = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dS}{dx}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{3.10}$$

4. TREĆI IZVOD

Kod Tardija i Laclavérea (1951), Svečnikova (1953), Großmanna (1976), Morozova (1979) te Meissla (1981) nalazimo izvod vrlo sličan sljedećem. Po definiciji polumjera zakrivljenosti (1.2) možemo za elipsu napisati

$$M = \frac{ds}{d\varphi}, \tag{4.1}$$

gdje je φ geografska širina. Izračunajmo posebno ds i $d\varphi$. Iz jednadžbi elipse u parametarskom obliku

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u \tag{4.2}$$

gdje je parametar u poznat pod nazivom reducirana širina, možemo izračunati potrebne diferencijale

$$dx = -a\sin u\, du, \qquad dy = b\cos u\, du \tag{4.3}$$

i odatle

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u\right) du^2. \tag{4.4}$$

Uzevši u obzir definiciju geografske širine i njezinu vezu s normalom na elipsu, možemo napisati

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\, u \tag{4.5}$$

i

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{b^2\cos^2 u}{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}. \tag{4.6}$$

Nakon diferenciranja (4.5) dobivamo

$$d\varphi = \frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 u}du = \frac{ab}{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}du. \tag{4.7}$$

Uvrstimo li ds iz (4.4) i $d\varphi$ iz (4.7) u (4.1), dobivamo

$$M = \frac{\left(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u\right)^{3/2}}{ab} = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}. \tag{4.8}$$

Uvrštavanjem x i y iz izraza (2.7) izravno se dolazi do formule za polumjer zakrivljenosti meridijana M u obliku (2.13).

5. ČETVRTI IZVOD

U 10. izdanju poznatog priručnika Jordana, Eggerta i Kneissla (1958) nalazi se sljedeći izvod. Iz jednadžbi elipse u parametarskom obliku

$$x = a\cos u, \qquad y = b\sin u \tag{5.1}$$

možemo izračunati potrebne diferencijale

$$dx = -a\sin u\, du, \qquad dy = b\cos u\, du \tag{5.2}$$

i odatle

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u\right)du^2. \tag{5.3}$$

Prema definiciji polumjera zakrivljenosti (1.2) možemo za elipsu napisati

$$M = \frac{ds}{d\varphi}, \tag{4.1}$$

gdje je φ geografska širina. Uzevši u obzir definiciju geografske širine i njezinu vezu s normalom na elipsu, možemo napisati

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\,u \tag{4.5}$$

Nakon diferenciranja (4.5) dobivamo

$$d\varphi = \frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2 u}du \tag{4.7}$$

Uvrstimo li sad ds iz (5.3) i $d\varphi$ iz (4.7) u (5.1), dobit ćemo

$$M=\frac{\sqrt{a^2\sin^2u+b^2\cos^2u}\;du\;b\cos^2u}{du\;a\cos^2\varphi}=$$
$$=\frac{b\cos^2u}{a\cos^2\varphi}\sqrt{\left(a^2\mathrm{tg}^2u+b^2\right)\cos^2u}=\frac{b\cos^3u}{a\cos^2\varphi}\sqrt{a^2\mathrm{tg}^2u+b^2}. \tag{5.4}$$

Još treba reduciranu širinu u izraziti pomoću geografske širine φ. Kako je

$$\cos u=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2u}}\quad \text{i}\quad \mathrm{tg}\,u=\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{5.5}$$

to iz (5.4) slijedi

$$M=\frac{b}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}}\right)^3\frac{1}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2\frac{b^2}{a^2}\mathrm{tg}^2\varphi+b^2}=$$
$$=\frac{b^2}{a\cos^2\varphi}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}{\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}\right)^3}=\frac{b^2}{a\cos^2\varphi}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}{\left(\sqrt{\frac{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi}}\right)^3}= \tag{5.3}$$
$$=\frac{b^2\frac{1}{\cos\varphi}}{\frac{a\cos^2\varphi}{a^3\cos^3\varphi}\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}=\frac{a^2b^2}{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}.$$

