

ALBRESOVA EKVIVALENTNA KONUSNA PROJEKCIJA

Mirjana LECHTHALER, Brankica MALIĆ – Beč, Osijek*

SAŽETAK. U članku su obrađena oba kartografska zadatka u Albresovoj ekvivalentnoj konusnoj projekciji s dvije ekvidistantne paralele. U osnovnom (prvom) kartografskom zadatku računaju se pravokutne koordinate x i y iz geografskih koordinata φ i λ , a u inverznom (drugom) zadatku računaju se geografske koordinate φ i λ iz pravokutnih koordinata x i y . Priloženi su dijagrami tijekom spomenutih zadataka te dijelovi izlaznih listi fortranskog programa. U članku je naglašena praktična primjena obrađene teme.

1. UVOD

U literaturi su teorijski razrađene uspravne, poprečne i kose konusne projekcije. Međutim, upotrebljavaju se gotovo samo projekcije u uspravnom položaju, koje su pogodne za područja srednjih širina izduženih u smjeru istok-zapad. U pravilu ih primjenjujemo za sitnija mjerila kod pojedinačnih i atlasnih karata (Hake i dr., 1994; Snyder 1989). Jednadžbe preslikavanja razlikuju se za konformne, ekvivalentne i ekvidistantne projekcije, već prema svojstvima preslikavanja elipsoida, odnosno kugle na ravninu.

Konformna konusna projekcija s jednom ili dvije standardne paralele (Lambert 1772) upotrebljava se za potrebe državne izmjere ili izradu topografskih karata u nizu zemalja: Alžir, Bangladeš, Belgija, Botswana, ..., SAD, Tanzanija, Togo (Frančula i dr., 1985).

Ekvidistantna konusna projekcija s jednom ili dvije standardne paralele za izabrano manje područje preslikavanja može zamijeniti konformnu, odnosno ekvivalentnu projekciju, naime mjerilo u smjeru sjever-jug postojano je duž svih meridijana. Ta projekcija, primijenjena u praksi za preslikavanje Aljaske, poznata je u literaturi kao modificirana transversalna Merkatorova projekcija. Za preslikavanje užeg područja oko ekvatora zamijenila je ekvidistantnu cilindričnu projekciju (Snyder, 1987).

Ekvivalentnu konusnu projekciju susrećemo u literaturi razrađenu također s jednom ili s dvije standardne paralele. S dvije standardne paralele (Albers 1805) primjenjuje se kod mnogobrojnih atlasnih karata sitnijih mjerila. Njome je u National Atlas iz 1970. predstavljeno svih 50 američkih država. U mjerilu

* Dr. sc. Mirjanka Lechthaler, Institut für Kartographie und Reproduktionstechnik TU Wien, A-1040 Wien, Karlsgasse 11.
Mr. sc. Brankica Malić, Građevinski fakultet Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, HR-31000 Osijek, Drinska 16a.

1 : 2 500 000 nešto starijeg datuma prikazane su Tektonska i Geološka karta SAD, dok je osnovna topografska karta istog područja dana u mjerilu 1 : 3 168 000 (Snyder, 1987, 1989). Područje Azije i Dalekog istoka dano je na 6 karata u mjerilu 1 : 5 000 000 u sklopu Regional Economic Atlas for Asia and Far East (Knaus i dr., 1973). Bečki Vojnogografski institut izdaje Preglednu kartu Europe u mjerilu 1 : 750 000. Mnoge europske zemlje rabe za prikaz svog područja tu projekciju (Fiala, 1973). Isto je tako primijenjena u Internacionalnoj karti svijeta - IWK - u mjerilu 1 : 1 000 000 kao i u jednom starijem izdanju službene Pregledne karte Austrije u mjerilu 1 : 500 000 (Grüll, 1973). Ekvivalentna kosa Albersova projekcija s dvije standardne paralele, tzv. Ekumenska projekcija (Ecumenical Projection, Ökumenische Projektion) poslužila je za prikaz naseljenog svijeta u doba starih Grka i Rimljana. To područje, koje obuhvaća Zapadnu i Južnu Europu, Sjevernu Afriku, Srednji istok te Srednju, Južnu i Istočnu Aziju, zbog njegova specifičnog protezanja moguće je jedino u toj projekciji prikazati s minimalnim deformacijama (Westfall, 1970).

