

## DUPINOVA INDIKATRISA

Miljenko LAPAINE – Zagreb\*

**SAŽETAK.** Prikazane su dvije interpretacije Dupinove indikatrise koje najčešće susrećemo odvojeno u literaturi. Izvedene su formule Dupinove indikatrise za plohu zadanu u eksplicitnom i implicitnom obliku. Matematička razmatranja ilustrirana su na geodetskim primjerima: sferi, rotacijskom elipsoidu te nivo-plohi potencijala sile teže.

## 1. UVOD

Dupinova indikatrisa ili indikatrisa zakrivljenosti je konika koja daje zornu predodžbu o zakrivljenosti plohe u okolini promatrane točke. Ona se može interpretirati na dva načina, ali je znakovito da se u literaturi najčešće pojavljuje jedna (Marković 1965, Lipschutz 1979, Heck 1987, Žarinac-Frančula 1990) ili druga interpretacija (Baeschlin 1948, Abakumov 1949, Tardi i Laclavère 1951, Živković 1972, Čubranić 1974, Moritz i Hofmann-Wellenhof 1993). Tek se iznimno mogu naći oba pristupa (Jordan/ Egger/Kneissl 1961). U ovome će radu obje interpretacije biti rasvijetljene sa stajališta diferencijalne geometrije i ilustrirane na geodetskim primjerima: sferi, rotacijskom elipsoidu te nivo-plohi potencijala sile teže.

Neka je zadana ploha jednadžbom u obliku

$$z = z(x, y). \quad (1.1)$$

Kao Gaußove parametre na njoj uzmimo same pravokutne kartezijeve koordinate  $x$ ,  $y$  i s time možemo za vektor položaja dobiti prikaz

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}. \quad (1.2)$$

Parametarske linije su krivulje  $y = \text{const.}$  i  $x = \text{const.}$ , to su presjeci plohe s ravninama paralelnim koordinatnim ravninama  $x$ ,  $z$ , odnosno  $y$ ,  $z$ . Iz (1.2) deriviranjem dobijemo

$$\vec{r}_x = \vec{i} + z_x\vec{k}, \quad \vec{r}_y = \vec{j} + z_y\vec{k}. \quad (1.3)$$

gdje smo označili

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \vec{r}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1.4)$$

\* Dr. sc. Miljenko Lapaine, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Odatle

$$E = \vec{r}_x^2 = 1 + z_x^2, \quad F = \vec{r}_x \vec{r}_y = z_x z_y, \quad G = \vec{r}_y^2 = 1 + z_y^2 \quad (1.5)$$

Prema tome

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = (1 + z_x^2) dx^2 + 2z_x z_y dx dy + (1 + z_y^2) dy^2, \quad (1.6)$$

$$EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2. \quad (1.7)$$

Jedinični vektor normale na plohu je

$$\vec{n}^\circ = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x \vec{i} - z_y \vec{j} + \vec{k}). \quad (1.8)$$

Nadalje,

$$\vec{r}_{xx} = z_{xx} \vec{k}, \quad \vec{r}_{xy} = z_{xy} \vec{k}, \quad \vec{r}_{yy} = z_{yy} \vec{k} \quad (1.9)$$

i odatle

$$L = \vec{n}^\circ \vec{r}_{xx} = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$M = \vec{n}^\circ \vec{r}_{xy} = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad (1.10)$$

$$N = \vec{n}^\circ \vec{r}_{yy} = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Dakle, druga diferencijalna forma može se napisati u obliku

$$L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2). \quad (1.11)$$

U posebnom slučaju ako je

$$z_x = 0, \quad z_y = 0, \quad (1.12)$$

izrazi (1.10) i (1.11) se pojednostavljuju i glase

$$L = z_{xx}, \quad M = z_{xy}, \quad N = z_{yy}, \quad (1.13)$$

$$L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 = z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2. \quad (1.14)$$

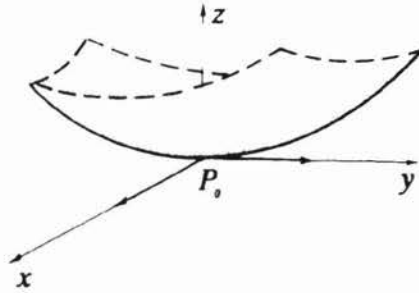
## 2. DUPINOVA INDIKATRISA

Želimo detaljno istražiti normalnu zakrivljenost u nekoj točki  $P_0$  plohe. Pretpostavimo da je  $P_0$  ishodište koordinatnog sustava i da je ravnina  $x, y$  ujedno tangencijalna ravnina na plohu u točki  $P_0$  (slika 1). Tada je

$$z_x = 0, \quad z_y = 0, \quad (2.1)$$

$$E = G = 1, \quad F = 0, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.2)$$

$$L = z_{xx}, \quad M = z_{xy}, \quad N = z_{yy}. \quad (2.3)$$



Slika 1.

