UDK 528:088.3:519.24
Originalni znanstveni članak

MJERNA KOMPATIBILNOST I USPOREDIVOST MJERNIH REZULTATA

Dušan BENČIĆ, Federico DUSMAN – Zagreb*

SAŽETAK. Na osnovi definicije mjerne ponovljivosti opisuje se šire značenje njezine primjene pri usporedbi međusobno neovisnih rezultata mjerenja. To dovodi, pri ponovljenim mjerenjima ili ispitivanjima, i do novog pojma ponovljivosti mjerenja u slučaju potpune kompatibilnosti između rezultata dobivenih pri vremenski odvojenim mjernim nizovima. Analiziraju se pojmovi mjerne kompatibilnosti i usporedivosti mjerenja, te njihovo značenje.

1. UVOD

Ovaj rad nastavak je prethodnog rada istih autora (Benčić, Dusman, 1995) u kojemu su prikazani pojmovi i značenje *mjerne ponovljivosti i obnovljivosti* kao i njihova osnovna primjena u usporedbenim mjerenjima.

Usporedbena mjerenja imaju danas značajnu primjenu u mjernoj tehnici. Uvedena su u prvom redu za međulaboratorijska ispitivanja preciznosti mjerenja i kompatibilnosti mjernih uređaja i metoda, a temelje se na usporedbi (razlici) rezultata mjerenja u načelu na istomu mjernom objektu.

Usporedba pri ispitivanju preciznosti mjerenja, kao i djelovanju utjecajnih veličina, može se obavljati na različite načine:

- određivanjem mjerne vrijednosti ponovljivosti i obnovljivosti r i R,
- ispitivanjem ponovljivosti mjerenja,
- određivanjem mjerne kompatibilnosti,
- ispitivanjem autokorelacije.

Primjenom tih načina može se zaključiti o usporedivosti rezultata mjerenja na različitim mjeriteljskim mjestima, različitim mjernim uređajima i instrumentima, u različitim okolišnim uvjetima ili primjenom različitih metoda mjerenja (uz isti mjerni objekt).

Usporedbenim mjerenjima određene mjerne vrijednosti ponovljivosti r i obnovljivosti R nisu samo kriteriji ocjene preciznosti mjerenja više istovjetnih mjeriteljskih laboratorija ili osnovnih ispitnih jedinica (u geodetskim ispitivanjima osnovna jedinica ima drugo značenje), već kao *kritična razlika* i mjerila za ocjenu preciznosti u duljem vremenskom razdoblju, a time i otkrivanje sustavnih odstupa-

* Prof. dr. Dušan Benčić, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb
Prof. dr. Federico Dusman, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lucića 1, Zagreb

nja zbog djelovanja utjecajnih veličina. Upravo je u tome prednost primjene i tih mjera preciznosti u odnosu npr. na standardno odstupanje (također kao mjere preciznosti).

Dva mjerna niza mogu imati približno jednaka standardna odstupanja (ista preciznost), ali značajnu razliku srednjih vrijednosti. Kritične razlike, kao mjerila razlika srednjih vrijednosti otkrivaju nedozvoljene promjene.

2. USPOREDBA MJERNIH NIZOVA MJERENIH U UVJETIMA PONOVLJIVOSTI. PONOVLJIVOST MJERENJA

Istaknuli smo da su statističke analize samo procjena na osnovi statističke vjerojatnosti, a osnovni zakon teorije vjerojatnosti je zakon velikih brojeva. Stoga prof. V. Vranić (1965) kaže: »Statističko zaključivanje jedno je od najtežih zaključivanja, uvijek smo u opasnosti da izvjesni rezultat krivo protumačimo, ako stvaramo prebrzo zaključke.«

Upravo takve opasnosti postoje u primjeni kriterija kritične razlike. Uzrok tome može biti u određivanju mjerne vrijednosti ponovljivosti r, odnosno obnovljivosti R uz *malen broj ponavljanja* mjerenja i posebno *nejednakom* broju mjrenja. Ako se takva vrijednost r uzme kao kritična razlika za razliku samo dviju mjernih vrijednosti, nepouzdanost procjene može biti značajna (Mandel, 1987).