Zbog učestale primjene ekvivalentne konusne projekcije, kako je vidljivo iz gornjih primjera, postoji potreba za razradom osnovnih zadataka. Računanje ravninskih koordinata x, y iz geografskih koordinata φ, λ , te računanje geografskih koordinata φ, λ iz pravokutnih koordinata x, y obrađeno je teorijski u kartografskim udžbenicima i časopisima (Frančula i dr., 1984a, 1984b, 1986; Hake i dr., 1994; Wagner, 1947; ...). Ovaj je rad prilog automatizaciji tih zadaća*.

2. KONUSNE PROJEKCIJE

Geometrijski jednostavnu i jasnu sliku mreže konusne projekcije čine meridijani preslikani kao snop zraka i paralele preslikane kao koncentrične kružnice sa središtem u preslikanom geografskom polu, tj. točki S ; što se vidi na slici 1. Kutu λ između meridijana na kugli odgovara kut α između preslikanih meridijana u projekciji. Pritom postoji odnos među kutovima:

$$\alpha = n \lambda,$$

gdje je projekcijska konstanta n omjer $\sigma/2\pi$. Kut σ je vršni kut plašta stošca, razvijenog u projekcijsku ravninu. U daljem izlaganju pod kutom λ podrazumijevamo razliku geografskih duljina $\lambda_P - \lambda_0$ promatrane točke P u karti i središnje točke karte M , koja je ujedno i pol projekcije.

Konstanta n poprima vrijednosti $0 < n < 1$. Za $n=1$ radilo bi se o azimutalnoj, a za $n=0$ o cilindričnoj projekciji. U ovoj projekciji razlikujemo dva slučaja:

- konus dotiče kuglu u jednoj ekvidistantno preslikanoj paraleli (slika 1):

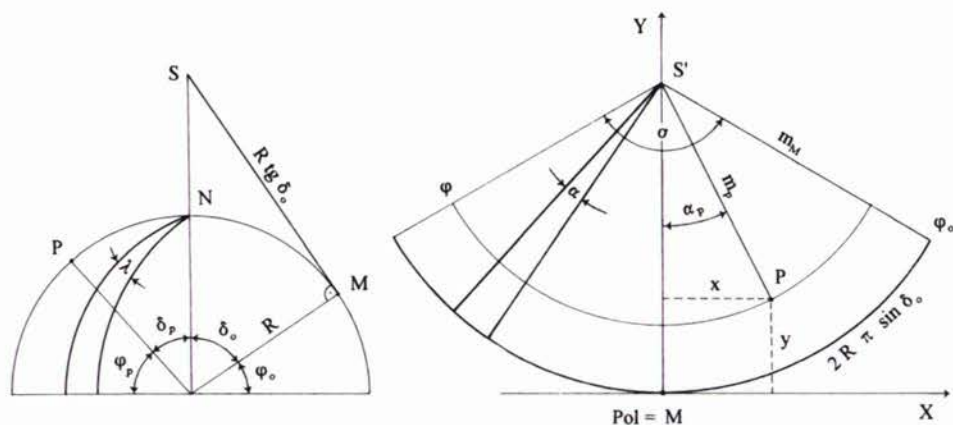
$$m = f(\delta_0, \delta),$$

- konus siječe kuglu u dvije ekvidistantno preslikane paralele (slika 2):

$$m = f(\delta_1, \delta_2, \delta),$$

gdje je m polumjer paralele prikazan kao funkcija polarnih udaljenosti δ (Hake i dr., 1994).

* Rad je proizašao unutar tromjesečnog znanstvenog boravka mr. Malić na Institut für Kartographie und Reproduktionstechnik TU Wien, i primjenjivat će se u praktične svrhe.



Slika 1: Prikaz elemenata uspravne konusne projekcije s jednom ekvidistantno preslikanom paralelom.

