UDK 528.9:528.232.23:514.774:517.3
Originalni znanstveni članak

NUMERIČKA INTEGRACIJA U ELIPSOIDNOJ GEOMETRIJI[1]

Herbert LICHTENEGGER – Graz[2]

SAŽETAK. U radu se prikazuju primjene numeričke integracije za potrebe elipsoidne geodezije. Detaljno su razmotreni glavni geodetski zadaci ne elipsoidu i njegovo konformno preslikavanje.

1. USPOSTAVA PROBLEMA[3]

Poznato je da se mnoge zadaće u elipsoidnoj geometriji baziraju na diferencijalnim jednadžbama, čija integracija nije moguća u zatvorenom obliku. Zbog toga se klasična rješenja prepoznaju po obimnim razvojima u redove. Ta su rješenja zadržana i nakon pojave moćnih računala, umjesto da se krene od jednostavnih diferencijalnih jednadžbi i za njihovo rješenje primijeni numerička integracija. Zbog svoje jednostavnosti takav postupak ima didaktičkog smisla, on pruža niz praktičnih prednosti, kao npr. poželjnu točnost i jednostavno programiranje. Jedini nedostatak numeričke integracije u odnosu na klasično rješenje je velik broj računskih operacija, što u ovom slučaju igra malu ulogu.

U ovome radu prvo su općenito opisane diferencijalne jednadžbe i njihova rješenja. Slijede kratko sažete osnove elipsoidne geometrije. Središnji dio rada opisuje primjenu numeričke integracije za prijenos koordinata na elipsoidu (glavni geodetski zadaci) i konformno preslikavanje plohe elipsoida.

2. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE I NJIHOVO RJEŠENJE

Neka je označena s $y = y(x)$ funkcija definirana u intervalu $x_1 \leq X \leq x_2$, s $y' = dy/dx$ i $y'' = d^2y/dx^2$ prva i druga derivacija s obzirom na argument x. Jednadžba

$$y'' = y''(y', y, x)$$

je obična diferencijalna jednadžba drugog reda. Opće rješenje jednadžbe (1) sadrži dvije konstante integracije. U cilju dobivanja partikularnog rješenja njima

---

[1] Rad je održano predavanje na Geodetskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

[2] Docent dr. sc. Herbert Lichtenegger, Tehničko sveučilište, Steyrergasse 30, A-8010 Graz.

[3] Autor se zahvaljuje prof. dr. sc. Asimu Bilajbegoviću na njegovu prijevodu s njemačkog jezika.

su pridružene numeričke vrijednosti. Kod toga se mogu razlikovati problemi postavljeni u tablici 1.

Tablica 1. Definicija problema početne i rubne vrijednosti

Dane vrijednosti	Postavljeni problemi
$y(x_1), y'(x_1)$	problemi početne vrijednosti
$y(x_1), y(x_2)$	prvi problem rubne vrijednosti
$y'(x_1), y'(x_2)$	drugi problem rubne vrijednosti
$y(x_1), y'(x_2)$	treći problem rubne vrijednosti

Za geometrijsku interpretaciju pretpostavimo da x_1 i x_2 ograničavaju interval definiranosti i da su $y(x_i)$ i $y'(x_i)$ ordinata odnosno derivacija funkcije na mjestu x_i. Poslije je pokazano da i rubni problemi u tablici 1 odgovaraju glavnim geodetskim zadacima (zadacima prijenosa koordinata na elipsoidu). Napomenimo također da se geodetska linija na bilo kojoj plohi može opisati diferencijalnom jednadžbom drugog reda. Ona se može prikladnim transformacijama isto prevesti u sustav dviju diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Npr. poslije supstitucije funkcije $y'(y, x) = z$, zbog $z' = y''$, ekvivalentni sustav jednadžbi (1) glasi:

$$\begin{aligned} y' &= z(y, x) \\ z' &= z'(y', x'). \end{aligned} \tag{2}$$

Partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe prvog reda, npr. $y' = y'(y, x)$ dobije se poslije integracije i uvođenja prethodno zadane početne vrijednosti $y(x_1)$. Označimo:

$$\Delta y_1 = y(x_i) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_1} y'(y, x)\, dx. \tag{3}$$