Sad možemo napisati izraz za normalnu zakrivljenost plohe u promatranoj točki

$$\kappa_n = \frac{L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2}{E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2} = \frac{L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2}{dx^2 + dy^2}. \quad (2.4)$$

S obzirom da  $\kappa_n$  ovisi samo o omjeru  $dx/dy$ , možemo pretpostaviti da je

$$dx^2 + dy^2 = 1 \quad (2.5)$$

i staviti

$$dx = \cos \theta, \quad dy = \sin \theta. \quad (2.6)$$

Dakle,

$$\kappa_n = L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta. \quad (2.7)$$

Konačno, stavimo li

$$|\kappa_n| = \frac{1}{r^2} \quad (2.8)$$

i

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2.9)$$

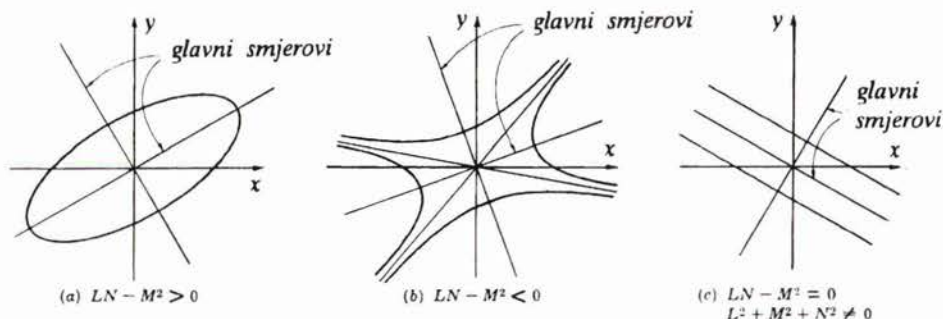
dobijemo

$$L x^2 + 2M xy + N y^2 = \pm 1. \quad (2.10)$$

Jednadžba (2.10) određuje koniku u ravnini  $x, y$  koja se naziva *Dupinova indikatriša*. Možemo dakle reći da je Dupinova indikatriša ili indikatriša zakrivljenosti ravninska krivulja koja daje zornu predodžbu o iskrivljenosti plohe u okolini promatrane točke. Dupinova indikatriša leži u tangencijalnoj ravnini na plohu u promatranoj točki. Ona je skup krajeva segmenata duljine  $1/\sqrt{|\kappa_n|}$ , gdje je  $|\kappa_n|$  apsolutna vrijednost normalne zakrivljenosti plohe u promatranoj točki u smjeru  $\theta$ , položenih od te točke u smjeru  $\theta$  u tangencijalnoj ravnini.

Pažljivijim ispitivanjem možemo zaključiti da Dupinova indikatriša ne može biti bilo koja konika. Odgovarajuće razmatranje može se provesti primjenom općeg postupka klasifikacije konika, kako su ga primjerice opisali Lapaine i Jovičić (1996). Rezultati takva ispitivanja bit će sljedeći:

Ako je  $P_0$  eliptička točka ( $LN - M > 0$ ), tada je indikatriša elipsa. Ako je  $P_0$  hiperbolička točka ( $LN - M < 0$ ), indikatriša se sastoji od para konjugiranih hiperbola. Uzduž jedne hiperbole  $\kappa_n$  je pozitivan, a uzduž druge negativan. Zajedničke asimptote odgovaraju smjerovima za koje je  $\kappa_n = 0$ . U paraboličkom slučaju ( $LN - M = 0$ ,  $L^2 + N^2 + M^2 \neq 0$ ) indikatriša je par paralelnih pravaca čiji smjerovi su također u smjeru za koji je  $\kappa_n = 0$  (slika 2). U slučaju ravnine ( $L = 0$ ,  $N = 0$ ,  $M = 0$ ) indikatriša ne postoji (Lipschutz 1969).



Slika 2.

Svaka indikatriša osim kružnice ima dva osobita, međusobno okomita smjera, smjerove glavnih osi konike, koji se nazivaju *glavnim smjerovima*, a uzduž kojih je zakrivljenost minimalna, odnosno maksimalna. Te se zakrivljenosti nazivaju *glavnim zakrivljenostima* (Žarinac-Frančula, 1990).

Ako je indikatriša kružnica, svi su smjerovi glavni i sve zakrivljenosti normalnih presjeka međusobno jednake.