2.1. Ekvivalentna konusna projekcija

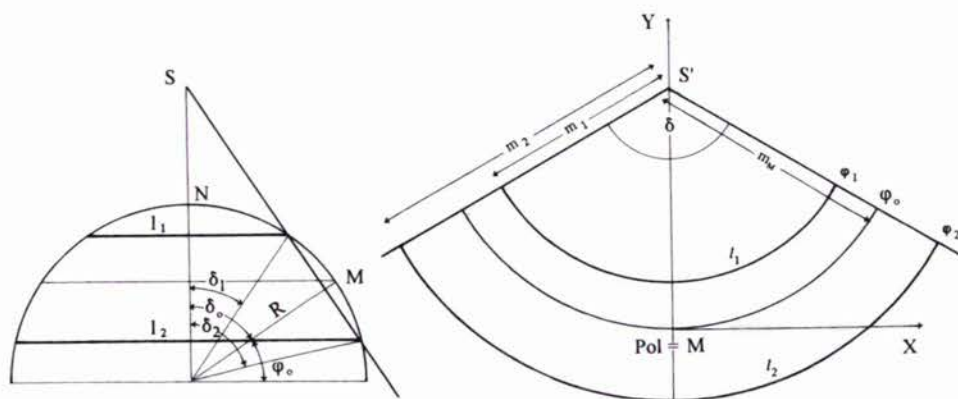
Gore spomenuta dva slučaja nalazimo i u ekvivalentnoj konusnoj projekciji. Lambert još 1772. teorijski obrađuje preslikavanje s jednom ekvidistantnom paralelom. Preslikavanje s dvije ekvidistantne paralele razradio je 1805. H. C. Albers, te odatle i naziv Albersova projekcija (Hake i dr., 1975).

Označe li se vrijednosti δ_1, δ_2 u izrazima:

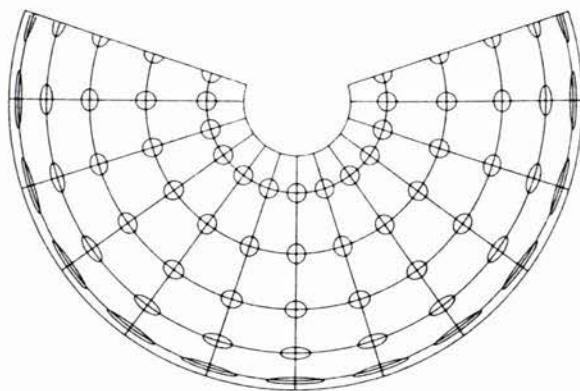
$$\delta_1 = 90^\circ - \varphi_1,$$

$$\delta_2 = 90^\circ - \varphi_2,$$

kao polarne udaljenosti izabranih paralela, tada je prvi uvjet te projekcije njihovo ekvidistantno preslikavanje. Iz uvjeta ekvivalentnosti proizlazi jednakost površine



Slika 2: Prikaz elemenata uspravne konusne projekcije s dvije ekvidistantno preslikane paralele.



Slika 3: Prikaz geografske mreže gustoće 30° u Albersovoj projekciji s dvije standardne paralele $\varphi_1 = 20^\circ$ i $\varphi_2 = 60^\circ$ sjeverne širine te odgovarajućih deformacija danih Tissotovom indikatrixom (Snyder, 1989).

na kugli, koja leži između ekvidistantnih paralela φ_1 , φ_2 i odgovarajuće površine na plaštu stošca. Veličina i smjer deformacija prikazane Tissotovom indikatrixom u projekcijskoj ravni za standardne paralele $\varphi_1 = 20^\circ$ i $\varphi_2 = 60^\circ$ sjeverne širine dane su na slici 3. Gustoća mreže je 30° (Snyder, 1989).

Iz navedenih uvjeta (slika 1, slika 2) slijede jednadžbe i koeficijenti projekcije (bez izvođenja; vidi Hake i dr. 1994; Wagner 1973; Maling 1993):

$$\alpha = n \lambda,$$

$$n = \frac{\cos \delta_1 + \cos \delta_2}{2},$$

$$m_M = \frac{2R}{n} \sqrt{\sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin^2 \frac{\delta_2}{2} + n \sin^2 \frac{\delta_0}{2}}.$$

