UDK 528.08:53.083:519.23
Pregledni znanstveni članak

ANALIZA VIŠESTRUKIH MJERENJA

Dušan BENČIĆ, Federico DUSMAN – Zagreb*

SAŽETAK. Višestruka mjerenja primijenjena u ispitnim i istraživačkim mjerenjima, u mjerenjima visokih točnosti općenito, moraju se podvrći detaljnijoj analizi radi ispitivanja djelovanja utjecajnih veličina i utvrđivanja parametara preciznosti ili donošenja zaključaka o ispitivanjima. U ovom su radu prikazane opširnije mogućnosti primjene statističkih metoda, a posebice primjene kriterija mjerne kompatibilnosti i ponovljivosti u okviru istraživačkih radova što se provode u Laboratoriju za precizna mjerenja dužina Fakulteta strojarstva i brodogradnje te u Laboratoriju za mjerenja i mjernu tehniku Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

1. UVOD

Mjerenja u mjernim nizovima iste mjerne veličine nazivamo **višestrukim mjerenjima**. U nekim slučajevima višestrukih mjerenja mjerna veličina nije ista, no očekivana varijanca za sva mjerenja mora biti jednaka. U ovoj analizi promatrat ćemo mjerenja iste mjerne veličine.

Mjerni se nizovi često izvode pri ispitnim mjerenjima i u istraživačkim zadacima:

- radi ispitivanja preciznosti mjerenja ovisno o mjeritelju, mjernom uređaju ili uvjetima u kojima se mjerenja izvode, kao i trošenju ili starenju mjernih dijelova i materijala
- u usporedbenim mjerenjima radi utvrđivanja i provjere preciznosti na određenoj razini mjerne nesigurnosti (Dusman, 1992)
- pri analizi i provjeri funkcije mjernog instrumenta, uređaja ili njihovih dijelova
- pri ispitivanjima mogućih promjena mjernog objekta
- pri usporedbi mjernih metoda.

Osim redovitih zadataka mjerenja u mjernim laboratorijima izvode se umjeravanja uz izdavanje potvrda o umjeravanju (certifikati), što zahtijeva ne samo visoku preciznost mjernih uređaja, već i stalnu provjeru preciznosti u vremenski odvojenim mjernim nizovima, te kontrolu stalnosti funkcije mjernih uređaja i njihove preciznosti u određenim vremenskim razmacima. U duljem vremenskom razdoblju izvode se i ispitivanja funkcije mjernih instrumenata i uređaja i njihovih

* Prof. dr. Dušan Benčić, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb
Prof. dr. Federico Dusman, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 1, Zagreb

dijelova bitnih za funkciju u cjelini, ispitivanje djelovanja vanjskih utjecajnih veličina (npr. u geodetskim mjerenjima u terenskim uvjetima), a za to su nužna mjerenja iste mjerne veličine u većem broju ponavljanja, što zahtijeva izvođenje većeg broja mjernih nizova s brojem mjernih vrijednosti do $n = 10$. Uzmemo li u obzir da je npr. pri ispitivanjima funkcije instrumenata visokih točnosti potrebno ponekad i nekoliko stotina mjernih podataka, očito je da se takva višestruka mjerenja moraju podvrgnuti detaljnoj analizi, kako neke promjene tijekom mjernih ispitivanja ne bi bitno utjecale na rezultate.

U tako širokom spektru primjene višestrukih mjerenja treba, dakle, razlikovati mjerne nizove izvedene u kratkom vremenskom razdoblju u **jednakim uvjetima ponovljivosti** od onih koji su mjereni u **vremenskom razmaku,** odnosno u duljem trajanju, kada su i analize složenije. Ispitivanja se mogu odnositi na mjerenja u strogim uvjetima ponovljivosti, kada određujemo tzv. **unutarnju preciznost,** zatim na mjerenja kada nužno ili namjerno odstupamo od tih uvjeta i promatramo jesu li se pojavile signifikantne promjene u preciznosti mjerenja ili mjernih uređaja, te na mjerenja u uvjetima obnovljivosti, kada analiziramo maksimalne promjene preciznosti mjerenja.

Za takva ispitivanja neizbježne su statističke metode.

No, u statističkom računu, prema Vraniću, nismo potpuno sigurni, da je račun ispravan, već znamo samo kolika je vjerojatnost, ali ako je ta vjerojatnost dovoljno velika, onda to u statističkoj obradi znači praktički i sigurnost. Statistički uzorci moraju biti dovoljno reprezentativni budući da se cjelokupna količina podataka osnovnog skupa zamjenjuje s malo veličina koje će adekvatno dati saznanje o cjelini (Vranić, 1965). Stoga je već istaknuto (Benčić, Dusman, 1995) da za dobro statističko zaključivanje broj mjenrih vrijednosti n treba biti veći od 5 za pojedini mjerni niz, a kako bi utjecaj težina bio podjednak, to i broj mjernih vrijednosti u nizovima treba biti približno jednak, što je pri ispitivanjima u mjernoj tehnici najčešće moguće ostvariti.

Osnovna shema mjernih nizova *1, 2, ... k* pri višestrukim mjerenjima koje ćemo analizirati je prema tome sljedeća:

	1	*2*	*3*	·	·	·	·	*k*	
A	x_{11}	x_{21}	x_{31}	·	x_{i1}	·	·	x_{k1}	$\bar{x}_1\,(A)$
B	x_{12}	x_{22}	x_{32}	·	x_{i2}	·	·	x_{k2}	$\bar{x}_2\,(B)$
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	·	x_{ij}	·	·	x_{kj}	$\bar{x}_j$
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
N	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	·	x_{in}	·	·	x_{kn}	$\bar{x}_n\,(N)$
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	·	$\bar{x}_i$	·	·	$\bar{x}_k$	$\bar{\bar{x}}$

Prije svake analize ispituju se pogrešne mjerne vrijednosti (previdi) u mjernom nizu, npr. pomoću DIXON testa i odbacuju se.