Poluosi Dupinove indikatriše (2.10) jednake su recipročnim vrijednostima rješenja kvadratne jednadžbe

$$\kappa_n^2 - (N + L)\kappa_n + LN - M^2 = 0 \quad (2.11)$$

i mogu se napisati u obliku

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \kappa_{1,2} = \frac{L + N \pm \sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}}{2}. \quad (2.12)$$

Apsen (1949, str. 44, formula (a)) ima u svojem Geodetskom priručniku ekvivalentnu, ali nešto složeniju formulu (vidi također Klak, 1974, str. 12, formula (32)) koja uz odgovarajuće oznake glasi

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{2(LN - M^2)}{L + N \mp \sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}}. \quad (2.13)$$

Iz formule (2.12) nije teško izvesti sljedeće izraze:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = L + N, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = LN - M^2, \quad (2.16)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{L + N}{LN - M^2}, \quad (2.17)$$

$$R_2 - R_1 = \frac{\sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}}{LN - M^2}, \quad (2.18)$$

$$R_1 R_2 = \frac{1}{LN - M^2}. \quad (2.19)$$

Kut  $\theta$  iz relacije

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{N - L + \sqrt{(L - N)^2 + 4M^2}}{2M} \quad (2.20)$$

daje smjer koji odgovara zakrivljenosti  $\kappa_1$ , odnosno polumjeru zakrivljenosti  $R_1$ . Apsen (1949) i zatim Klak (1974) imaju nekoliko formula kojima se izražava dvostruki takav kut. Na temelju tih formula sam kut nije jednoznačno određen i bez daljnjeg ispitivanja ostaje nejasno koji smjer odgovara zakrivljenosti  $\kappa_1$ , a koji zakrivljenosti  $\kappa_2$  (Helmert 1884, str. 36-37, Jordan/Eggert/Kneissl 1967, str. 278).

### 2.1. Primjer – sfera

Neka je zadana sfera polumjera  $R$ . Odaberimo jednu njezinu točku  $P_0$  i postavimo koordinatni sustav  $x, y, z$  kao na slici 3, tako da točka  $P_0$  bude najniža točka sfere i ujedno ishodište koordinatnog sustava. Jednadžba sfere u izabranom koordinatnom sustavu glasi:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2. \quad (2.1.1)$$

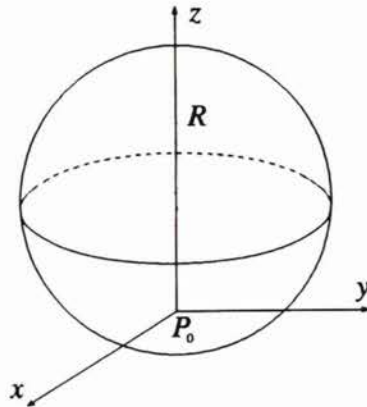
U okolini točke  $P_0$  jednadžba sfere u eksplicitnom obliku (1.1) je

$$z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (2.1.2)$$

Računamo redom:

$$z_x = \frac{x}{R - z}, \quad z_y = \frac{y}{R - z}, \quad (2.1.3)$$

$$z_{xx} = \frac{R^2 - y^2}{(R - z)^3}, \quad z_{yy} = \frac{xy}{(R - z)^3}, \quad z_{yy} = \frac{R^2 - x^2}{(R - z)^3}. \quad (2.1.4)$$



Slika 3. Sfera

U točki  $P_0(0,0,0)$  imamo

$$z_x = 0, \quad z_y = 0, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1, \quad (2.1.5)$$

$$L = z_{xx} = \frac{1}{R}, \quad M = z_{xy} = 0, \quad N = z_{yy} = \frac{1}{R} \quad (2.1.6)$$

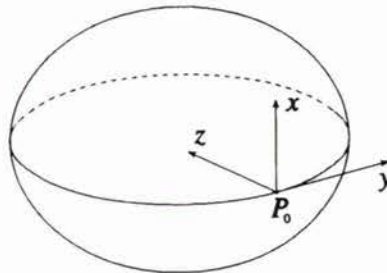
Prema tome Dupinova je indikatrisa kružnica

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} = 1 \quad (2.1.7)$$

s polumjerom  $\sqrt{R}$ .

## 2.2. Primjer – elipsoid

Neka je zadan rotacijski elipsoid s poluosima  $a$  i  $b$ . Odaberimo jednu njegovu točku  $P_0$  na ekvatoru i postavimo koordinatni sustav  $x, y, z$  kao na slici 4, tako da točka  $P_0$  bude ishodište koordinatnog sustava. Jednadžba elipsoida u izabranom koordinatnom sustavu glasi:



Slika 4. Elipsoid

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-a)^2}{a^2} = 1. \quad (2.2.1)$$

U okolini točke  $P_0$  jednadžba dijela elipsoida u eksplicitnom obliku (1.1) je

$$z = a - a\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2}}. \quad (2.2.2)$$

Može se izračunati da je:

$$z_x = \frac{a^2}{b^2} \frac{x}{a-z}, \quad z_y = \frac{y}{a-z}, \quad (2.2.3)$$

$$z_{xx} = \frac{a^2}{b^2} \frac{a^2 - y^2}{(a-z)^3}, \quad z_{xy} = \frac{a^2}{b^2} \frac{xy}{(a-z)^3}, \quad z_{yy} = \frac{a^2}{b^2} \frac{b^2 - x^2}{(a-z)^3}. \quad (2.2.4)$$

U točki  $P_0(0,0,0)$  imamo

$$z_x = 0, \quad z_y = 0, \quad \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1, \quad (2.2.5)$$

$$L = z_{xx} = \frac{a}{b^2}, \quad M = z_{xy} = 0, \quad N = z_{yy} = \frac{1}{a}. \quad (2.2.6)$$

Prema tome Dupinova je indikatriša u ovom primjeru elipsa

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{1}{a} \quad (2.2.7)$$

s poluosima  $\sqrt{b^2/a}$ ,  $\sqrt{a}$ .