Zbog toga se i u Međunarodnoj normi ISO 5725–1986 (E) (u daljnjem tekstu ISO norma) predviđa da se kritične razlike izvedene iz ponovljivosti i obnovljivosti računaju iz dva niza mjerenja izvedenih u kraćem vremenskom razdoblju u uvjetima ponovljivosti, odnosno obnovljivosti. U tom će slučaju uz poznatu ponovljivost r *kritična razlika* biti (Benčić, Dusman, 1995):

$$C_rD\,(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=r\sqrt{\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_2}}, \tag{1}$$

gdje je:

r mjerna vrijednost ponovljivosti utvrđena usporedbenim mjerenjima,

n_1 i n_2 broj mjerenja u prvom, odnosno drugom mjernom nizu.

Takva primjena dvaju mjernih nizova u usporedbi s njihovim srednjim vrijednostima $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ vodi nas do novog pojma *ponovljivosti mjerenja.*

No kako bismo se približili pouzdanijoj analizi moramo pretpostaviti da je i mjerna vrijednost ponovljivosti r određena na osnovi jednakog broja ponavljanja mjerenja, uz $n \geq 5$ (u ISO normi predviđeno je i $n = 2$). U nekim usporedbenim mjerenjima teško je zadovoljiti te uvjete (složena mjerenja), no u većini je slučajeva to moguće bez teškoća.

Ako je s_r standardno odstupanje ponovljivosti određeno primjerice na temelju usporedbenih mjerenja, to se mjerna vrijednost ponovljivosti r računa prema formuli

$$r=f\sqrt{2}\cdot s_r, \tag{2}$$

Uzmemo li uz našu pretpostavku* $f=t$, gdje je t faktor Studentove razdiobe (prema ASTM 1978, 1981, 1983; ISO 1979), uvrštenjem ove vrijednosti r u furmulu (1) za kritičnu razliku dvaju mjernih nizova dobivamo:

$$C_rD(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=\sqrt{t^2\frac{s_r^2}{n_1}+t^2\frac{s_r^2}{n_2}}. \tag{3}$$

Kako je $t\frac{s}{\sqrt{n}}=C$ izraz za nepouzdanost srednje vrijednosti, uz pretpostavku usklađenosti faktora t (ovisno o broju mjerenja), možemo uzeti da je dovoljno točno:

$$C_rD(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\ \text{uz}\ s=s_r. \tag{4}$$

Ako uzmemo $f=z=1{,}96$ (≈ 2), kao što se preporuča u ISO normi, a što vrijedi za veći broj ponavljanja pri određivanju r, tada je:

$$C_rD(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=\sqrt{z^2\frac{s_r^2}{n_1}+z^2\frac{s_r^2}{n_2}}. \tag{5}$$

Budući da je z neovisan o broju mjerenja (Benčić, Dusman 1994), bit će:

$$C_rD(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=\sqrt{C_1^2+C_2^2}. \tag{6}$$

Dobili smo formulu za kritičnu razliku u skladu sa zakonom o prirastu pogrešaka koji se temelji na slučajnim pogreškama mjerenja.

Mjerna je *ponovljivost* po definiciji kriterij preciznosti mjerenja *unutar mjernih nizova*, no *kritična razlika ponovljivosti* je kontrolna mjera preciznosti i njezine postojanosti, kako vidimo, između mjernih nizova, što dovodi do primjene pojma – *ponovljivosti mjerenja* određene kritičnom razlikom.

U ovom slučaju srednje smo vrijednosti uspoređivali *poznatim* parametrima mjerne ponovljivosti r. No, *kriterijem ponovljivosti mjerenja* možemo uspoređivati i srednje vrijednosti nizova međusobno, ako je standardno odstupanje ponovljivosti nepoznato.

Ako su izmjerena dva mjerna niza u uvjetima ponovljivosti uz približno jednak broj ponavljanja, to će, uz procijenjena standardna odstupanja s_1 i s_2, nepouzdanost srednjih vrijednosti niza $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ biti:

$$C_1=t_1\frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \tag{7}$$

$$C_2=t_2\frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \tag{8}$$

Uz pretpostavku da nema značajnih razlika varijanci, računamo srednju vrijednost nepouzdanosti:

$$C^2=\frac{C_1^2+C_2^2}{2},\ \text{slijedi:}\ C=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{C_1^2+C_2^2}, \tag{9}$$

uz vjerojatnost P kojom su dane nepouzdanosti C_1 i C_2. Kritična će razlika ponovljivosti biti:

$$C_rD(|\bar{y}_1-\bar{y}_2|)=C\sqrt{2}=\sqrt{C_1^2+C_2^2}, \tag{10}$$

u skladu sa zakonom o prirastu pogrešaka.