2.1.1. Povijesna crtica o nastanku ekvivalentne konusne projekcije

Engleski matematičar Patrick Murdoch prikazuje u svom djelu *Philosophical Transaction for 1758* tri konusne projekcije. Heinrich Christian Albers (1773–1883) osvrće se kritički na spomenuto djelo, te u *Zachovu časopisu Monatlicher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*, u svescima XI i XII iz 1805. objavljuje napise *Über Murdochs drei Kegelprojektionen i Beschreibung einer neuen Kegelprojektion*. U potonjem djelu opisuje svoju projekciju kao ekvivalentnu konusnu projekciju s dvije ekvidistantno preslikane paralele (tzv. standardne paralele). Godine 1806. autor predstavlja u toj projekciji kartu istočne Indije *Chartevon Ostindien diesseits des Ganes* u mjerilu 1 : 7 200 000, koja je tiskana kod Banchera u Gothi.

O životu lüneburškog kartografa Albersa malo se zna. Rođen je 27. srpnja 1773. kao drugi sin u obitelji gradskog komornika i trgovca. O njegovoj naobrazbi može se također samo nagađati. Urođenu sklonost prema matematici i prirodnim znanostima produbljuje najvjerojatnije sam. Poznato je da su ga oslovljavali

titulom doktor, no nije nađeno ništa zapisano o njegovim učiteljima ili o studiju koji je apsolvirao. Klavirske kompozicije pod njegovim imenom i zapisi o genijalnom igraču šaha pokazuju višestranu nadarenost. Njegovi vrlo jasni kartografski prikazi (očuvani u gradskoj biblioteci u Lüneburgu) uvijek su bili povezani s trgovačkim putovima obitelji Albers (Grüll, 1973).

2.2. Računanje pravokutnih koordinata x , y iz geografskih koordinata φ , λ

Navedeni autori Hake i dr. (1994), Knaus i dr. (1973), Snyder (1987), Wagner (1949) i mnogi drugi daju teoretsku osnovu prvoga kartografskog zadatka, naime računanja pravokutnih koordinata x , y u projekcijskoj ravnini iz zadanih geografskih koordinata φ i λ .

$$m_P = \frac{2R}{n} \sqrt{\sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin^2 \frac{\delta_2}{2} + n \sin^2 \frac{\delta_P}{2}}.$$

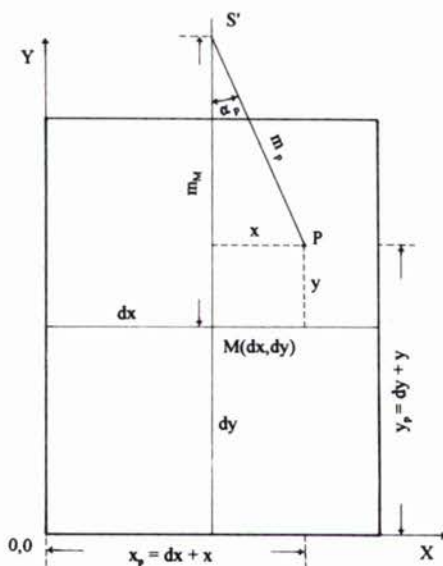
$$\alpha_P = n \lambda_P.$$

U toj projekciji, kad je primjenjujemo za sitnija mjerila, s dovoljnom točnošću Zemlju aproksimiramo kuglom radijusa R . Sljedeći korak je određivanje x , y – projekcijskih koordinata točke P :

$$x = \frac{m_P \sin \alpha_P}{m_k},$$

$$y = \frac{m_M - m_P \cos \alpha_P}{m_k},$$

gdje je m_k nazivnik mjerila karte.



Slika 4: Konstrukcija geografske mreže u Albersovoj projekciji.

Pravokutne koordinate točke P , s obzirom na neki izabrani okvir karte u kojem leže osi koordinatnog sustava u projekcijskoj ravnini, dane su izrazima (slika 4):

$$x_p = dx + x,$$

$$y_p = dy + y.$$

Točka M je središnja točka karte i ujedno pol projekcije s koordinatama dx i dy .

Dijagramom toka prikazanog slikama 6 i 7 dan je postupak računanja pravokutnih koordinata x , y iz geografskih koordinata φ , λ .

Računanje pravokutnih koordinata u Albersovoj projekciji pri preslikavanju elipsoida opisuju Knaus i dr. (1973) i Snyder (1987) i navode, primjerice, američke kartografske prikaze.