### 3. DRUGO TUMAČENJE DUPINOVE INDIKATRISE

Jedno drugo geometrijsko tumačenje Dupinove indikatriše dobije se kad se ploha istražuje u okolini zadane točke pomoću razvoja u Taylorov red. Ako se nakon kvadratnih članova uvede ostatak, tada Taylorov razvoj u diferencijalnom obliku funkcije

$$z = z(x, y) \quad (1.1)$$

glasi

$$\Delta z = z_x \Delta x + z_y \Delta y + \frac{1}{2} (z_{xx} \Delta x^2 + 2z_{xy} \Delta x \Delta y + z_{yy} \Delta y^2) + R_3. \quad (3.1)$$

gdje je  $R_3$  mala veličina trećeg reda. Uz pretpostavku (2.1), (3.1) se pojednostavljuje u

$$\Delta z = \frac{1}{2} (z_{xx} \Delta x^2 + 2z_{xy} \Delta x \Delta y + z_{yy} \Delta y^2) + R_3, \quad (3.2)$$

odakle se zbog (2.3) može također napisati

$$\Delta z = \frac{1}{2} (L \Delta x^2 + 2M \Delta x \Delta y + N \Delta y^2) + R_3, \quad (3.3)$$

što zanemarivanjem ostatka  $R_3$  prelazi u

$$\Delta z = \frac{1}{2} (L \Delta x^2 + 2M \Delta x \Delta y + N \Delta y^2). \quad (3.4)$$

Kako se točka  $P_0$  nalazi u ishodištu koordinatnog sustava  $x, y, z$ , možemo zamijeniti  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  s  $x, y, z$  i dobiti iz (3.4)

$$2z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2. \quad (3.5)$$

To je jednadžba paraboloida koji se u okolini točke  $P_0$  osobito dobro prilagodio plohi (1.1). On se razlikuje od nje samo za zanemarene članove trećeg reda  $R_3$ . Paraboloid čija je jednadžba (3.5) naziva se priljubljujućim ili *oskulacijskim paraboloidom* (Schmiegungs-paraboloid).

Za presjek oskulacijskog paraboloida ravninom paralelnom tangencijalnoj ravnini  $\varepsilon_0$

$$z = \text{const.} = \delta \quad (3.6)$$

i vrijedi

$$2\delta = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2, \quad (3.7)$$

odnosno

$$\frac{L}{2\delta} x^2 + \frac{2M}{2\delta} xy + \frac{N}{2\delta} y^2 = 1. \quad (3.8)$$

Pusti li se da  $\delta$  varira, tj. pomiče li se presječna ravnina u smjeru normale na plohu, dobit će se familija sličnih konika.

Za usporedbu, uočimo da je Dupinova indikatriša promatrane plohe (1.1) u točki  $P_0$  bila

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1. \quad (2.10)$$

Usporedba pokazuje da su konike (3.8) slične Dupinovoj indikatriši plohe u točki  $P_0$ . Što je manja udaljenost  $\delta$  između presječne ravnine  $\varepsilon$ , i tangencijalne ravnine  $\varepsilon_0$ , to će se manje razlikovati presječna krivulja (3.8) između ravnine  $\varepsilon$ , i oskulacijskog paraboloida od presječne krivulje iste ravnine s plohom (1.1) i za  $\delta \rightarrow 0$  obje presječne krivulje prelaze jedna u drugu. Odatle, i iz sličnosti krivulja (3.8) s indikatrišom (2.10), proizlazi ispravnost sljedećeg stavka.

*Stavak.* Ako se neka ploha presječe ravninom koja je paralelna s jednom njezinom tangencijalnom ravninom, to će pri pomicanju presječne ravnine prema tangencijalnoj ravnini presječne krivulje plohe i ravnine činiti niz (infinitesimalnih) konika, koje su sve slične Dupinovoj indikatriši plohe u točki dodira (Jordan/Eggert/Kneissl, 1961).

Kao što znamo, u okolini hiperboličke točke ploha prolazi uvijek s obje strane odgovarajuće tangencijalne ravnine i indikatriša se sastoji iz obje konjugirane hiperbole. Stavak treba u tom slučaju razumijeti tako da su s jedne strane tangencijalne ravnine presjeci između paraboloida i ravnine slični jednoj od hiperbola, a s druge strane tangencijalne ravnine presjeci su slični njoj konjugiranoj hiperboli.



