UDK 528.23:514.774.8:631.47
Stručni članak

DIJELJENJE TRAPEZA PARALELNO S NJEGOVIM OSNOVICAMA

Miljenko LAPAINE – Zagreb*

SAŽETAK. U članku se razmatra problem dijeljenja trapeza. Pri tome se polazi od članka S. Horvata »Dijeljenje trapeza paralelno sa srednjicom«, objavljenim u Geodetskom listu 1940. i daje jedno objašnjenje Horvatova pristupa te predlaže nova formula.

1. UVOD

Stjepan Horvat došao je na zagrebački Tehnički fakultet 1926. kao ugovorni pristav na Katedru za nižu geodeziju, a 1930. počeo je predavati na Geodetskom odjelu. Predavao je nižu geodeziju, izmjeru gradova, državnu izmjeru, teoriju pogrešaka te geodetsko računanje i crtanje. Godine 1937. postaje izvanredni profesor i predstojnik Geodetskog zavoda, a 1941. redoviti profesor.

U Geodetskom listu 1940, 3, 97–100, objavljen je njegov članak pod naslovom *Dijeljenje trapeza paralelno sa srednjicom*. Na samome početku Horvat kaže da se taj zadatak pojavljuje često u praksi, posebice kod komasacija zemljišta, kada jednu tablu koja ima oblik trapeza treba podijeliti na više dijelova, paralelno sa srednjicom.

Mi ćemo radije govoriti o podjeli trapeza paralelno s njegovim osnovicama. Naime, spominjanje srednjice nije pogrešno, ali njezino uvođenje nije potrebno i može zbunjivati jer se ona eksplicitno ne pojavljuje ni pri postavljanju problema, a niti pri njegovu rješavanju.

Horvat nadalje kaže: »Zadatak se može riješiti na mnogo načina. *Uzimamo dakako, da se taj zadatak mora riješiti numerički* (istaknuo M. Lapaine). No, neće svaki način biti jednako zgodan, jer će jedno rješenje tražiti veći, a drugo manji gubitak vremena. Osim toga moramo ići za tim, da zadatak riješimo na najjednostavniji način i da pri tom omogućimo jednostavna pomagala računa.«

Označimo s a i b osnovice trapeza, s V njegovu visinu i s P površinu (slika 1). Tada je

$$P = \frac{1}{2}(a + b)V. \tag{1}$$

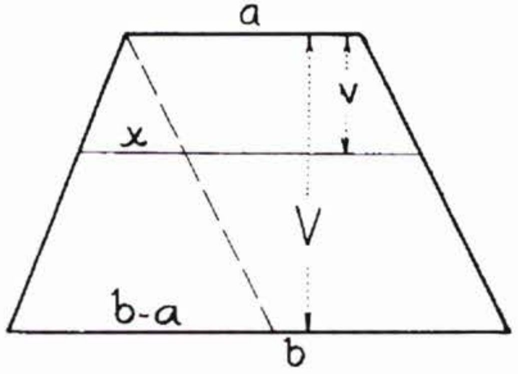
* Mr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10 000 Zagreb, e-mail: miljenko.lapaine@public.srce.hr

Povucimo paralelu s osnovicama na udaljenosti v od osnovice a i označimo s p površinu novog trapeza kojem su osnovice povučena paralela i stranica a. Sa slike 1 lako se zaključuje da vrijedi:

$$p = av + \frac{1}{2}xv, \tag{2}$$

i

$$x : v = (b - a) : V. \tag{3}$$



Slika 1. Dijeljenje trapeza paralelno s osnovicama (prema Horvatu, 1940)

Prema tome može se napisati

$$p = av + \frac{1}{2}\frac{b-a}{V}v^2. \tag{4}$$

Ako bismo iz zadanih a, b, V i p trebali izračunati visinu v, radilo bi se o rješavanju kvadratne jednadžbe

$$\frac{1}{2}\frac{b-a}{V}v^2 + av - p = 0, \tag{5}$$

koja općenito ima dva rješenja

$$v_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2p\dfrac{b-a}{V}}}{\dfrac{b-a}{V}}. \tag{6}$$

Uočimo da negativno rješenje ne dolazi u obzir te pomnožimo brojnik i nazivnik s V kako bismo se riješili dvostrukog razlomka. Dobit ćemo

$$v = \frac{-aV + \sqrt{a^2V^2 + 2p(b-a)V}}{b-a}. \tag{7}$$

Time bi problem bio riješen. Međutim, Horvat uočava da posljednja formula ima dva nedostatka. Prvo, u duba računanja s pomoću logaritamskih tablica trebalo je izbjegavati nezgodne operacije, kao što je primjerice vađenje drugoga korijena. I drugo, formula (7) zakazuje ako su osnovice a i b iste duljine (dijeljenje paralelograma), odnosno postaje nestabilnom ako se osnovice malo razlikuju. U to se možemo lako uvjeriti, jer stavimo li u formulu (7) $a=b$, dobit ćemo neodređeni izraz 0/0.

2. RJEŠENJE PROF. HORVATA

Horvat je u svojemu radu dao rješenje kojim je zaobišao oba spomenuta nedostatka. U nastavku ćemo objasniti kako je, vjerojatno, Horvat došao do svoje metode.