U svrhu numeričke integracije podijeli se prvo interval definiranja na n jednakih dijelova $\Delta x = (x_2 - x_1)/n$. Pri dovoljno malom Δx može se diferencijalni kvocijent $y' = dy/dx$ zamijeniti s kvocijentom razlika $y' = \Delta y/\Delta x$, a integral (3) s diskretnim zbrojem susjednih razlika ordinata

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = y'(y, x)\, \Delta x. \tag{4}$$

Zbog toga se funkcija $y(x)$ može računati u koracima, polazeći od početne vrijednosti $y(_1)$.

Opisani princip u (4) bit će još poboljšan modificiranim algoritmima. Za primjer je uveden Runge-Kuttin postupak. Kod toga se prvo računaju približne razlike funkcije $\Delta y^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} \Delta y^{(1)} &= y'(y \qquad , x \qquad)\, \Delta x \\ \Delta y^{(2)} &= y'\left(y + \frac{\Delta y^{(1)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x \\ \Delta y^{(3)} &= y'\left(y + \frac{\Delta y^{(2)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x \\ \Delta y^{(4)} &= y'(y + \Delta y^{(1)}, x + \Delta x)\, \Delta x, \end{aligned} \tag{5}$$

a konačna razlika funkcije Δy dobije se iz opće aritmetičke sredine

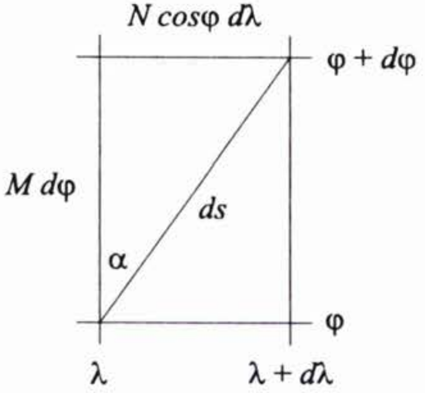
$$\Delta y = \frac{1}{6}[\Delta y^{(1)} + 2(\Delta y^{(2)} + \Delta y^{(3)} + \Delta y^{(4)})]. \tag{6}$$

3. OSNOVE ELIPSOIDNE GEOMETRIJE

3.1. Infinitezimalni pravokutnik

Promatrani elipsoid zadan je svojim poluosima a i b. Kao parametri plohe prvo se uvede elipsoidna širina φ i duljina λ.

Parametarske linije (tj. paralele i meridijani) formiraju, kako je poznato, ortogonalnu mrežu, koja se može rastaviti na diferencijalne pravokutnike prikazane na sl. 1. Dijagonala pravokutnika predstavljena je diferencijalnom duljinom luka ds bilo koje površinske krivulje s azimutom α. Stranice pravokutnika dobiju se preko glavnih polumjera zakrivljenosti, tj. polumjera zakrivljenosti meridijana $M(\varphi)$ i prvog vertikala $N(\varphi)$.



Slika 1. Infinitezimalni pravokutnik

Sa sl. 1 mogu se neposredno očitati

$$\begin{aligned} ds \cdot \cos\alpha &= M\,d\varphi \\ ds \cdot \sin\alpha &= N\cos\varphi\,d\lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

Ako je površinska krivulja geodetskih linija, onda vrijedi Laplaceova jednadžba

$$d\alpha = \sin\varphi\,d\lambda. \tag{8}$$

Jednadžbe (7) i (8) sačinjavaju osnovni sustav diferencijalnih jednadžbi za rješavanje glavnih geodetskih zadataka na elipsoidu. Iz (7) slijedi kvadrat duljine luka

$$ds^2 = [(M\,d\varphi)^2 + (N\cos\varphi\;d\lambda)^2]. \tag{9}$$

3.2. Infinitezimalni kvadrat

Pomoću prikladne transformacije parametara plohe može se jednadžba (9) prevesti u sljedeći oblik:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{m}\right)^2 [du^2 + dv^2]. \tag{10}$$

Geometrijski to znači da se diferencijalni pravokutnik na sl. 1 može prevesti u diferencijalni kvadrat. Površinski parametri (u, v) također se označavaju kao izometrijski parametri. Oni igraju temeljnu ulogu u teoriji konformnih preslikavanja.