## 4. DUPINOVA INDIKATRISA PLOHE ZADANE U IMPLICITNOM OBLIKU

Pretpostavimo da je funkcija  $z$  od  $x$  i  $y$  umjesto u eksplicitnom obliku

$$z = z(x, y) \quad (1.1)$$

zadana u implicitnom obliku

$$W(x, y, z) = 0. \quad (4.1)$$

Deriviranjem jednadžbe (4.1) po  $x$  dobijemo

$$W_x + W_z z_x = 0 \quad (4.2)$$

i odatle

$$z_x = -\frac{W_x}{W_z}. \quad (4.3)$$

Sasvim analogno možemo dobiti i derivaciju od  $z$  po  $y$ :

$$z_y = -\frac{W_y}{W_z}. \quad (4.4)$$

Da bismo odredili druge parcijalne derivacije funkcije  $z$ , derivirajmo najprije relaciju (4.2) po  $x$ . Vodeći pritom računa da je  $z$  funkcija od  $x$ , dobijemo

$$W_{xx} + W_{xz} z_x + (W_{xz} + W_{zz} z_x) z_x + W_z z_{xx} = 0. \quad (4.5)$$

Odatle izračunamo

$$z_{xx} = -\frac{W_{xx} + 2W_{xz} z_x + W_{zz} z_x^2}{W_z} \quad (4.6)$$

te konačno uzevši u obzir (4.3)

$$z_{xx} = \frac{2W_{xz} W_x W_z - W_{xx} W_z^2 - W_{zz} W_x^2}{W_z^3}. \quad (4.7)$$

Na analogan način, deriviravši (4.2), odnosno (4.3) po  $y$ , mogu se dobiti sljedeći izrazi

$$z_{xy} = \frac{(W_{xz} W_y + W_{yz} W_x) W_z - W_{zz} W_x W_y - W_{xy} W_z^2}{W_z^3}, \quad (4.8)$$

$$z_{yy} = \frac{2W_{yz} W_y W_z - W_{yy} W_z^2 - W_{zz} W_y^2}{W_z^3}. \quad (4.9)$$

Izvedene se formule znatno pojednostavljaju uz pretpostavku

$$W_x = 0, \quad W_y = 0. \quad (4.10)$$

Tada je

$$z_x = 0, \quad z_y = 0, \quad (4.11)$$

$$L = z_{xx} = -\frac{W_{xx}}{W_z}, \quad M = z_{xy} = -\frac{W_{xy}}{W_z}, \quad N = z_{yy} = -\frac{W_{yy}}{W_z}. \quad (4.12)$$

#### 4.1. Primjer – sfera

Pretpostavimo da je sfera iz primjera 2.1. zadana svojom jednadžbom u implicitnom obliku

$$W(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - R)^2 - R^2 = 0. \quad (4.1.1)$$

Najprije ćemo odrediti parcijalne derivacije

$$W_x = 2x, \quad W_y = 2y, \quad W_z = 2(z - R), \quad (4.1.2)$$

$$W_{xx} = 2, \quad W_{xy} = 0, \quad W_{yy} = 2 \quad (4.1.3)$$

i zatim njihove vrijednosti u točki  $P_0(0,0,0)$ :

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad W_z = -2R, \quad (4.1.4)$$

dok su druge parcijalne derivacije kao u (4.1.4). Sada možemo primijeniti formule (4.12):

$$L = -\frac{W_{xx}}{W_z} = \frac{1}{R}, \quad M = -\frac{W_{xy}}{W_z} = 0, \quad N = -\frac{W_{yy}}{W_z} = \frac{1}{R}. \quad (4.1.5)$$

Uočava se da smo dobili iste vrijednosti kao u primjeru 1.2.

#### 4.2. Primjer – elipsoid

Pretpostavimo da je elipsoid iz primjera 2.2. zadan svojom jednadžbom u implicitnom obliku

$$W(x, y, z) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-a)^2}{a^2} - 1. \quad (4.2.1)$$

Najprije ćemo odrediti parcijalne derivacije

$$W_x = \frac{2x}{b^2}, \quad W_y = \frac{2y}{a^2}, \quad W_z = \frac{2(z-a)}{a^2}, \quad (4.2.2)$$

$$W_{xx} = \frac{2}{b^2}, \quad W_{xy} = 0, \quad W_{yy} = \frac{2}{a^2} \quad (4.2.3)$$

i zatim njihove vrijednosti u točki  $P_0(0,0,0)$ :

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad W_z = -\frac{2}{a}, \quad (4.2.4)$$

dok su druge parcijalne derivacije kao u (4.2.3). Sada možemo primijeniti formule (4.12):

$$L = -\frac{W_{xx}}{W_z} = \frac{a}{b^2}, \quad M = -\frac{W_{xy}}{W_z} = 0, \quad N = -\frac{W_{yy}}{W_z} = \frac{1}{a}. \quad (4.2.5)$$

Dobili smo iste vrijednosti kao u primjeru 2.2.