---

* Vidi i: prof. dr. Zvonimir Narobe: Pouzdanost rezultata iz malog broja mjerenja, Geodetski list, 1964, 7–9.

Zaključujemo općenito: ako je razlika srednjih vrijednosti mjernih nizova manja od kritične razlike računane pomoću procijenjenih varijanci (prema zakonu o prirastu pogrešaka), takvi mjerni nizovi zadovoljavaju *kriterij ponovljivosti mjerenja* i jednostavno kažemo da su takva mjerenja *ponovljiva*. To znači da na mjerenja ne djeluju signifikantno utjecajne veličine. Ona su neovisna i nekorelirana. Preciznost mjerenja nije signifikantno promijenjena, a rezultati mjerenja su takvi kao da su mjerenja izvedena u *nepromijenjenim uvjetima ponovljivosti*.

To ima mogućnosti primjene i u geodetskoj mjernoj praksi pri ispitivanjima utjecaja neizbježnih promjena okolišnih uvjeta. Sve dok razlike srednjih vrijednosti mjernih nizova ne prelaze kritičnu razliku, zadovoljen je kriterij ponovljivosti mjerenja.

Veće razlike od kritične ukazuju na značajno djelovanje utjecajnih veličina i na pojavu sustavnih pogrešaka u mjerenju, odnosno moguće promjene objekta mjerenja. Ovi zaključci vrijede uz izabranu vjerojatnost P.

3. OBNOVLJIVOST MJERENJA

Promatrajmo mjerenja u uvjetima obnovljivosti. Za kritičnu razliku obnovljivosti na osnovi usporedbe dvaju mjernih nizova primjenjuje se formula (ISO norma), (vidi Benčić, Dusman, 1995):

$$C_rD(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|) = \sqrt{R^2 - r^2\left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)}. \tag{11}$$

Mjerenja su *obnovljiva* sve dok razlika srednjih vrijednosti nije veća od kritične razlike obnovljivosti.

Kriterij obnovljivosti mjerenja daje ujedno granična odstupanja, odnosno određuje granične razlike, uz promjene uvjeta mjerenja nepredviđene pri određivanju veličine R, da bi se osigurala zadovoljavajuća točnost mjerenja.

4. MJERNA KOMPATIBILNOST

Mjerna je kompatibilnost još jedna mjera pri usporedbenim mjerenjima između dva laboratorija. Rezultati mjerenja su *kompatibilni* na razini mjerne kompatibilnosti uz uvjet da *apsolutna razlika* rezultata mjerenja istoga mjernog objekta $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$ bude manja ili jednaka zbroju pripadnih mjernih nesigurnosti umnoženih s koeficijentom kompatibilnosti k_u:

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \leq k_u(|U_1| + |U_2|), \tag{12}$$

uz vjerojatnost P kojom su dane procjene mjernih nesigurnosti U_1 i U_2 (Dusman, 1992).,

Pri usporedbenim mjerenjima niza paralelnih graničnih mjerki koja su izvršili Laboratorij za precizna mjerenja dužina Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu (LFSB), Instituto di Metrologia »G. Colonetti« (IMGC) u Torinu i Technische Universität Dresden (TUD), uzeta je vrijednost $k_u = 1$, a rezultati su iskazani na 0,01 μm (Dusman, 1992). Na temelju rezultata usporedbenih mjerenja uz korištenje interferometara, ustanovljeno je da su rezultati na svim razinama međusobno kompatibilni i uz $k_u = 0,7$, što pokazuje visoku međunarodnu razinu preciznosti mjerenja LFSB u Zagrebu.

Uvjet mjerne kompatibilnosti definiran izrazom (12) odnosi se na usporedbu rezultata dvaju mjerenja. Prvi je put postavljen 1984. god., a kasnije je teorijski dograđen i eksperimentalno provjeren. Iz njega su izvedeni pojmovi: razina kompatibilnosti R_c i koeficijent kompatibilnosti K_U (Dusman, Mudronja, 1992). Navedeni pojmovi nisu obuhvaćeni međunarodnim ISO normama.

4.1. *Usporedba kriterija ponovljivosti i kompatibilnosti*

Uzmimo općenit izraz za kritičnu razliku ponovljivosti:

$$C_rD(|\overline{y}_1 - \overline{y}_2|) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tag{13}$$

uz pretpostavke koje smo usvojili ($n_1 \approx n_2 \geq 5$) pri usporedbi srednjih vrijednosti nizova $\overline{y}_1$ i $\overline{y}_2$.