Jedna od mogućih parametarskih transformacija dana je s

$$ds^2 = (N\cos\varphi)^2 [dq^2 + d\lambda^2], \tag{11}$$

gdje je izometrijska širina q definirana jednadžbom

$$dq = \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)\cos\varphi} d\varphi. \tag{12}$$

Sljedeća transformacija dana je s

$$ds^2 = M^2 [d\varphi^2 + dl^2], \tag{13}$$

gdje je izometrijska duljina l definirana s

$$dl = \frac{N(\varphi)\cos\varphi}{M(\varphi)} d\lambda. \tag{14}$$

4. PRIJENOS KOORDINATA NA ELIPSOIDU (GLAVNI GEODETSKI ZADACI)

4.1. Definicije

Dvije točke P_1 i P_2 na elipsoidu s razlikom u elipsoidnoj duljini λ, povezane geodetskom linijom duljine s te s polom elipsoida, definiraju geodetski trokut. On je određen sa šest parametara, ali najmanje tri moraju biti zadana. Od ukupno $n = \binom{6}{3} = 20$ mogućih zadataka samo ih je, zbog formalnih zamjena točaka P_1 i P_2, dvanaest različitih. Ti se zadaci mogu prikazati u sljedećem obliku:

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1 & \alpha_1 & s \text{ ili } \lambda \\
\varphi_2 & \varphi_2 & s \text{ ili } \lambda \\
\alpha_1 & \alpha_2 & s \text{ ili } \lambda \\
\varphi_1 & \alpha_2 & s \text{ ili } \lambda \\
\varphi_1 & s & \lambda \\
\alpha_1 & s & \lambda \\
\varphi_1 & \varphi_2 & \alpha_1 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \varphi_1
\end{array}$$

gdje je φ_i *širina i* α_i *azimut u točki* P_i. Posebnu pozornost zaslužuje prvih osam zadataka, sa zadanom duljinom luka s ili razlikom u elipsoidnoj duljini λ, koje nisu ništa drugo nego problemi početnih i rubnih vrijednosti navedeni u tablici 1. U prva dva postavljena zadatka sadržana su oba klasična glavna geodetska zadatka sa zadanim vrijednostima (φ_1, α_1, s), odnosno (φ_1, φ_2, λ).

4.2. Sustav diferencijalnih jednadžbi geodetske linije

Ako je zadana duljina luka s, onda slijedi odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi iz izraza (7) i (8):

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\cos\alpha}{M}=\varphi_s(\varphi,\alpha)$$
$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\tan\varphi\sin\alpha}{N}=\alpha_s(\varphi,\alpha) \tag{15}$$
$$\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\sin\alpha}{N\cos\varphi}=\lambda_s(\varphi,\alpha).$$

Nasuprot tome, ako je zadana razlika u elipsoidnoj duljini λ, onda primjenom lančastog pravila slijedi odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi iz (15). Tako se dobije npr. $d\varphi/d\lambda$ iz produkta $(d\varphi/ds)\cdot(ds/d\lambda)$, tj.

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{N\cos\varphi}{M\tan\alpha}=\varphi_\lambda(\varphi,\alpha)$$
$$\frac{d\varphi}{d\lambda}=\sin\varphi=\alpha_\lambda(\varphi,\alpha) \tag{16}$$
$$\frac{ds}{d\lambda}=\frac{N\cos\varphi}{\sin\alpha}=s_\lambda(\varphi,\alpha).$$

Uočljivo je da sustav jednadžbi (15) zakazuje u blizini pola ($\varphi\rightarrow 90°$), a sustav (16) u blizini meridijana ($\alpha\rightarrow 0°$).

4.3. Rješenje problema početne vrijednosti

Ako su na nekoj točki elipsoida (npr. P_1) zadani širina i azimut, onda rješenje toga problema početne vrijednosti slijedi direktno iz numeričke integracije jednadžbi (15) ili (16). Detaljno će biti prikazana metodika za klasični prvi glavni geodetski zadatak.