6. PETI IZVOD

U 10. izdanju poznatog priručnika Jordana, Eggerta i Kneissla (1958) nalazi se još i sljedeći izvod za polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse. Ako je jednadžba krivulje zadana u parametarskom obliku, tada se polumjer zakrivljenosti računa po formuli:

$$M=\frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}}, \tag{1.4}$$

Izračunamo li iz

$$x=a\cos u,\qquad y=b\sin u, \tag{4.2}$$

potrebne derivacije

$$\dot{x}=-a\sin u,\qquad \dot{y}=b\cos u, \tag{6.1}$$
$$\ddot{x}=-a\cos u,\qquad \ddot{y}=-b\sin u, \tag{6.2}$$

i uvrstimo ih u (1.4), imamo

$$M=\frac{\left(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix}-a\sin u & b\cos u\\ -a\cos u & -b\sin u\end{vmatrix}}=\frac{\left(a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u\right)^{3/2}}{ab}. \tag{6.3}$$

Kako je

$$\sin^2 u=\frac{\mathrm{tg}^2 u}{1+\mathrm{tg}^2 u},\qquad \cos^2 u=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 u}\quad \mathrm{i}\quad \mathrm{tg}\,u=\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{6.4}$$

to iz (6.3) slijedi

$$M=\frac{a^2b^2}{\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{6.5}$$

7. ŠESTI IZVOD

Abakumov je (1949) dao sljedeći izvod za polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse. Pretpostavimo da smo izveli, kao u 2. poglavlju ili nekako drugačije, jednadžbu meridijanske elipse u parametarskom obliku

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\qquad y=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \tag{7.1}$$

gdje je parametar φ geografska širina. Osim toga znamo definiciju geografske širine prema kojoj se može napisati

$$\frac{dy}{dx}=-\mathrm{ctg}\,\varphi. \tag{7.2}$$

Nadalje imamo

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=-dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=-dx\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\varphi}=\frac{-dx}{\sin\varphi} \tag{7.3}$$

i zatim

$$M=\frac{ds}{d\varphi}=-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{dx}{d\varphi}. \tag{7.4}$$

Predznak minus uzet je zbog pretpostavke o pozitivnoj orijentaciji meridijanskog luka. Iz (7.1) deriviranjem dobijemo

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{-a\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}+a\cos\varphi\,\frac{1}{2}\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-1/2}2e^2\sin\varphi\cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{-a\sin\varphi\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)+a\sin\varphi\, e^2\cos^2\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{-a\sin\varphi\left(1-e^2\sin^2\varphi-e^2\cos^2\varphi\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}=\frac{-a\sin\varphi\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}.$$

Uvrstimo li dobivenu vrijednost u (7.4), imat ćemo

$$M=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{7.5}$$

Vrlo sličan izvod ovome dao je Helmert još 1880. godine, a koji se izlaže u sljedećem poglavlju. Pri tome je dobro uočiti učinjenu razliku u pristupu koja značajno skraćuje izvođenje.

8. SEDMI IZVOD

Helmert je (1880) dao sljedeći, fascinirajuće kratki izvod za polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse. Pretpostavimo da smo izveli, kao u 2. poglavlju ili nekako drugačije, jednadžbu meridijanske elipse u parametarskom obliku

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\qquad y=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \tag{8.1}$$

gdje je parametar φ geografska širina. Osim toga znamo definiciju geografske širine prema kojoj se može napisati

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{dx}{dy} \tag{8.2}$$

Ako $\cos\varphi$ izrazimo pomoću $\operatorname{tg}\varphi$, na temelju (8.2) možemo napisati

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{dy}{ds}, \tag{8.3}$$

i zatim

$$\begin{aligned} M&=\frac{ds}{d\varphi}=\frac{ds}{dy}\frac{dy}{d\varphi}=\frac{dy}{\cos\varphi\, d\varphi}=\frac{dy}{d(\sin\varphi)}=\\ &=a\left(1-e^2\right)\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}+\dfrac{e^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