Statistička analiza mjernih nizova pretpostavlja Gaussovu normalnu razdiobu. Provjera se može izvršiti različitim ispitivanjima i statističkim testovima (Benčić, Dusman, 1994).

2. STATISTIČKA ANALIZA METODOM ANALIZE VARIJANCI

Statistička analiza omogućuje proučavanje djelovanja utjecajnih veličina tijekom mjernog procesa na osnovi **analize varijanci.** U geodetskim je mjerenjima tu metodu prvi primijenio prof. H. Wolf za ocjenu vanjske i unutarnje točnosti mjerenja (Wolf, 1966), o čemu je već pisano (Benčić, Dusman, 1995). Tu ćemo analizu proštiriti, uzevši u obzir da se ne samo **svaki mjerni niz** (u shemi stupac) već i **svaki redak** mogu smatrati statističkim uzorcima uzetim iz osnovnog skupa. Takvo proširenje analize važno je posebno u slučaju ako nisu izvršena neka druga prethodna ispitivanja mjernih nizova, kao npr. funkcija razdiobe slučajne varijable, autokorelacija.

Procjena varijanci po stupcima i redcima (shema mjernih nizova) kao mjera disperzije temelji se na računanjima odstupanja mjernih vrijednosti. Uzmemo li u obzir da sve mjerne vrijednosti pripadaju istom osnovnom skupu, to sve varijance trebaju nepristrano procjenjivati varijancu osnovnoga skupa σ^2.

Za računanje odstupanja najprije računamo aritmetičke sredine.

Smatramo li sve $kn = N$ mjerne vrijednosti kao jedinstven uzorak, tada je sredina tog uzorka:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_i \sum_j x_{ij} = \frac{1}{k}\sum_i \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_j \bar{x}_j, \tag{1}$$

gdje su: $\bar{x}_i$ aritmetička sredina i-tog stupca, a
$\bar{x}_j$ aritmetička sredina j-tog redka,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_j x_{ij}; \qquad \bar{x}_j = \frac{1}{k}\sum_i x_{ij}. \tag{2}$$

$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n.$

Uz pretpostavku da je x_{ij} varijabla distribuirana po normalnoj razdiobi, računamo odstupanja i kvadrate odstupanja na osnovi kojih ćemo računati empirijske varijance u svrhu analize djelovanja utjecajnih veličina tijekom višestrukih mjerenja.

Odstupanja i zbroj kvadrata odstupanja

a) u odnosu na sredinu svih mjernih vrijednosti:

$$\left.\begin{aligned} &\text{odstupanja: } v = x_{ij} - \bar{\bar{x}}, \\ &\text{zbroj kvadrata odstupanja: } vv^{*} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

b) unutar mjernih nizova, tj. unutar stupaca (oznaka: *us*):

$$\left.\begin{aligned} &\text{odstupanja: } v_{us} = x_{ij} - \bar{x}_i, \\ &\text{zbroj kvadrata odstupanja: } vv_{us} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

c) između stupaca (oznaka *is*); prema H. Wolfu:

$$\begin{aligned} &\text{odstupanja: } v_i' = \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}, \\ &\text{zbroj kvadrata odstupanja: } vv_{is} = n_1 v_1' v_1' + n_2 v_2' v_2' + \ldots + n_k v_k' v_k', \end{aligned} \tag{5}$$

---

* Za zbroj kvadrata ispuštena je oznaka zbroja; zbog jednostavnosti umjesto [vv] označujemo vv gdje god to ne uzrokuje nejasnoće (prema normi DIN 18723/1, 1990).

ako je $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, $\quad v_1'v_1' + v_2'v_2' + \ldots + v_k'v_k' = v'v'$

$$vv_{is} = nv'v' \tag{6}$$

Kontrola računanja: $\quad vv = vv_{us} + vv_{is}$.

d) unutar redaka (oznaka: *ur*):

$$\left.\begin{aligned} \text{odstupanja: } & v_{ur} = x_{ij} - \bar{x}_j, \\ \text{zbroj kvadrata odstupanja: } & vv_{ur} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e) između redaka (oznaka: *ir*):

$$\left.\begin{aligned} \text{odstupanja: } & v_j'' = \bar{x}_j - \bar{\bar{x}}, \\ \text{zbroj kvadrata odstupanja: } & vv_{ir} = kv''v'' \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

uz jednak broj mjernih vrijednosti k u svakome retku.

$$\text{Kontrola računanja:} \quad vv = vv_{ur} + vv_{ir}. \tag{9}$$

Prema Pavliću zbroj kvadrata odstupanja između stupaca (Pavlić, 1977) računa se prema:

$$vv_{is} = \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_i \frac{1}{n_i} \left[\sum_j (x_{ij} - x_0) \right]^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_0) \right]^2,$$

gdje je x_0 uzeta zaokružena srednja vrijednost.
Isto tako zbroj kvadrata odstupanja između redaka može se računati prema:

$$vv_{ir} = \sum_i \sum_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{k_j} \sum_j \left[\sum_i (x_{ij} - x_0) \right]^2 - \frac{1}{N} \left[\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_0) \right]^2.$$

f) prema Pavliću je također:

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_i \sum_j (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_i \sum_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})^2$$

i ako označimo: $\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{\bar{x}})_2 = vv_{ost}$, kao zbroj kvadrata ostatka, slijedi:

$$\left.\begin{aligned} & vv = vv_{is} + vv_{ir} + vv_{ost}, \\ \text{odnosno: } & vv_{ost} = vv - (vv_{is} + vv_{ir}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Račun empirijskih varijanci

a) varijanca unutar mjernih nizova (stupaca) s_{us}^2
ili varijanca ponovljivosti (prema ISO 5725–1986) (E) označena sa s_r^2):

$$s_{us}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \frac{vv_{us}}{N-k} \tag{11}$$

$$N - k = k\,(n-1),\ uz\ n_1 = n_2 = \ldots = n_k$$

$$\text{ili } s_r^2 = s_{us}^2 = \frac{1}{k} \sum_j s_i^2; \qquad s_i^2 = \frac{(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1} \tag{12}$$

Ta je procijenjena varijanca, dakle, srednja vrijednost varijanci svih mjernih nizova. Homogenost tih varijanci može se ispitati COHRAN testoma.

U stručnoj se literaturi ona naziva **varijancom ponovljivosti**.

Prema H. Wolfu označena je kao mjera »unutarnje« točnosti (Wolf, 1966), što je uz današnju terminologiju zastarjelo.

b) Varijanca između mjernih nizova (stupaca) s_{is}^2:

$$s_{is}^2 = \frac{vv_{is}}{k-1}. \tag{13}$$

Prema H. Wolfu, označena je kao mjera »vanjske« točnosti (Wolf, 1966), što također kao izraz danas ima drugo značenje.

c) varijanca unutar redaka:

$$s_{ur}^2 = \frac{vv_{ur}}{N-n} \tag{14}$$

$$N-n = n\,(k-1),\ uz\ k_1 = k_2 = \ldots = k_n$$

d) varijanca između redaka s_{ir}^2:

$$s_{ir}^2 = \frac{vv_{ir}}{n-1} \tag{15}$$

e) varijanca ostatka s_{ost}^2

$$s_{ost}^2 = \frac{vv_{ost}}{(k-1)(n-1)}. \tag{16}$$

Analiza varijanci

Sve izračunane varijance upotrebljavat ćemo za statističku analizu u svrhu ispitivanja djelovanja utjecajnih veličina na mjerni proces, a time i ispitivanje stabilnosti preciznosti mjerenja. Pri analizi koristit ćemo se F-razdiobom uz primjenu F-testa.

a) usporedba varijanci mjernih nizova

$$F = \frac{s_{is}^2}{s_{us}^2} \tag{17}$$

uz stupanj slobode $(k-1)$ u brojniku i $(N-k)$ u nazivniku.

b) usporedba varijanci redaka kao statističkih uzoraka

$$F = \frac{s_{ir}^2}{s_{ur}^2} \tag{18}$$

uz stupanj slobode $(n-1)$ u brojniku i $(N-n)$ u nazivniku

c) usporedba s varijancom ostatka
 – usporedba varijance između stupaca

$$F = \frac{s_{is}^2}{s_{ost}^2} \tag{19}$$

uz stupanj slobode $(k-1)$ u brojniku i $(k-1)(n-1)$ u nazivniku
 – usporedba varijance između redaka

$$F = \frac{s_{ir}^2}{s_{ost}^2}, \tag{20}$$

uz stupanj slobode $(n-1)$ u brojniku i $(k-1)(n-1)$ u nazivniku.

Tablična vrijednost F_0 uzima se na osnovi stupnjeva slobode i razine pouzdanosti $(1-\alpha)$.

Varijanca unutar mjernih nizova s_{us}^2, kao **varijanca ponovljivosti** osnovna je mjera disperzije, a time i **preciznosti mjerenja** unutar mjernih nizova. Unutar jednog mjernog niza, pogotovo uz malen broj ponavljanja u uvjetima ponovljivosti **ne očekujemo** značajno djelovanje utjecajnih veličina. Pri normalnoj razdiobi slučajne varijable varijanca s_{us}^2 **nepristrano procjenjuje varijancu osnovnog skupa** σ^2.

Pri analizi posebno značenje ima **varijanca između mjernih nizova.** Kao što je u uvodu rečeno, između mjernih nizova postoje kraći ili duži vremenski razmaci, a moguće su i promjene mjeritelja, mjernih uređaja pa čak i mjesta mjerenja (npr. pri usporedbenim mjerenjima), u geodetskim mjerenjima često i promjene vanjskih uvjeta. Stoga je nužno ispitati djelovanje utjecajnih veličina, što će biti moguće usporedbom s varijancom ponovljivosti pomoću F-testa (formula 17). Ako je $F > F_0$, postoji signifikantno djelovanje uz određenu vjerojatnost P na osnovi koje je izabrana tablična vrijednost F_0. Ako je između nizova bilo nekih promjena uvjeta ponovljivosti i ako je $F < F_0$ one nisu imale signifikantni utjecaj. Utjecajna veličina može biti i poznata, kao npr. promjena mjeritelja za svaki novi mjerni niz. U tom će slučaju signifikantna razlika varijanci pokazati u prvom redu nejednaku preciznost mjerenja mjeritelja.