### 4.3. Opći Zemljin elipsoid kao nivo-ploha

U prethodnom smo primjeru radi jednostavnosti pretpostavili da nas zanima zakrivljenost rotacijskog elipsoida u nekoj točki na ekvatoru. Uzmimo sada najopćenitiji slučaj, tj. odredimo Dupinovu indikatrixu u bilo kojoj točki  $P_0$  s geografskim koordinatama  $\varphi_0, \lambda_0$  na Zemljinu rotacijskom elipsoidu. Jednadžba elipsoida s poluosima  $a$  i  $b$  u kanonskom obliku glasi

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1. \quad (4.3.1)$$

Definirajmo lokalni koordinatni sustav  $x, y, z$  tako da točka  $P_0$  bude ishodište, os  $z$  postavljena u smjeru unutarnje normale na elipsoid u točki  $P_0$ , os  $x$  postavljena u smjeru meridijana koji prolazi točkom  $P_0$  pozitivno usmjerena prema sjeveru te da je pozitivan smjer osi  $y$  u smjeru istoka, tako da  $x, y, z$  bude desno orijentiran sustav. Veza između tog lokalnog koordinatnog sustava i geocentričnog sustava  $X, Y, Z$  može se izvesti ili pronaći u literaturi (npr. Morozov 1979):

$$\begin{aligned} X &= [(N_0 - z) \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0] \cos \lambda_0 - y \sin \lambda_0 \\ Y &= [(N_0 - z) \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0] \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0 \\ Z &= (N_0 - z) \sin \varphi_0 + x \cos \varphi_0 - e^2 N_0 \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

U toj je formuli s  $N_0$  označen polumjer zakrivljenosti presjeka elipsoida po prvom vertikalu u točki  $P_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ):

$$N_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \varphi_0}}, \quad (4.3.3)$$

dok je  $e$  ekscentricitet definiran relacijom

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (4.3.4)$$

Uvrstimo li  $X, Y, Z$  iz (4.3.2) u (4.3.1) dobit ćemo jednadžbu rotacijskog elipsoida u lokalnom koordinatnom sustavu  $x, y, z$  u implicitnom obliku

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= \frac{[(N_0 - z) \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0]^2 + y^2}{a^2} + \\ &+ \frac{[(N_0 - z) \sin \varphi_0 + x \cos \varphi_0 - e^2 N_0 \sin \varphi_0]^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Želimo istražiti zakrivljenost te plohe u točki  $P_0$  koja u sustavu  $x, y, z$  ima koordinate  $(0, 0, 0)$ . U tu svrhu odredimo parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{-2[(N_0 - z) \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0] \sin \varphi_0}{a^2} + \\ &+ \frac{2[(N_0 - z) \sin \varphi_0 + x \cos \varphi_0 - e^2 N_0 \sin \varphi_0] \cos \varphi_0}{b^2} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$W_y = \frac{2y}{a^2} \quad (4.3.7)$$

$$W_z = \frac{-2[(N_0 - z) \cos \varphi_0 - x \sin \varphi_0] \cos \varphi_0}{a^2} + \frac{-2[(N_0 - z) \sin \varphi_0 + x \cos \varphi_0 - e^2 N_0 \sin \varphi_0] \sin \varphi_0}{b^2} \quad (4.3.8)$$

$$W_{xx} = 2 \frac{a^2 \cos^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \varphi_0}{a^2 b^2}, \quad W_{xy} = 0, \quad W_{yy} = \frac{2}{a^2}. \quad (4.3.9)$$

U točki  $P_0$

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad W_z = -\frac{2N_0}{a^2}, \quad (4.3.10)$$

dok su druge parcijalne derivacije kao u (4.3.9). Na temelju formula (4.12) imamo:

$$L = -\frac{W_{xx}}{W_z} = \frac{1}{M_0}, \quad M = -\frac{W_{xy}}{W_z} = 0, \quad N = -\frac{W_{yy}}{W_z} = \frac{1}{N_0}, \quad (4.3.11)$$

gdje smo uz prije uvedenu oznaku  $N_0$  za polumjer zakrivljenosti presjeka elipsoida po prvom vertikalu u točki  $P_0$  relacijom (4.3.3) uveli još i  $M_0$  za polumjer zakrivljenosti meridijana u istoj točki, tj.

$$M_0 = \frac{a^2 b^2}{\left(\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi_0 + b^2 \sin^2 \varphi_0}\right)^3}. \quad (4.3.12)$$

U prethodnim relacijama treba razlikovati uobičajene oznake u geodeziji za polumjere zakrivljenosti od uobičajenih oznaka u diferencijalnoj geometriji za Gaußove koeficijente iz druge diferencijalne forme  $L, M, N$ .