Zadana duljina luka s podijelit će se prvo na n ekvidistantnih dijelova $\Delta s = s/n$. Sukladno poopćenoj Runge-Kutta metodi izračunaju se za prvi interval četiri približne razlike

$$\Delta\varphi^{(j)}=\varphi_s(\varphi_j,\alpha_j)\,\Delta s$$
$$\Delta\alpha^{(j)}=\alpha_s(\varphi_j,\alpha_j)\,\Delta s \tag{17}$$
$$\Delta\lambda^{(j)}=\lambda_s(\varphi_j,\alpha_j)\,\Delta s,$$

gdje se uvode sljedeće vrijednosti za argumente (φ_j, α_j) postupno po koracima $j=1, 2, 3, 4$

1	φ_1	α_1
2	$\varphi_1+\Delta\varphi^{(1)}/2$	$\alpha_1+\Delta\alpha^{(1)}/2$
3	$\varphi_1+\Delta\varphi^{(2)}/2$	$\alpha_1+\Delta\alpha^{(2)}/2$
4	$\varphi_1+\Delta\varphi^{(3)}$	$\alpha_1+\Delta\alpha^{(3)}$.

Iz približnih razlika izračunaju se prema jednadžbi (17), analogno jednadžbi (6), opće aritmetičke sredine, te početne vrijednosti za sljedeći interval glase

$$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 + \Delta\varphi$$

$$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 + \Delta\alpha,$$

a opisani algoritam treba ponoviti n puta.

4.4. Rješenja zadataka rubnih vrijdnosti i posebnih zadataka

Za razliku od zadataka početnih vrijednosti, zadaci rubnih odnosno posebnih vrijednosti nisu uvijek jednoznačni.

Rješenje se dobije iterativnim postupkom i skicirat će se metodika rješavanja klasičnog drugoga glavnog zadatka. U konkretnom slučaju podijeli se zadana razlika elipsoidnih duljina λ na n ekvivalentnih intervala $\Delta\lambda = \lambda/n$. S prethodno zadanim vrijednostima, pomoću sfernih približenja, odredi se približni početni azimut

$$\alpha_1^\circ = \alpha_1^\circ\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \lambda), \tag{18}$$

a tada se na osnovi sustava (16) računa prvi glavni geodetski zadatak. Kao rezultat slijedi, među ostalim, približna vrijednost φ_2° za prethodno zadanu širinu u krajnjoj točki. Na osnovi razlike $d\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_2^\circ$ i iz (18) proizašlih diferencijalnih odnosa dobije se dodatak $d\alpha_1 = d\alpha_1\,(d\varphi_2)$, te se s popravljenim početnim azimutom $\alpha_1^\circ = \alpha_1^\circ + d\alpha_1$ ponovi računanje prvoga glavnog zadatka. Iteracija se ponavlja tako dugo dok se s dovoljnom točnošću ne ispuni uvjet $\varphi_2^\circ = \varphi_2$.

5. KONFORMNA PRESLIKAVANJA ELIPSOIDA

5.1. Definicije

Neka su zadane dvije plohe W i Z s odgovarajućim izometrijskim parametrima $(u,\ v)$ i $(x,\ y)$. Preslikavanje W na Z (i obrnuto) općenito je definirano ako su poznate funkcije

$$\begin{aligned} u &= u\,(x,\ y) \\ v &= v\,(x,\ y) \end{aligned} \tag{19}$$

Ako se parametri ploha obuhvate kompleksnim veličinama $\omega = u + i \cdot v$ i $z = x + i \cdot y$, s i kao imaginarnom jedinicom, onda se može (19) napisati u sljedećem obliku:

$$\omega = f\,(z) \tag{20}$$

U posebnom slučaju ravninskog preslikavanja po sličnosti ili Helmertova preslikavanja vrijedi linearna ovisnost $\omega = (me^{-i\alpha})\,z = a\,z$, gdje je m mjerilo i α zakretanje konformnog preslikavanja. Kompleksnom broju a odgovara u vektorskom načinu pisanja koso-simetrična matrica Helmertove transformacije.