Ukoliko ne postoji djelovanje utjecajnih veličina, tada sve tri varijance: $s^2 = \frac{vv}{N-1}$, s_{us}^2 i s_{is}^2 *nepristrano procjenjuju varijancu osnovnoga skupa* σ^2. To znači da u preciznosti mjerenja nema signifikantnih razlika, uz vjerojatnost P.

U slučaju da je značajno $s_{us}^2 > s_{is}^2$, to bi značilo da je usklađenost srednjih vrijednosti $\bar{x}_i$ bolja no što pokazuje disperzija mjernih vrijednosti unutar nizova, što ukazuje na neispravnost mjerenja. U tom slučaju svakako treba provesti daljnje analize.

Daljnje analize treba provesti i kada je $F > F_0$, ali je ta razlika mala. U tom slučaju vrlo je riskantno prihvatiti zaključak na osnovi jedne statističke analize. Zato R. Lieberasch kaže: »Matematičko-statističke hipoteze ne mogu se objasniti dvostranom logikom, tj. one se ne mogu zaključiti kao istinite ili lažne, već samo više ili manje vjerojatne« (Lieberasch, 1974). Treba biti vrlo oprezan, kako se ne bi učinila pogreška prve vrste.

Prvi korak u nastavku analize je usporedba varijanci s_{ur}^2 i s_{ir}^2 (formula 18).

Pomoću F-testa ustanovit ćemo, djeluju li utjecajne veličine po redcima kao statističkim uzorcima, što se ne očekuje. Ako je varijanca između redaka s_{ir}^2 signifikantno veća, to znači da su unutar mjernih nizova mjerne vrijednosti neusklađene što ukazuje na moguće nepravilnosti tijekom mjerenja. Svakako treba izvršiti provjeru razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable x_{ij} jer utjecajne veličine djeluju između redaka.

Daljnje mogućnosti analize su usporedbe varijanci s_{is}^2 i s_{ir}^2, karakterističnih za iskaz djelovanja utjecajnih veličina, s varijancom ostatka (formule 19 i 20). U slučaju njihova djelovanja očekujemo da s_{is}^2, kao i s_{ir}^2 budu signifikantno veće od s_{ost}^2. Dogodi li se obrnuto, znači da neki od pretpostavljenih uvjeta pri izvođenju mjerenja nije zadovoljen, a očito ni uvjet nezavisnosti varijable x_{ij}.

Ako je varijanca s^2_{ost} vrlo malena, mogu postojati dva slučaja. Može postojati vrlo značajno djelovanje utjecajnih veličina između mjernih nizova (ili između redaka, što ne očekujemo). U tom je slučaju $vv_{is} \gg vv_{ir}$. Ekstremni slučaj nastaje, ako je:

$$vv_{is} + vv_{ir} \approx vv, \text{ tj. } vv_{ost} \approx 0,$$

a to znači i varijanca $s^2_{ost} \approx 0$. Utjecajne veličine u tom slučaju značajno djeluju i između mjernih nizova (stupaca) i između redova. Slučajna varijabla x_{ij} ne pokorava se normalnoj razdiobi. Treba ispitati i autokorelaciju između mjernih vrijednosti višestrukih mjerenja.

Ukoliko nema djelovanja utjecajnih veličina sve procjene varijanci: s^2_{is}, s^2_{ir}, s^2_{ost} i s^2 nepristrano procjenjuju varijancu osnovnog skupa σ^2. Mjerenja su jednake preciznosti uz razinu pouzdanosti $(1 - \alpha)$, odnosno vjerojatnost P.

Statistička je analiza dala uvid u preciznost mjerenja u cjelini višestrukih mjerenja. Ona ukazuje na mogućnost signifikantnih razlika srednjih vrijednosti nizova $\bar{x}_i$, ali ne i na one srednje vrijednosti koje značajnije odstupaju. Izravna komparacija srednjih vrijednosti nizova i njihove kritične razlike moguće su na osnovi mjerne ponovljivosti i kompatibilnosti (Benčić, Dusman, 1995).

3. MJERNA KOMPATIBILNOST I PONOVLJIVOST

Rezultati mjerenja su kompatibilni uz uvjet da apsolutna razlika rezultata mjerenja istog objekta $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ bude manja ili jednaka zbroju mjernih nesigurnosti umnoženih s koeficijentom kompatibilnosti k_u:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq k_u(|U_1| + |U_2|),$$

uz vjerojatnost P kojom su dane U_1 i U_2 procjene mjernih nesigurnosti (Dusman, 1992).

Uz pretpostavku $U_1 \approx C_1$ i $U_2 \approx C_2$ kritična razlika kompatibilnosti, usklađena s kriterijem ponovljivosti (Benčić, Dusman, 1995) bit će

$$C_rD_k(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) = 0{,}71\ (|C_1| + |C_2|) \tag{21}$$

uz *uvjet* $C_1 \approx C_2$, gdje su nepouzdanosti srednje vrijednosti:

$$C = t\frac{s}{\sqrt{n}},$$

gdje je s standardno odstupanje mjernog niza s_i, računano prema 12.

Kritične razlike kompatibilnosti, odnosno ponovljivosti za srednje vrijednosti mjernih nizova možemo računati u parovima i ustanoviti je li zadovoljen kriterij kompatibilnosti rezultata, odnosno gdje je razlika veća od kritične. Na taj način možemo otkriti razlog zašto je npr. pri analizi varijanci (prema formuli 17) ustanovljena *signifikantna razlika varijanci.*

Ako je kriterij mjerne kompatibilnosti zadovoljen, a višestruka su mjerenja izvedena u uvjetima ponovljivosti, to potvrđuje usklađenost preciznosti mjerenja između mjernih nizova pa se može odrediti *unutarnja preciznost,* kojoj je mjera varijanca ponovljivosti, odnosno standardno odstupanje ponovljivosti s_r.