Relacijom (4) prikazana je površina p kao kvadratna funkcija argumenta v:

$$p=p(v). \tag{8}$$

Razvijemo li tu funkciju u Taylorov red u okolini v_o, imamo

$$p=p_o+p_o'\,\Delta v_o+\frac{1}{2}p_o''\,\Delta v_o^2. \tag{9}$$

Pritom je

$$p_o=av_o+\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{V}\,v_o^2, \tag{10}$$

dok su derivacije:

$$p_o'=a+\frac{b-a}{V}\,v_o \tag{11}$$

$$p_o''=\frac{b-a}{V}.$$

Formulu (9) možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$\Delta v=\frac{p-p_o}{p_o'+\frac{1}{2}p_o''\,\Delta v}, \tag{12}$$

koji sugerira iterativnu formulu

$$\Delta v_{i+1}=\frac{p-p_o}{p_o'+\frac{1}{2}p_o''\,\Delta v_i}, \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Za početnu vrijednost Horvat predlaže

$$\Delta v_o=0, \tag{14}$$

dok konstante p_0, p_o', p_o'' računa po formulama (10) i (11) uz približnu vrijednost

$$v_o=\frac{p}{a+\frac{b-a}{2P}\,p}. \tag{15}$$

Za ilustraciju Horvat daje dva numerička primjera. Zadane veličine i konačne vrijednosti za visinu v dajemo pregledno u tablici 1.

Tablica 1. Dva numerička primjera

a	b	V	P	p	v
100 m	200 m	200 m	30 000 m²	10 000 m²	82,85 m
100 m	200 m	200 m	30 000 m²	20 000 m²	146,41 m

Znakovito je da u navedenim primjerima postupak vrlo brzo konvergira; za centimetarsku točnost dovoljne su bile samo dvije iteracije. Primjenom egzaktne formule (7) prva vrijednost za visinu je za 1 cm manja i iznosi 82,84 m, a druga je potpuno jednaka navedenoj u tablici 1.

3. NOVA FORMULA

U današnje vrijeme vađenje drugoga korijena ne čini nam poteškoće i zbog toga ne bismo trebali izbjegavati matematičke izraze kao što je primjerice formula (7). Međutim, njezina numerička nestabilnost, o kojoj je bilo riječi u uvodu, svakako je značajan nedostatak.

Pokazat ćemo kako se taj nedostatak može izbjeći. Poslužimo se postupkom koji se u matematici zove racionalizacija i primijenimo ga na brojnik razlomka (7). Drugim riječima, pomnožimo brojnik i nazivnik razlomka u formuli (7) sa

$$\sqrt{a^2V^2 + 2p(b-a)V} + aV. \tag{16}$$

Nakon kraćenja s $b - a$, dobit ćemo konačnu formulu u obliku

$$v = \frac{2pV}{aV + \sqrt{a^2V^2 + 2p(b-a)V}} \tag{17}$$

ili još malo jednostavnije

$$v = \frac{2p}{a + \sqrt{a^2 + \frac{2p}{V}(b-a)}}. \tag{18}$$

Može se pokazati da je izraz ispod korijena u posljednjoj formuli dujina nove paralelne stranice, tj.

$$a + x = \sqrt{a^2 + \frac{2p}{V}(b-a)}. \tag{19}$$

U specijalnom slučaju $a = b$, formula (18) neće zakazati, već će dati ispravnu vrijednost

$$v = \frac{p}{a}. \tag{20}$$

Više zadataka o podjeli trokuta, četverokuta i poligona može se naći zajedno s rješenjima u poznatom priručniku i udžbeniku Hartnera i Doležala (1910). Među njima je i zadatak koji se razmatra u ovome radu. Numeričko rješenje je u toj knjizi dano formulom koja uz odgovarajuću promjenu oznaka prelazi u izraz u ovome radu označen sa (7). Rješenje koje se vrlo malo razlikuje od predloženog u 3. poglavlju ovoga rada objavio je Filatov 1942. Nadalje, sličan je zadatak na sličan način postavio i riješio Wittke (1957).

U Medićevim skriptama (1978) spominju se tri metode za dijeljenje table trapeznog oblika: analitička, grafička i mehanička. Da bi se mogla primijeniti analitička metoda, potrebno je poznavati kutove na osnovici trapeza i njihove trigonometrijske funkcije. No i sam Medić navodi da je u nekim slučajevima točnost takvog računanja mala, a kako se vidi iz gornjih razmatranja, problem se može riješiti i bez pomoći trigonometrije.

LITERATURA

Filatov, B. (1942): Dijeljenje trapeza paralelno sa srednjicom. Hrvatska državna izmjera 10–11, 174–176.

Hartner, F., Wastler, J., Doležal, E. (1910): Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie, I. Band, 2. Hälfte, 10. Auflage, Verlag von L. W. Seidel & Sohn, Wien.

Horvat, S. (1940): Dijeljenje trapeza paralelno sa srednjicom. Geodetski list 3, 97–100.

Medić, V. (1978): Komasacija zemljišta. Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.

Wittke, H. (1957): Geodätische Rechen-Übungen. Hanseatische Verlagsanstalt GmbH, 2. Auflage, Hamburg.

TRAPEZIUM SUBDIVISION BY USING A LINE PARALLEL TO ITS BASES

The paper deals with the problem of trapezium subdivision. Starting from the paper »Trapezium subdivision by using a line parallel to its median line« by S. Horvat and published in Geodetski list in 1940, the present paper gives the explanation of Horvat's approach, and suggests a new formula.

Primljeno: 1996–05–22