9. ANALIZA I ZAKLJUČAK

Uočeno je da se u geodetskoj literaturi može naći veći broj različitih matematičkih izvoda formule za računanje polumjera zakrivljenosti meridijanske elipse. S obzirom na veći broj postojećih formula za računanje polumjera zakrivljenosti bilo koje krivulje koje nam nudi matematika i relativno jednostavan oblik konačne formule (1.7) ili (1.8) za elipsu, autor ovoga rada postavio je pitanje koji je izvod takve formule najjednostavniji.

U ovome je radu prikazano sedam različitih izvoda. Ni jedan od njih ne zahtijeva neko posebno znanje iz matematike i u tom smislu može se reći da su svi međusobno ravnopravni. Međutim, ono po čemu se bitno razlikuju je njihova duljina. Najkraći su drugi izvod iz 10. izdanja poznatog priručnika Jordana, Eggerta i Kneissla (1958) prikazan u ovome radu u 6. poglavlju te Helmertov izvod iz 1880. prikazan u 8. poglavlju. U spomenutom izvodu Jordana, Eggerta i Kneissla (1958) radi se s reduciranom širinom u i na kraju prelazi na geografsku širinu φ. Zato, ako bi trebalo među svim izvodima izabrati najkraći i najljepši, onda je to Helmertov izvod, kojim se na izravan način, a istovremeno najkraćim putem stiže do cilja.

LITERATURA

Abakumov, N. P. (1949): Viša geodezija II, skripta, Stručni odsjek N. S. O-e Zagrebačkog sveučilišta, Zagreb.

Baeschlin, C. F. (1948): Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich.

Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A. (1975): Matematički priručnik za inženjere i studente. Tehnička knjiga, Zagreb.

Čolić, K. (1986): Matematičko-fizikalna geodezija, kopije folija s predavanja.

Čubranić, N. (1974a): Viša geodezija, I. dio, 2. izdanje, Sveučilište u Zagrebu.

Čubranić, N. (1974b): Viša geodezija, II. dio, Tehnička knjiga, Zagreb.

Großmann, W. (1976): Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen. Zweite Auflage 1962, B. G. Teubner, Leipzig.

Horvat, S. (1931): Državna izmera I, Praktična geodezija II. deo, Izdalo Udruženje slušača Tehničkog fakulteta, Zagreb.

Jordan-Eggert (1923): Handbuch der Vermessungskunde, Dritter Band, Siebente erweiterte Auflage, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Jordan/Eggert/Kneissl (1958): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, 10. Ausgabe, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Meissl, P. (1981): Skriptum aus ellipsoidische Geometrie. Institut für Theoretische Geodäsie, Technische Universität, Graz.

Morozov, Z. S. (1979): Kurs sferoidičeskoj geodezii. Nedra, Moskva.

Muminagić, A. (1981): Viša geodezija I, Građevinski fakultet, Sarajevo.

Svečnikov, N. S. (1953): Viša geodezija, prva knjiga, Izdanje Savezne geodetske uprave, Beograd.

Tardi, P., Laclavère, G. (1951): Traité de Géodésie, Tome I, Triangulations, Fascicule I, Gauthier-Villars, Paris.

Zakatov, P. S. (1953): Kurs vyssej geodezii, Geodezizdat, Moskva.

CURVATURE RADIUS OF THE MERIDIAN ELLIPSE

SUMMARY. Seven various mathematical derivations for the curvature radius of meridian ellipse are presented. None of them requests some special knowledge in mathematics, and hence one could say, that they are all on an equal footing. However, their length is the element that makes them distinguish from each essentially. The oldest, but also the shortest and the nicest among them is Helmert's derivation from 1880 by which it is possible to reach the aim directly.

Primljeno: 1996-07-08