Unutarnja i vanjska preciznost mjernih nizova

Kritična razlika ponovljivosti na osnovi promatranja dvaju mjernih nizova računa se prema normi ISO 5725–1986 (E):

$$C_rD_r(|\bar{x}_1-\bar{x}_2|)=r\sqrt{\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}},\tag{22}$$

odnosno uz $n_1=n_2=n$

$$C_rD_r(|\bar{x}_1-\bar{x}_2|)=\frac{r}{\sqrt{n}}.\tag{23}$$

Ako je **mjerna vrijednost ponovljivosti** r **dani parametar** određen prethodnim usporedbenim mjerenjima (vidi Benčić, Dusman, 1995), kritična će razlika određena tim parametrom i brojem mjerenja biti mjerilo **vanjske preciznosti** mjernih nizova, što znači **stabilnosti** preciznosti u ispitnom razdoblju. Ukoliko je taj kriterij zadovoljen za sve mjerne nizove, to zaključujemo (uz vjerojatnost P) da nema značajnih promjena preciznosti mjerenja tijekom ispitnog razdoblja. To vrijedi za ispitivane mjerne uređaje, mjeritelje i uvjete mjerenja.

Kritičnu razliku ponovljivosti za dva mjerna niza možemo izraziti i neposredno u ovisnosti o **standardnom odstupanju ponovljivosti** s_r, koje je pozitivni korjen varijance ponovljivosti (formula 12). Prema definiciji za mjernu ponovljivost:

$$r=f\sqrt{2}\,s_r,\ \text{(Benčić, Dusman, 1995)}$$

uz $f=t$ za malen broj mjernih vrijednosti, slijedi uz $n_1=n_2=n$:

$$\frac{r}{\sqrt{n}}=\bar{r}=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{2}\,s_r,\ \text{pa će prema (23) biti:}$$

$$C_rD_k(|\bar{x}_1-\bar{x}_2|)=k_0s_r.\tag{24}$$

gdje je $k_0=\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{2}$, konstanta za dani broj mjerenja n.

Tako je npr. za:

$n=5,\ k_0=1{,}75;$ $n=8,\ k_0=1{,}18;$

$n=6,\ k_0=1{,}48;$ $n=10,\ k_0=1{,}00;$ (*uz* $P=95\%$).

Za mjerne nizove uz $n=10$ bit će:

$$C_rD_k(|\bar{x}_1-\bar{x}_2|)=s_r\tag{25}$$

Dakle, razlika srednjih vrijednosti mora biti manja od standardnog odstupanja ponovljivosti određenog usporedbenim mjerenjima, što vrijedi za mjerne nizove s $n=10$ mjernih vrijednosti. U tom je slučaju kriterij kontrole vanjske preciznosti vrlo jednostavan.

Ponovno istaknimo, mjerna vrijednost ponovljivosti r (u formuli 23) i standardno odstupanje ponovljivosti s_r (u formuli 24, odnosno 25) **dani su parametri** za kritične razlike pri ispitivanju **vanjske preciznosti** mjernih nizova.

Ukoliko se mjerna vrijednost r računa iz ispitivanih mjernih nizova na osnovi njihovih varijanci, to je kritična razlika izračunana prema (22) i (23) jednaka onoj prema 21, tj. kritičnoj razlici kompatibilnosti rezultata kao mjerila **unutarnje preciznosti**. To slijedi iz suglasja obaju kriterija kada se računaju na osnovi istih varijanci, uz uvjet da su one približno jednake, što se vrlo jednostavno vidi iz formule 23:

$$\frac{r}{\sqrt{n}}=t\frac{s_r}{\sqrt{n}}\sqrt{2}=t\frac{(s_1+s_2)}{2\sqrt{n}}\sqrt{2}=0.71\,(|C_I|+|C_2|),$$

uz $s_1 \approx s_2$, a to je formula 21, tj. $C_rD_r \approx C_rD_k$.

Parametrom $\frac{r}{\sqrt{n}}$ možemo, prema tome, ispitati **unutarnju preciznost** mjernih nizova u cjelini, uzevši da je kritična razlika:

$$C_rD_r(|\bar{x}_{maks} - \bar{x}_{min}|) = \frac{r}{\sqrt{n}}, \tag{26}$$

uz uvjet $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, s time da je mjerna vrijednost $r = ts_r\sqrt{2}$ određena iz mjernih nizova (nije dani parametar), gdje je *varijanca ponovljivosti (12)*

$$s_r^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_k^2}{k}.$$

Ukoliko je uvjet kritične razlike prema (26) zadovoljen, sve su srednje vrijednosti mjernih nizova međusobno kompatibilne (uz danu P).

Uz ispitivanje homogenosti varijanci pomoću COHRAN testa:

$$C = \frac{s_{maks}^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2},$$

gdje je s_{maks}^2 najveća varijanca s_i^2 (kritične vrijednosti dane su u tablicama na osnovi razine pouzdanosti, broja mjernih nizova k i mjernih vrijednosti u nizovima ($n_1 = n_2 = \ldots = n_k$), taj jednostavan uvjet (26) može često zamijeniti složenija statistička istraživanja.