Prema (2.10) Dupinova indikatrisa ima jednadžbu

$$\frac{x^2}{M_0} + \frac{y^2}{N_0} = 1 \quad (4.3.13)$$

i to će uvijek biti elipsa koja samo u polovima prelazi u kružnicu.

#### 4.4. Istraživanje nivo-plohe potencijala sile teže

Iz svojstava potencijala sile teže proizlazi da su nivo-plohe koje se protežu u Zemljinu vanjskom prostoru analitičke plohe, tj. takve plohe koje nemaju singularnih točaka. Nivo-plohe koje se protežu unutar Zemlje imaju prekide u drugim derivacijama na mjestima neregularne gustoće (Torge 1980). Te se plohe, dakle, mogu konstruirati samo iz dijelova različitih analitičkih ploha. Analitički dio nivo-plohe može se razviti u Taylo-rov red. Neka je

$$W(x, y, z) = W_0 \quad (4.4.1)$$

jednadžba dijela nivo-plohe sile teže. Pri tome pretpostavljamo da smo na toj plohi odabrali neku točku  $P_0$  u kojoj želimo detaljnije istražiti njezinu zakrivljenost. Pretpostavimo nadalje da smo lokalni koordinatni sustav  $x, y, z$  odabrali tako da točka  $P_0$  bude ishodište, os  $z$  postavljena u smjeru unutarnje normale na nivo-plohu  $W = W_0$  u točki  $P_0$ , os  $x$  postavljena u smjeru meridijana koji prolazi točkom  $P_0$  pozitivno usmjerena prema sjeveru te da je pozitivni smjer osi  $y$  u smjeru istoka, tako da  $x, y, z$  bude desno orijentiran sustav.

U fizikalnoj geodeziji (Čolić, 1986) i gravimetriji (Klak, 1974) učimo da pri tako odabranu koordinatnom sustavu za prve parcijalne derivacije potencijala  $W$  polja sile teže vrijedi

$$W_x = 0, \quad W_y = 0, \quad W_z = g. \quad (4.4.2)$$

Vrijednosti

$$W_{yy} - W_{xx}, \quad W_{xy}, \quad W_{yz}, \quad W_{zx}, \quad W_{zz} \quad (4.4.3)$$

mogu se odrediti pomoću odgovarajućih gravimetrijskih instrumenata (Baeschlin, 1948). Prema formuli (4.12) imamo

$$L = -\frac{W_{xx}}{g}, \quad M = -\frac{W_{xy}}{g}, \quad N = -\frac{W_{yy}}{g}. \quad (4.4.4)$$

Prema tome možemo reći da je

$$W_{xx} x^2 + 2W_{xy} xy + W_{yy} y^2 = \pm g \quad (4.4.5)$$

jednadžba Dupinove indikatriše nivo-plohe potencijala sile teže u točki  $P_0$ . Nadalje, prema izrazu (3.5) dobijemo

$$-2zg = W_{xx} x^2 + 2W_{xy} xy + W_{yy} y^2 \quad (4.4.6)$$

što je jednadžba oskulacijskog paraboloida koji se u okolini točke  $P_0$  osobito dobro prilagodio nivo-plohi. On se razlikuje od nje za zanemarene članove trećeg reda.

Prema izrazima (2.14)–(2.16) i (4.4.2) možemo dobiti

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{g}, \quad (4.4.7)$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{g} \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}, \quad (4.4.8)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{W_{xx} W_{yy} - W_{xy}^2}{g^2}. \quad (4.4.9)$$

Kut  $\theta$  iz relacije

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{W_{xx} - W_{yy} + \sqrt{(W_{xx} - W_{yy})^2 + 4W_{xy}^2}}{2W_{xy}} \quad (4.4.10)$$

daje smjer koji odgovara zakrivljenosti  $\kappa_1$ , odnosno polumjeru zakrivljenosti  $R_1$ .

Iz prikazanih formula vidimo da je za ispitivanje nivo-plohe u okolini pojedine točke potrebno poznavati veličine  $W_{xx}$ ,  $W_{xy}$  i  $W_{yy}$ . S obzirom na to da se mjerenjem klasičnim instrumentima ne određuju posebno  $W_{xx}$  i  $W_{yy}$  nego samo njihova razlika, treba

ili reducirati dobivene zaključke na one koje omogućuje primjena formula (4.3.8) i (4.3.10) (Apsen 1949, Jordan/Eggert/Kneissl 1967), ili ako je poznato  $W_{zz}$ , primjenom Poissonove jednadžbe izraziti  $W_{xx} + W_{yy}$  i tako dobiti jednadžbu koja će zajedno s  $W_{xx} - W_{yy}$  omogućiti izračunavanje i  $W_{xx}$  i  $W_{yy}$  (Baeschlin 1948). U današnje vrijeme vrijednosti drugih parcijalnih derivacija potencijala sile teže određuju se suvremenom *gradiometrijom* (Moritz, Hofmann-Wellenhof 1993).