2.3. Računanje geografskih koordinata φ , λ iz pravokutnih koordinata x , y

U inverznom kartografskom zadatku polarne koordinate točke P proizlaze iz sljedećih jednadžbi (vidi slike 1, 2 i 4):

$$m_p = \sqrt{(m_M - y)^2 + x^2},$$

$$\alpha_p = \arctan \frac{x}{m_M - y},$$

pri čemu prvo računamo projekcijske koordinate x , y iz koordinata x_p , y_p točke P vezane na izabrani okvir karte:

$$x = (x_p - dx) m_K,$$

$$y = (y_p - dy) m_K.$$

Nakon računanja polarnih koordinata slijedi računanje geografskih koordinata φ , λ za točku P :

$$\lambda_{II} = \frac{\alpha_p}{n},$$

$$\varphi_p = 90^\circ - \delta_p,$$

$$\delta_p = 2 \arcsin \sqrt{\frac{m_p^2 n}{4R^2} - \frac{\sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin^2 \frac{\delta_2}{2}}{n}}.$$

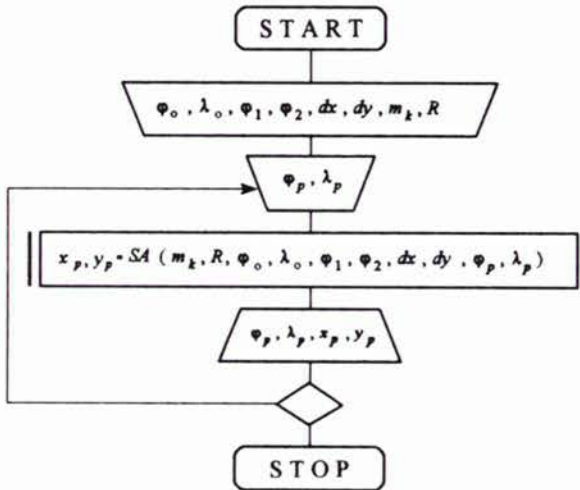
Dijagramom toka prikazanog slikama 6 i 7 dan je postupak računanja geografskih koordinata φ , λ pravokutnih koordinata x , y .

3. PRIMJERI

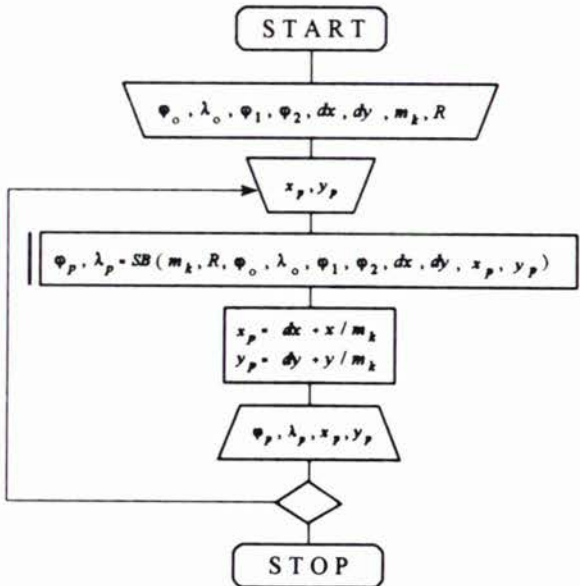
Na osnovi dijagrama prikazanih na slikama 6 i 7 napisani su kompjutorski računalni programi u FORTRAN-u.

Kao prilog služe izlazne datoteke s ispisanim parametrima projekcije te ulaznim i izlaznim koordinatama točaka (slika 5). Vrijednost R određena je pomoću modula GEONET ugrađenog u programu DIGMAP.