Ispitivanje unutarnje preciznosti nizova treba izvršiti posebno pri usporedbenim međulaboratorijskim mjerenjima, kao i unutar laboratorija-ispitivališta, kada se određuju mjerne vrijednosti ponovljivosti i obnovljivosti (r i R) (vidi Benčić, Dusman, 1995). Kontrola ispravnosti određivanja mjerne vrijednosti ponovljivosti, prema normi ISO 5725–1986 (E), obavlja se provjerom svih razlika rezultata za određenu razinu, ukupno $n(n-1)/2$ po svakom mjernom nizu. Pomoću kritične razlike (formula 26) takva je provjera znatno jednostavnija.

Mjerni nizovi mjereni u većim vremenskim razmacima

Ako je mjerna vrijednost ponovljivosti nepoznata, to se mjerni se nizovi mjereni u većim vremenskim razmacima međusobno uspoređuju na osnovi kriterija ponovljivosti mjerenja:

$$C_rD(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \tag{27}$$

uz uvjet $C_1 \approx C_2$

$$C_rD(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) = 0{,}71\ (|C_1| + |C_2|). \tag{28}$$

Ukoliko je kriterij kritične razlike zadovoljen, mjerenja su **ponovljiva.** Uz jednakost varijanci, rezultati su kompatibilni, što znači da nema signifikantnih promjena preciznosti mjerenja uz danu vjerojatnost P, iako u duljem vremenskom razdoblju uvjeti ponovljivosti nisu zadovoljeni, a moguće su promjene mjeritelja, mjernih instrumenata ili uređaja.

Ukoliko se pri usporedbi dvaju mjernih nizova mjerenih u vremenskom razmaku njihove varijance signifikantno razlikuju, ne možemo rezultate uspoređivati po kriteriju kompatibilnosti, no prema formuli 27 može se primijeniti kriterij ponovljivosti. Ako je taj kriterij zadovoljen, znači da su **takva** mjerenja **ponovljiva,** premda nisu jednake preciznosti.

4. AUTOKORELACIJA

Osnovno o autokorelaciji i njezinu ispitivanju već je bilo pisano u ovome listu (Benčić, Dusman, 1995/4). Određivanjem koeficijenata autokorelacije po redcima, uzimajući parove kao dvostruka mjerenja, dopunit ćemo statistička istraživanja višestrukih mjerenja.

Dok ispitivanja djelovanja utjecajnih veličina na osnovi analize varijanci daju općenitu naznaku njihova djelovanja, istraživanje mjerne kompatibilnosti, odnosno ponovljivosti mjerenja promatranjem kritičnih razlika rezultata po mjernim nizovima (stupcima), te autokorelacije, daje mogućnosti lociranja signifikantnih odstupanja mjernih vrijednosti.

Primjer:

U Laboratoriju za mjerenja i mjernu tehniku Geodetskog fakulteta pri izradi doktorske disertacije mr. sc. Gorana Novković ispitivala je i pogrešku stabilizacije kompenzatora nivelira. Za tu je svrhu prvo određivana pogreška viziranja pri mirnom kompenzatoru korištenjem posebnog mjernog uređaja s mikrometarski pomičnom vizurnom markom. Instrument i mjerni uređaj postavljeni su stabilno na betonski stup. Budući da je trebalo odrediti vrlo male mjerne veličine (red veličine 0″, 1), prema statističkoj je analizi bilo potrebno izvršiti $N = 150$ mjerenja. Za izvršenje takvog zadatka trebalo je, osim stabilnog postava, izabrati odgovarajući mjerni raspored, metode statističkih analiza djelovanja utjecajnih veličina i osigurati kontrolu stabilnosti preciznosti u vremenskom razdoblju mjerenja.

Mjerenja su grupirana u $k = 15$ mjernih nizova s po $n = 10$ mjernih vrijednosti u mjernom nizu. Prvo je izvršeno $k = 5$ mjernih nizova s ukupno $N = 50$ mjernih vrijednosti na osnovi kojih je provedena osnovna analiza i utvrđeni parametri za kontrolu daljnjih mjerenja.*

Kako ti parametri moraju biti vrlo pouzdani, analizi treba pokloniti posebnu pozornost, što uključuje primjenu više statističkih testova, to više što svaki statistički test predviđa mogućnost pogrešnog zaključka na osnovi razine pouzdanosti $1 - \alpha$.

U analizi je prvo primijenjen DIXON-ov test i ustanovljeno da nije bilo pogrešnih mjernih vrijednosti (previda).

1. Statistička analiza metodom analize varijanci.

Na osnovi mjernih vrijednosti izraženih u μm (viziranje marke pomoću mikrometarskog uređaja pri mirnom kompenzatoru) izračunane su slijedeće empirijske varijance:

a) varijanca unutar mjernih nizova (varijanca ponovljivosti)

$$s_{us}^2 = 128{,}79\ \mu m^2 \quad (11)$$

$$s_r^2 = s_{us}^2 = 128{,}79\ \mu m^2 \quad (12)$$

b) varijanca između stupaca

$$s_{is}^2 = 138{,}68\ \mu m^2 \quad (13)$$

c) varijanca unutar redaka

$$s_{ur}^2 = 131{,}20\ \mu m^2 \quad (14)$$

d) varijanca između redaka

$$s_{ir}^2 = 122{,}48\ \mu m^2 \quad (15)$$

e) varijanca ostatka

$$s_{ost}^2 = 130{,}37\ \mu m^2 \quad (16)$$

* Iz brojnih praktičnih ispitivanja Siemes preporuča, da se uz normalnu razdiobu slučajne varijable u mjernoj seriji izvrši do 50 mjerenja (Siemes, 1968).