Za usporedbu s kriterijem kompatibilnosti potrebno je naći omjer:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2}/(|C_1| + |C_2|), \tag{14}$$

uz uvjet da se iskazana mjerna nesigurnost U_1 i U_2 ne razlikuje značajno od nepouzdanosti C_1 i C_2, što znači da smatramo kako nema prisutnosti sustavnih odstupanja koja bi imala značajan utjecaj.

Ukoliko je $C_1 = C_2$, taj omjer iznosi $\sqrt{2}/2 = 0{,}71$, a ako je $C_1 = 2C_2$, taj omjer iznosi $\sqrt{5}/3 = 0{,}75$.

Vidimo, ako se C_1 ne razlikuje značajnije od C_2 i $n_1 \approx n_2$, a to smo postavili kao *uvjet*, može se uzeti dovoljno točno:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}71(|C_1| + |C_2|). \tag{15}$$

To znači, ukoliko se uzme koeficijent kompatibilnosti $k_u = 0{,}71$, bit će:

$$C_rD(|\overline{y}_1 - \overline{y}_2|) \leq 0{,}71(|C_1| + |C_2|), \tag{16}$$

i ako je taj uvjet zadovoljen, usporedbena mjerenja zadovoljavaju i *kriterij ponovljivosti* – mjerni rezultati su *potpuno kompatibilni,* a razlike rezultata su *slučajne*. Na taj su način oba kriterija međusobno usklađena.

5. USPOREDBA KRITERIJA PONOVLJIVOSTI MJERENJA SA STATISTIČKIM TESTOVIMA

Analize rezultata mjerenja statističkim metodama izvode se na osnovi izvršenih mjerenja na taj način da mjerni niz pri normalnoj razdiobi *slučajne* varijable smatramo *uzorkom* koji pripada *osnovnom skupu* s očekivanom srednjom, vrijednosti μ i varijancom σ^2. Statističkim ispitivanjima dvaju ili više mjernih nizova mjerenih u vremenskom odmaku može se utvrditi da li uz pretpostavku jednakih varijanci (tj. jednake preciznosti mjerenja) imaju i jednaka očekivanja srednjih vrijednosti. Ukoliko je to slučaj, to je dokaz da nije bilo djelovanja promjenljivih utjecajnih veličina ili novih sustavnih faktora. ispitivanja se svode na promatranje razlika srednjih vrijednosti nizova $(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)$ na osnovi procijenjenih varijanci s_1^2 i s_2^2. Pretpostavljanjem nulte hipoteze H_0 o istovjetnosti očekivanih vrijednosti $(H_0 : \mu_1 = \mu_2)$ u odnosu na alternativnu hipotezu H_1 $(H_1 : \mu_1 \neq \mu_2)$ utvrđuje se domena prihvaćanja, odnosno odbacivanja nulte hipoteze.

Pogreška prve vrste nastaje kod prihvaćanja hipoteze H_1 kad je stvarno istinita hipoteza H_0. Izabrana vjerojatnost takve pogreške označuje se s α.

Kako vidimo, ta se statistička ispitivanja odnose na istu problematiku koju smo razmatrali pri ispitivanju ponovljivosti mjerenja, pa bi ih bilo zanimljivo usporediti.

Uzmimo primjere iz udžbenika statističke teorije i teorije pogrešaka:

I. Pavlić (1965) pod naslovom Studentov t-test Uzorak-uzorak obrađuje taj problem analizom dvaju uzoraka sa srednjim vrijednostima $\overline{y}_1$ i $\overline{y}_2$ i varijancama s_1^2 i s_2^2. Domenu prihvaćanja H_0 definira relacijom:

$$\frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{s_d} \leq t,$$

gdje je t varijabla Studentove razdiobe, s time da je varijanca razlike $|\overline{y}_1 - \overline{y}_2|$:

$$s_d^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}, \tag{17}$$

sa stupnjem slobode $k = n_1 + n_2 - 2$ i uz signifikantnost za prihvaćanje hipoteze $H_0 : 1 - \alpha$.

Ako je razlika srednjih vrijednosti $|\overline{y}_1 - \overline{y}_2|$ manja ili jednaka ts_d, hipoteza H_0 se prihvaća pa kažemo da nema signifikantne razlike između $\overline{y}_1$ i $\overline{y}_2$ (uz razinu pouzdanosti $1 - \alpha$).