## 5. FRANÇOIS PIERRE CHARLES DUPIN

Dupinova indikatriša nazvana je po Françoisu Pierreu Charlesu Dupinu (Varzy, 1784. – Pariz, 1873.), francuskom matematičaru, ekonomisti i političaru, inozemnom dopisnom članu petersburške Akademije znanosti (1826) i članu pariške Akademije znanosti (1818). Po obrazovanju je bio brodograđevni inženjer. Matematički su mu radovi iz diferencijalne geometrije. Uveo je 1813. god. krivulju, koja omogućuje zornu predodžbu raspodjele zakrivljenosti plohe u različitim normalnim presjecima (Dupinova indikatriša). Kao ekonomist Dupin je zastupao protekcionizam.

U Napoleonovo vrijeme Dupin je kao mladi brodograđevni inženjer bio učenik Mongea te primjenjivao metode svoga učitelja u teoriji ploha u okviru koje je pronašao asimptotske i konjugirane krivulje. Postao je profesorom geometrije u Parizu. Za vrijeme svog dugog života postigao je također značajan položaj u području politike i industrije. *Dupinova indikatriša* i *Dupinove ciklide* govore o njegovim ranim interesima. U knjigama *Développement de géométrie* (Razvitak geometrije, 1813) i *Applications de géométrie* (Primjene geometrije, 1825), mnogo je zanimljivih članaka (Struik 1963, Vinogradov 1979, Prohorov 1988).

*La indicatrice* je na francuskom jeziku ženski rod imenice *l'indicateur*, kojoj u hrvatskom jeziku odgovara riječ *indikator*. Obje dolaze iz latinskog, a znače pokazivač, upućivač, pokazatelj, kazalo, znak, simptom, obilježje, potvrda, dokaz. U kartografiji je poznata *Tissotova indikatriša*, a to je elipsa koja u svakoj točki projekcije zorno predodžuje raspodjelu deformacija.



F. P. C. Dupin

## LITERATURA

- Abakumov, N. P. (1949): Viša geodezija II, skripta, Stručni odsjek N. S. O-e Zagrebačkog sveučilišta, Zagreb.
- Apsen, B. (1949): Geodetski priručnik II, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.
- Baeschlin, C. F. (1948): Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli Verlag, Zürich.
- Čolić, K. (1986): Matematičko-fizikalna geodezija, kopije folija s predavanja.
- Čubranić, N. (1974): Viša geodezija, II dio. Tehnička knjiga, Zagreb.
- Heck, B. (1987): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Helmert, F. R. (1884): Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II. Teil: Die physikalischen Theorien. Verlag von B.G. Teubner, Leipzig.

- Jordan/Eggert/Kneissl (1961): Handbuch der Vermessungskunde, Band I, Mathematische Grundlagen, Ausgleichsrechnung und Rechenhilfsmittel, 10. Ausgabe, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Jordan/Eggert/Kneissl (1967): Handbuch der Vermessungskunde, Band Va, Gravimetrische Instrumente und Messmethoden, 10. Ausgabe, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Klak, S. (1974): Gravimetrija, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
- Lapaine, M., Jovičić, D. (1996): Grafički prikaz konika pomoću računala. KoG 1, 19-26.
- Lipschutz, M. M. (1969): Theory and Problems of Differential Geometry, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.
- Marković, Ž. (1965): Uvod u višu analizu, II. dio, drugi svezak, Sveučilište u Zagrebu.
- Moritz, H., Hofmann-Wellenhof, B. (1993): Geometry, Relativity, Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Morozov, V. P. (1979): Kurs sferoidičeskoj geodezii. Nedra, Moskva.
- Prohorov, Ju. V. (urednik, 1988): Matematičeskij enciklopedičeskij slovar', Sovjetskaja enciklopedija, Moskva.
- Struik, D. J. (1963): Abriss der Geschichte der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin; prijevod na ruski "Kratkij očerk istorii matematiki", Nauka, Moskva, 1984.
- Tardi, P., Laclavère, G. (1951): Traité de Géodésie, Tome I, Triangulations, Fascicule I, Gauthier-Villars, Paris.
- Torge, W. (1980): Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Vinogradov, I. M. (urednik, 1979): Matematičeskaja enciklopedija, tom 2 D-Koo, Izdatel'stvo Sovjetskaja enciklopedija, Moskva.
- Žarinac-Frančula, B. (1990): Diferencijalna geometrija. Školska knjiga, Zagreb.
- Živković, A. (1972): Viša geodezija. Građevinska knjiga, Beograd.

## DUPIN'S INDICATRIX

Summary: Two interpretations of Dupin's indicatrix are presented. The formulas of Dupin's indicatrix have been derived for the level surface given in explicit and implicit form. Mathematical statements are illustrated by means of geodetic examples: sphere, rotational ellipsoid, and the level surface of the gravity potential.

Primjeno: 1996-11-19