Diferencijali jednadžbi preslikavanja polazeći od (19) glase:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = u_x dx + u_y dy \tag{21}$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = v_\chi \delta\chi + v_y dy,$$

ili polazeći od jednadžbe (20)

$$d\omega = \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz = f'(z)\, dz. \tag{22}$$

Konformno preslikavanje definirano je jednakošću kutova u diferencijalnom području. S time mora u (21) sadržana matrica transformacije biti Helmertova matrica koja ispunjava sljedeće uvjete

$$u_x = v_y \quad \text{i} \quad u_y = v_x \tag{23}$$

Te tzv. Cauchy-Riemannove jednadžbe su ispunjene ako je kompleksna funkcija $f(z)$ analitička. U ovom slučaju vrijedi za njezine derivacije također

$$f'(z) = (u_x + i\,\omega_x) = \frac{\partial\,(u + i\,v)}{\partial x}. \tag{24}$$

Konformno transformirane koordinate dobiju se integracijom (22)

$$\Delta\omega = (\Delta u + i\,\Delta v) = \int_z f'(z)\, dz = \int_z \frac{\partial\,(u + i\,v)}{\partial x} (dx + i\,dy), \tag{25}$$

gdje se ponovno mogu primijeniti metode numeričke integracije, doduše u kompleksnoj aritmetici.

Konformno preslikavanje elipsoida u ravninu dijeli se stoga u sljedeća poglavlja: definicija izometrijskih koordinata na elipsoidu i uspostava analitičke funkcije preslikavanja pomoću njezinih derivacija i integracija. Za ilustraciju će biti opisana procedura na primjeru Gauss-Krügerove projekcije.

5.2. *Gauss-Krügerova projekcija*

Ta je projekcija konformno preslikavanje elipsoida u ravninu i obrnuto. Da se izbjegne velika deformacija duljina, izabere se u promatranom području jedan referentni meridijan λ_0 i formiraju se razlike duljina $(\lambda - \lambda_0)$. Referentni (srednji ili glavni) meridijan se prema definiciji preslikava dužinski vjerno u ravninu (s mjerilom $m = 1$). Za sve ostale točke vrijedi kompleksna jednadžba preslikavanja

$$x + i\,y = g\,(q + i\,\lambda) \quad \text{ili} \quad z = g\,(\omega), \tag{26}$$

gdje funkcija g, zbog zahtjeva konformnosti mora biti analitička. Diferencijalne jednadžbe preslikavanja glase analogno jednadžbama (22) i (24)

$$dz = g'\,(\omega)\, d\omega = \frac{\partial\,(x + i\,y)}{\partial q} (dq + i\,d\lambda). \tag{27}$$

Na dužinski vjernom referentnom meridijanu duljini luka ds prema definiciji odgovara diferencijalna promjena koordinate dx. Stoga tamo vrijedi prema (7)

$$\frac{dx}{d\varphi} = M\,(\varphi) \tag{28}$$

i zbog $\lambda = 0 = y$ pojednostavnjuje se funkcija $g'\,(\omega)$ u

$$g'(\omega) = \frac{dx}{dq}. \tag{29}$$

S obzirom na jednadžbe (12) i (28) može se također napisati:

$$\frac{dx}{dq} = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dq} = M(\varphi) \frac{N(\varphi)}{M(\varphi)} \cos\varphi = N(\varphi)\cos\varphi. \tag{30}$$

Izvan referentnog meridijana mogu se ravninske koordinate (x, y) kao i izometrijski parovi koordinata (q, λ) prema (11) i (φ, l) prema (13) prevesti u kompleksne veličine;

$$\begin{aligned} z &= x + i\,y && \text{kompleksne Gaussove koordinate} \\ L &= q + i\,\lambda && \text{kompleksna duljina} \\ B &= \varphi + i\,l && \textit{kompleksna širina.} \end{aligned} \tag{31}$$