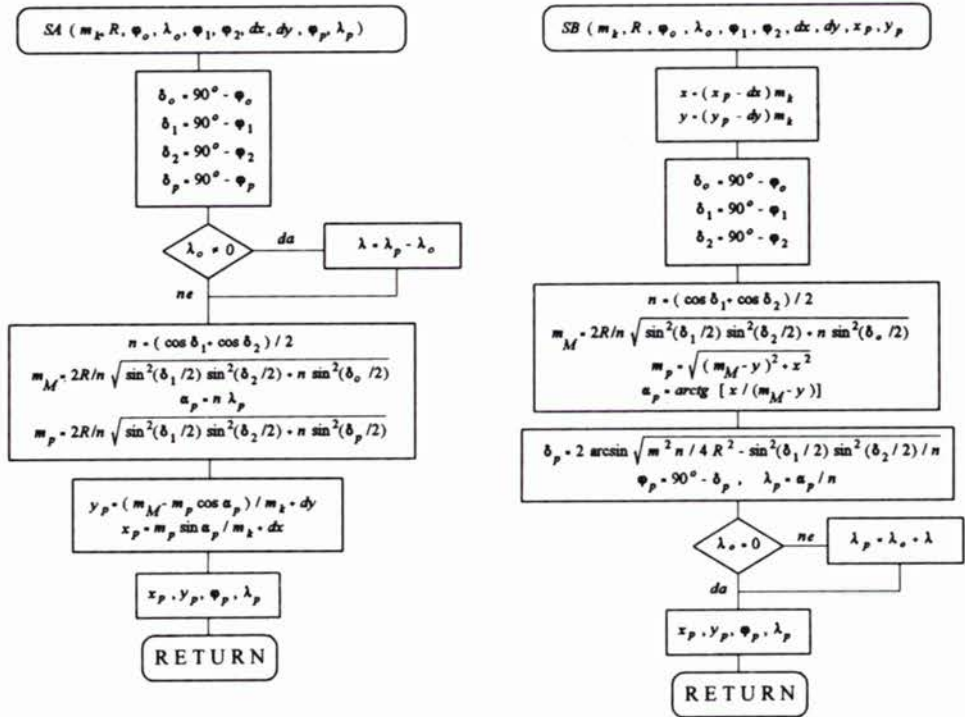
x, y iz φ, λ u Albersovoj projekciji



φ, λ iz x, y u Albersovoj projekciji



Slika 6: Dijagrami toka računanja pravokutnih koordinata x, y iz geografskih koordinata φ, λ i obratno u Albersovoj projekciji.



Slika 7: Dijagrami toka potprograma primijenjenih u glavnim programima za računanje osnovnog i inverznog kartografskog zadatka u Albersovoj projekciji.

ZAKLJUČAK

Institut za Kartografiju i reprodukciju tehniku Tehničkog univerziteta u Beču posjeduje vlastiti softver program DIGMAP, koji se po svojim karakteristikama može ubrojiti u osnovno pomagalo rabljeno pri stvaranju kartografskog informacijskog sustava KIS (Kelnhöfer i dr., 1994; Lechthaler, 1995). Prevođenje objekata geoprostora i njihovih geokodiranih informacija u kartografske objekte obavlja se po zakonima kartografiranja ovisno o mjerilu preslikavanja. Geometrija kartografskih objekata prikazanih u Albersovoj projekcijskoj ravnini i pohranjena u KIS-u može se gore izloženim putem prevesti u sfernu, te po potrebi koristiti unutar KIS-a u jednom drugom geo/kartografskom isječku ili se može transformirati u koju drugu projekcijsku ravninu, već prema danim zakonima preslikavanja. U formulama za transformaciju značajno mjesto imaju osnovni i inverzni kartografski zadatak.

PARAMETRI PROJEKCIJE

Mjerilo karte 6000000.
 Srednja točka
 $\varphi = 54.42. 59.9976$
 $\lambda = 33. 0. 0.0000$
 DX= 253.2500
 DY= 285.7500
 Fi 1.stand.par.= 42. 0. 0.00000000000000
 Fi 2.stand.par.= 52. 0. 0.00000000000000

ULAZNI (φ, λ) I IZLAZNI (X,Y) PODACI PROGRAMA S1.FOR

	φ		λ	X	Y
62.45.	43.8702034339709	3.59.	11.2152390705255	0.00000	478.66390
62.48.	7.2175468257286	3.59.	11.1687754066156	0.25312	479.31890
63.36.	8.4253500234142	3.59.	10.1629408048856	5.32127	492.43390
56.47.	9.8079912081207	7.59.	23.3236636958982	0.00000	364.38581
57.12.	0.2485605964867	7.59.	22.9692881678064	2.36667	371.57811
63.36.	9.5954416490817	7.59.	16.7931289383347	38.26057	480.65840
69.15.	28.1718803194792	7.59.	9.8043967186328	68.15282	571.50000