Uzmimo sad pretpostavke koje smo usvojili kao potrebne pri ispitivanju ponovljivosti:

$$n_1 \approx n_2 \text{ i } s_1 \approx s_2 = s.$$

Uvrštenjem u gornje relacije bit će:

$s_d = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{2}$, odnosno $ts_d = t \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{2}$, a test se svodi na uvjet:

$$|\overline{y}_1 - \overline{y}_2| \leq \frac{ts}{\sqrt{n}} \sqrt{2}.$$

Kako je: $C = \frac{ts}{\sqrt{n}}$ nepouzdanost srednje vrijednosti bit će $|\overline{y}_1 - \overline{y}_2| \leq C\sqrt{2}$, uz razinu pouzdanosti uzetu za C na osnovi ukupnog broja mjerenja.

Uzmemo li:

$$C \approx \frac{|C_1| + |C_2|}{2},$$

prihvaćanje nulte hipoteze dato je uvjetom:

$$(|\overline{y}_1 - \overline{y}_2|) = 0{,}71(|C_1| + |C_2|),$$

odnosno uz

$$C^2 \approx \frac{C_1^2 + C_2^2}{2}, \text{ bit će } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \text{ a}$$

$$|\overline{y}_1 - \overline{y}_2| \leq \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Zaključujemo: signifikantne razlike srednjih vrijednosti mjernih nizova nema ako je zadovoljen uvjet (uz $n_1 \approx n_2$ i $s_1 \approx s_2$)

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_2| \leq \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}71(|C_1| + |C_2|),$$

a to je *uvjet ponovljivosti i kompatibilnosti* uz ($k_u = 0{,}71$), ako se vrijednost varijable t uzima na osnovi ukupnog broja mjerenja.

L. Feil (1990) analizira isti problem pod naslovom Test dviju srednjih vrijednosti razdioba vjerojatnosti s nepoznatim standardnim odstupanjima skupova.

Uz navedenu formulu dat ćemo primjer iz istoga udžbenika (uz iste oznake).

Primjer:

Neka osnovica mjerena je prije više godina i dobivena je vrijednost $\bar{x} = 2657.367$ m iz 12 mjerenja ($n_x = 12$) i uz srednju pogrešku $m_{\bar{x}} = 2$ mm.

Novo mjerenje izvedeno je istim postupkom i instrumentom, a dobivena je vrijednost $\bar{y} = 2657.352$ iz 10 mjerenja ($n_y = 10$) i uz srednju pogrešku $m_{\bar{y}} = 3$mm.

$$(\bar{x} - \bar{y}) = 15 \text{ mm}.$$

Testom treba utvrditi da li je došlo do promjene duljine osnovice, odnosno može li se ova razlika smatrati slučajnom.

Srednja pogreška računana iz svih mjerenja (svih vrijednosti uzoraka):

$$m = \sqrt{\frac{m_{\bar{x}}^2 n_x (n_x - 1) + m_{\bar{y}}^2 n_y (n_y - 1)}{n_x + n_y - 2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12 \cdot 11 + 9 \cdot 10 \cdot 9}{12 + 10 - 2}} = 8{,}18\text{mm}$$

Srednja pogreška m_d razlike $(\bar{x} - \bar{y})$:

$$m_d = \sqrt{m_{\bar{x}}^2 + m_{\bar{y}}^2} = \sqrt{\frac{m_{\bar{x}}^2}{n_x} + \frac{m_{\bar{y}}^2}{n_y}} = m\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} = 8{,}18\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}} = 3{,}50\text{mm}$$

(uz uvjet $m_{\bar{x}}^2 \approx m_{\bar{y}}^2 \approx m^2$).

Broj stupnjeva slobode $f = n_x + n_y - 2 = 20$.

Uz odabranu razinu signifikantnosti $(1 - \alpha) = 0{,}95$ iz statističke tablice $t = 2{,}09$ pa će biti:

$$-tm_d < \bar{x} - \bar{y} < tm_d,$$

odnosno

$$-7{,}32 < \bar{x} - \bar{y} < 7{,}32.$$

Zaključak: razlika mjerenja $\bar{x} - \bar{y} = 15$ mm je značajna, jer se nalazi izvan navedenih granica.