Te kompleksne veličine (z, L, B) prelaze na referentnom meridijanu zbog $y = \lambda = l = 0$ u realne vrijednosti (x, q, φ). Diferencijalni odnosi između kompleksnih koordinata mogu se prema teoriji funkcija također predstaviti kao analitičko produljenje odgovarajućih diferencijalnih odnosa u području realnih brojeva. Iz usporedbe s (28), (12) i (30) slijedi:

$$\frac{dz}{dB} = M(B) \tag{32}$$

$$\frac{dL}{dB} = \frac{M(B)}{N(B)\cos B} \tag{33}$$

$$\frac{dz}{dL} = N(B)\cos B. \tag{34}$$

Jednadžbe (32) – (34) su osnovne (kompleksne) diferencijalne jednadžbe Gauss-Krügerove projekcije. Budući da je kompleksna širina B unaprijed nepoznata, praktična se obrada dešava u dva koraka. Tu će se skicirati preslikavanje elipsoida u ravninu i obrnuto. Pritom se za dobivanje početnih vrijednosti izabere uvijek točka na referentnom meridijanu sa zadanom širinom φ ili s njome određenom duljinom luka meridijana $s^*(\varphi) = \mathrm{x}$. S time se uspostavljaju odnosi

$$x_0 = x, \qquad L_0 = q, \qquad B_0 = \varphi.$$

U slučaju preslikavanja elipsoida u ravninu dobit će se kompleksna krajnja širina B integracijom inverzne funkcije (33). Kod toga je ekvidistantni inkrement jednak $\Delta L = (L - L_0)/n = (i\,\lambda)/n$.

U drugom koraku slijedi računanje prirasta koordinata $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ pomoću integracije izraza (32). Konačne koordinate slijede iz

$$x = s^*(\varphi) + \Delta x \quad \text{i} \quad y = \Delta y.$$

U slučaju preslikavanja ravnine na elipsoid dobit će se konačna kompleksna širina B putem integracije izraza (33). Konačna vrijednost širine dobije se kao zbroj duljine luka meridijana pripadajuće širine $s^* = x$ i izračunanog prirasta širine iz Δq. Duljina je identična prirastu $\Delta\lambda$.

Neka bude još spomenuto da se mjerilo u oba slučaja dobije kao norma funkcije preslikavanja (34), dok konvergencija meridijana proizlazi iz njezina negativnog argumenta.

6. ZAKLJUČAK

Primjena numeričke integracije u elipsoidnoj geometriji ima pored ostalih i didaktičke prednosti. Upotrijebljeni sustavi formula zbog svoje se jednostavnosti mogu lako praktično primijeniti. Izuzev spomenutih pojedinačnih slučajeva primjena procedure ne nalazi nikakve poteškoće. Ona je uz ostalo isprobana i od strane studenata u seminarskim radovima. S obzirom na točnost dobiveni rezultati zadovoljavaju, a prirodno duže vrijeme računanja kao jedini nedostatak postupka može se zanemariti pri upotrebi moćnih osobnih računala.

Na kraju se napominje, da je za rješavanje glavnih geodetskih zadataka (prijenos koordinata na elipsoidu) i za konformno preslikavanje elipsoida u ravninu Gauss-Krügerovom projekcijom razvijen programski modul koji zainteresirani mogu dobiti na raspolaganje.

LITERATURA

Glasmacher, H. (1987): Die Gauß'sche Ellipsoid-Abbildung mit komplexer Arithmetik und numerischen Näherungsverfahren. Schriftenreihe der Universität der Bundeswehr, Heft 29, München.

Lichtenegger, H. (1987): Zur numerischen Lösung geodätischer Hauptaufgaben auf dem Ellipsoid. Zeitschrift für Vermessungswesen, 112. Jg., Heft 10.

Lichtenegger, H. (1990): Transformation of Geodetic and Isometric Latitude by Numerical Integration. Survey Review Vol. 30, No. 236.

Mattner, W. (1992): Numerische Integration konformer Abbildungsgleichungen. Seminararbeit am Institut für Angewandte Geodäsie, TU Graz.

NUMERICAL INTEGRATION IN ELLIPSOIDAL GEOMETRY

The paper deals with applications of numerical integration in ellipsoidal geometry. The principal tasks in geodetic triangles on the ellipsoid and its conformal mapping are treated in detail.

Primljeno: 1994–04–18