Analiza varijanci s^2_{is} i s^2_{us} primjenom F-testa (17) pokazala je da nema signifikantne razlike. Sve tri varijance s^2, s^2_{us} i s^2_{is} nepristrano procjenjuju varijancu osnovnog skupa σ^2. Zaključujemo da su ispitivani mjerni nizovi izvedeni u nepromijenjenim uvjetima ponovljivosti.

Za detaljniju analizu ispitivalo se djelovanje utjecajnih veličina između redaka kao statističkih uzoraka (što je korisno ako postoje sumnje u njihovo djelovanje, posebno, ako nije izvršeno ispitivanje razdiobe slučajne varijable).

Pri usporedbi varijanci s^2_{ir} i s^2_{ur} (18), pokazalo se da je $s^2_{ur} > s^2_{ir}$, no budući da nema signifikantne razlike, zaključujemo da je preciznost mjerenja usklađena u svim mjernim nizovima.

Kontrolna analiza usporedbom s varijancom ostatka (19) i (20) dovodi nas do zaključka da i varijance s^2_{is}, s^2_{ir} s^2_{ost} nepristrano procjenuju varijancu osnovnog skupa σ^2.

Općenito zaključujemo da pri mjerenjima nije ustanovljeno signifikantno djelovanje utjecajnih veličina.

U statističkim analizama pomoću F-testa nije bilo sumnji u ispravnost testa, budući da su računane veličine F bile značajno manje od F_0. Kod primjene F-testa, međutim, pokazalo se da je on zadovoljavajući što se tiče pogrešaka druge vrste (pogrešno prihvaćanje hipoteze H_0) (Pavlić, 1977). To znači, prije odbacivanja hipoteze treba svakako primijeniti daljnje statističke analize. To će biti analiza mjerne kompatibilnosti s analizom unutarnje preciznosti mjernih nizova. Te analize prikazujemo u daljnjoj obradi primjera.

2. Analiza mjerne kompatabilnosti

Pomoću COHRAN testa ispitana je homogenost varijanci:

$$C = \frac{s^2_{\mathrm{maks}}}{\Sigma s^2_i} = \frac{12{,}72^2}{674{,}60} = 0{,}24. \qquad \text{Uz } k = 5,\ n = 10,\ C_{\mathrm{krit}} = 0{,}41.$$

Kako je $C < C_{krit}$, nema divergentnih varijanci.

Račun nepouzdanosti srednjih vrijednosti

Na osnovi izračunatih varijanci nizova s^2_i, $i = 1, \ldots, k$ (12)
računamo standardna odstupanja mjernih nizova s^2_i.

Nepouzdanost srednjih vrijednosti računaju se prema poznatom izrazu:

$$C_i = t_i \frac{s_i}{\sqrt{n_i}}, \quad \text{pa uz } P = 95\% \text{ dobivamo:}$$

$$C_1 = 7{,}153,\quad C_2 = 9{,}099,\quad C_3 = 8{,}026,\quad C_4 = 8{,}405,\quad C_5 = 7{,}361\ \mu m.$$

Srednje vrijednosti mjernih nizova jesu:

$$\bar{x}_1 = 69{,}2,\quad \bar{x}_2 = 67{,}8,\quad \bar{x}_3 = 60{,}6\quad \bar{x}_4 = 62{,}4,\quad \bar{x}_5 = 67{,}2\ \mu m.$$

Prema (21) računamo kritične razlike C_rD_k.

Promotrimo li sve kombinacije mjernih nizova uočujemo da su najveće razlike srednjih vrijednosti nizova 1 i 3 ($|\bar{x}_1 - \bar{x}_3|) = 8{,}6\ \mu m$ te 2 i 3 ($|\bar{x}_2 - \bar{x}_3|) = 7{,}2\ \mu m$. Najmanja vrijednost kritične razlike prema (21) iznosi 10,30 μm (1 i 5 niz). Za prvi i teći niz kod kojih je najveća razlika srednjih vrijednosti kritična razlika je 10,78 μm. Prema tome je uvjet kompatabilnosti za sve ispitivane mjerne nizove zadovoljen, što smo i očekivali nakon prethodnih analiza.

Unutarnja preciznost mjernih nizova

Primjenom parametra $r/\sqrt{n}$ prema (26) možemo ispitati unutarnju preciznost mjernih nizova s time, da je pri računu: $r = t s_r \sqrt{2}$, s_r standardno odstupanje ponovljivosti određeno iz ovih mjernih nizova prema (12), a iznosi 11,34 μm. Slijedi, uz $n = 10$, $t/\sqrt{n} = 0{,}71$ $(P = 95\%)$:

$$C_r D_r (\bar{x}_{maks} - \bar{x}_{min}) = 11{,}34 \mu m.$$

Kako je $(|\bar{x}_{maks} - \bar{x}_{min}|) = 8{,}6$ μm, to je uvjet kritične razlike zadovoljen. Svi su rezultati međusobno kompatibilni.

3. Račun mjernih vrijednosti ponovljivosti (r) i obnovljivosti (R)

Nakon izvršene analize preciznosti mjernih nizova možemo računati kontrolne parametre preciznosti za račun kritičnih razlika za kontrole daljnjih mjerenja ili ispitivanja.