ULAZNI (X,Y) I IZLAZNI (φ, λ) PODACI PROGRAMA S6.FOR

X	Y		φ		λ
0.00000	478.66390	62.45.	43.8702034339709	3.59.	11.2152390705255
0.25312	479.31890	62.48.	7.2175468257286	3.59.	11.1687754066156
5.32127	492.43390	63.36.	8.4253500234142	3.59.	10.1629408048856
0.00000	364.38580	56.47.	9.8079912081207	7.59.	23.3236636958982
2.36666	371.57810	57.12.	0.2485605964867	7.59.	22.9692881678064
38.26057	480.65840	63.36.	9.5954416490817	7.59.	16.7931289383347
68.15282	571.50000	69.15.	28.1718803194792	7.59.	9.8043967186328

Slika 5: Izlazne datoteke računalnih programa za računanje osnovnog i inverznog kartografskog zadatka u Albersovoj projekciji.

LITERATURA

- Fiala, F. (1973): *Mathematische Kartographie*, VEB Verlag Technik, Berlin.
- Frančula, N., Jovičić, D. i Žarinac-Frančula, B. (1984a): Obrnuti kartografski zadatak. *Geodetski list*, 10-12, 289-296.
- Frančula, N., Lapaine, M. i Petrović, S. (1984b): Rješavanje obrnutog kartografskog zadatka primjenom Hardyjevih topografskih jednadžbi. VI međunarodni simpozij Projektiranje i praćenje proizvodnje računalom, Zagreb, Zbornik radova, 45-50.
- Frančula, N., Lapaine, M. i Petrović, S. (1986): Transformacija koordinata iz jedne kartografske projekcije u drugu. Peto jugoslavensko savjetovanje o kartografiji, Novi Sad, Knjiga I, 49-58.
- Frančula, N. i Mileta-Hrvojić, V. (1985): Lambertova konformna konusna projekcija. *Geodetski list*, 10-12, 297-313.
- Grüll, (1973): Heinrich Christian Albers (1773-1833): *Leben und Wirken des Lüneburger Kartographen*. *Kartographische Nachrichten* 23, 5, 196-203.
- Hake, G., Grünreich, D. (1994): *Kartographie*, Walter de Gruyter, Berlin.
- Kelnhofner, F., Lechthaler, M. (1994): DIGMAP - Digitales kartographisches Informations- und Originalisierungssystem. *Kartographische Nachrichten*, 6, 209-219.
- Knaus, H., Knorr, H. (1973): Proposal for the Projection of the Maps 1 : 5 000 000 of the Regional Economic Atlas for Asia and the Far East. *Nachrichten aus den Karten- und Vermessungswesen, Reihe II*, 29, 5-19.

- Lechthaler, M. (1995): Visualisation and Interpretation of Spatial Information without Understanding Cartographic Rules. Zbornik radova Eurocarto XIII (u tisku), Ispra/Italija.
- Maling, D. H. (1993): Coordinate Systems and Map Projections. Pergamon Press Oxford, New York, Seul, Tokyo.
- Snyder, J. P. (1987): Map Projections – A Working Manual. U. S. Geological Survey Professional Paper 1395.
- Snyder, J. P., Voxland, Ph. M. (1989): An Album of Map Projection. U. S. Geological Survey Professional Paper 1453.
- Wagner, K. (1949): Kartographische Neztentwürfe. Bibliographisches Institut Leipzig, 52–62.
- Westfall, J. E. (1970): The Ecumenical Projection. Canadian Cartographer 1970, 1, 42–47.

EQUIVALENT CONICAL PROJECTION (ALBERS PROJEKCTION)

This article describe both main problems of an equivalent conicle projection with two equidistant parallels (Albers). In the first main problem the calculations of rectangular coordinates x , y out of geographic φ , λ and in the second main problem the calculations of geographic φ , λ out of rectangular coordinates x , y are executed. This article contains the workflow diagrams as well as parts of the lists of the FORTRAN program for the main problems.

Primljeno: 1995–06–15