Mjerne vrijednosti r i R računamo prema (19) i (20) (Benčić, Dusman, 1995/2) pa je $r = 2{,}8 s_r$ i $R = 2{,}8 s_R$. Budući da se ta ispitivanja izvode u uvjetima ponovljivosti i nisu predviđena mjerenja uz odstupanja od tih uvjeta, to će se odrediti samo mjerna vrijednost ponovljivosti r:

$$r = 2{,}8 s_r = 2{,}8 \cdot 11{,}34 = 31{,}73 \ \mu m.$$

4. Kontrola stabilnosti preciznosti svih izvedenih mjernih nizova ($k = 15$, $N = 150$, $n = 10$)

Na osnovi kriterija kritične razlike ponovljivosti (23) provjeravamo stabilnost preciznsti mjerenja pri daljnjim ispitivanjima. To je ispitivanje **vanjske preciznosti** (uz dani parametar $r = 31{,}73$)

$$C_r D_r (|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|) = \frac{r}{\sqrt{n}} \leq \frac{31{,}73}{\sqrt{10}} \leq 10{,}0 \ \mu m.$$

Srednje vrijednosti ostalih mjernih nizova:

$$\bar{x}_6 = 72{,}1; \quad \bar{x}_7 = 72{,}4; \quad \bar{x}_8 = 67{,}1; \quad \bar{x}_9 = 68{,}7; \quad \bar{x}_{10} = 62{,}6; \ \mu m$$

$$\bar{x}_{11} = 66{,}5; \quad \bar{x}_{12} = 71{,}5; \quad \bar{x}_{13} = 73{,}5; \quad \bar{x}_{14} = 70{,}4; \quad \bar{x}_{15} = 71{,}5; \ \mu m.$$

Razlike srednjih vrijednosti za nizove

$$5 \text{ i } 6\text{: } (|\bar{x}_5 - \bar{x}_6|) = 4{,}9 \ \mu m,$$

$$9 \text{ i } 10\text{: } (|\bar{x}_9 - \bar{x}_{10}|) = 6{,}1 \ \mu m,$$

$$14 \text{ i } 15\text{: } (|\bar{x}_{14} - \bar{x}_{15}|) = 1{,}1 \ \mu m.$$

Budući da su sve razlike srednjih vrijednosti manje od kritične zaključujemo da je uvjet ponovljivosti mjerenja zadovoljen. Preciznost svih mjernih nizova je homogena i stabilna.

5. Konačni rezultati ispitivanja

Na osnovi provjerene stabilnosti preciznosti mjerenja računamo konačnu vrijednost varijance ponovljivosti iz svih mjernih nizova ($k = 15$):

$$s_r^2 = 147{,}5 \ \mu m^2,$$

odnosno standardno odstupanje $s_r = 12{,}1\ \mu m$, što će biti jednako ispitivanoj pogrešci viziranja m_v pri mirnom kompenzatoru.

Budući da je pomična vizurna marka bila na udaljenosti 10,00 m od vertikalne osi nivelira, to će kutni iznos pogreške viziranja biti:

$$m''_v = 0'',25,\ \text{uz nepouzdanost}\ \pm 0'',03\ (P = 95\%).$$

Na isti su način izvršena mjerenja i provjera stabilnosti preciznosti nakon pobuđenog kompenzatora (uz $k = 15$, $N = 150$). Izračunana ukupna pogreška iznosila je:

$$m''_u = 0'',29.$$

Pri ispitivanju primjenom F-testa pokazala se signifikantnost razlike m''_v ι m''_u

Pogreška stabilizacije kompenzatora računa se prema:

$$m''_k = \sqrt{m''^2_u - m''^2_v} = 0'',15,\ \text{uz nepouzdanost}\ \pm 0'',04\ (P = 95\%).$$

Zahvaljujemo se dr. sc. Gorani Novaković na svim mjernim i računskim podacima.

LITERATURA

Benčić D., Dusman F. (1995): Od mjerenja do mjeriteljske informacije, Geodetski list, 2, 129–146.
Benčić D., Dusman F. (1995): Pojam i značenje mjerne ponovljivosti i obnovljivosti, Geodetski list, 2, 107–120.
Benčić D., Dusman F. (1995): Mjerna kompatibilnost i usporedivost mjernih rezultata, Geodetski list, 4, 275–288.
Dusman F., Mudronja V. (1992): Ponovljivost i obnovljivost u mjerenju duljine i kuta, Strojarstvo 34, 13–19.
Lieberasch R. (1974): Die Ausnutzung der statistischen Spannweite für Selbskontrollen bei Doppel- und Mehrfachmessungen. Vermessungstechnik, 5, 183–185.
Pavlić J. (1977): Statistička teorija i primjena, Tehnička knjiga, Zagreb.
Siemes G. (1968): Zur Frage der erforderlichen Beobachtungszahl einer Messungsreihe. Schweiz. Z. Vermess., Photogram. u. Kulturtechn. 3, 75–80.
Vranić V. (1965): Vjerojatnost i statistika, Tehnička knjiga, Zagreb.
Wolf H. (1966): Die Beurteilung der »ausseren« und »inneren« Messgenauigkeit als ein statistisches Problem.

ANALYSIS OF MULTIPLE MEASUREMENTS

Multiple measurements applied in testing and researching tasks, in measurements of high accuracies in general, have to be submitted to detailed analysis for the purpose of testing the activity of influential quantities and defining the parameters of precision, or making conclusions about testing. The paper presents the extensive possibilities of applying statistic methods, and especially of applying the criteria of measuring compatibility and repeatability within the of research works carried out in the Laboratory for precise distance measurements at the Faculty of Engineering and Shipbuilding and in the Laboratory for measurements and measuring techniques at the Faculty of Geodesy, University of Zagreb.

Primljeno: 1996–03–27