Izvršimo istu analizu primjenom *uvjeta ponovljivosti* mjerenja, odnosno mjerne *kompatibilnosti* (uz $k_u = 0{,}71$):

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \leq 0{,}71 \cdot (|C_1| + |C_2|).$$

Uvjet: $n_x \approx n_y$; $m_{\bar{x}} \approx m_{\bar{y}}$; $f = n_x + n_y - 2$

Kako je:

$$C_1 = tm_{\bar{x}};\ C_2 = tm_{\bar{y}};\ m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}};\ m_{\bar{y}} = \frac{m_y}{\sqrt{n}},\ t = 2.09 \text{ uz } (1 - \alpha) = 0{,}95,$$

slijedi:

$$|C_1| + |C_2| = t(m_{\bar{x}} + m_{\bar{y}}),$$

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \leq 0{,}71\, t(m_{\bar{x}} + m_{\bar{y}}).$$

Dolazimo do istog rezultata $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \leq 7{,}4$ mm. Dakle, nije zadovoljen ni uvjet ponovljivosti, a rezultati nisu kompatibilni.

Iz tih analiza i primjera očita je *jednostavnost* primjene usporedbe rezultata primjenom kriterija *ponovljivosti mjerenja* i *mjerne kompatibilnosti,* uz uvjet približno jednakog broja ponavljanja u mjernim nizovima.

Istaknimo još jednom da smo zahtjev za približno jednakim brojem mjerenja u nizovima prilikom usporedbenih ispitivanja postavili i radi sigurnijih analiza (jednake težine mjerenja) zbog uvijek prisutnih nepoznatih sustavnih odstupanja.

Zbog toga je i osnovni prigovor ISO normi što dozvoljava po osnovnoj jedinici različit broj mjerenja i vrlo mali broj mjerenja. Posebno je opasno ako računski model i formular za računanje postane šablona po kojoj mjeritelj bez dodatnih analiza dolazi do iskazanih informacija o preciznosti mjerenja (vidi ad. 2., V. Vranić).

6. USPOREDIVOST MJERNIH REZULTATA

Mjerna usporedivost u normi DIN 1319,3, 1983 izjednačena je s pojmom mjerna obnovljivost, međutim, pojam usporedivosti ima šire značenje. Mjerna se usporedivost u načelu odnosi na mjere uspoređivanja pri svakom obliku usporedbenih mjerenja.

Smisao će se tog izraza najbolje uočiti pri usporedbi dviju metoda mjerenja.

6.1. *Usporedba dviju metoda mjerenja*

Osim ispitivanja preciznosti mjernih uređaja i opreme, vrsnosti mjeritelja i okolišnih uvjeta svakako je važna i usporedba dviju metoda mjerenja s ciljem da se *usporedbenim mjerenjima* ustanovi odnos preciznosti i kompatibilnosti metoda. Postoji više varijanti tih usporedbi.

1. varijanta

Ako su za jednu metodu izvršena usporedbena mjerenja određivanjem mjerne ponovljivosti r i obnovljivosti R, moguća su usporedbena ispitivanja na dva načina:

Prvi, složeniji i dugotrajniji način je primjena istog usporedbenog postupka i za drugu metodu također određivanjem mjerne ponovljivosti i obnovljivosti mjerenjem na istom objektu i u istim uvjetima. Analiza se obavlja usporedbom mjernih vrijednosti ponovljivosti, odnosno obnovljivosti.

Drugi je način da se drugom metodom na istom objektu (uvjeti određivanja r i R) izvrše mjerenja u dva mjerna niza s dovoljnim brojem mjerenja u jednakim uvjetima za r odnosno R, što će nam dati srednje vrijednosti nizova $\bar{y}_1$ i $\bar{y}_2$ (za r odnosno R). Moguće je izvršiti jednaka ispitivanja u više osnovnih jedinica pa se uzima srednja vrijednost $\bar{\bar{y}}_1$ i $\bar{\bar{y}}_2$. Računanjem kritične razlike prema poglavlju 2, odnosno 3 procjenjuje se da li je ispitivana metoda jednake preciznosti, tj. da li su metode usporedive.

2. varijanta

Pri ispitivanju mjernih metoda unutar jednog laboratorija ili osnovne jedinice, mogu se svakom metodom izvršiti mjerenja istog objekta u uvjetima ponovljivosti u dovoljnom broju ponavljanja. Računanjem nepouzdanosti srednjih vrijednosti C_1 i C_2 utvrđuje se prema prikazanim formulama, zadovoljavaju li metode uvjet ponovljivosti mjerenja, odnosno kompatibilnosti. Ne zadovoljavaju li metode te uvjete, one nisu usporedive.

7. USPOREDBENA MJERENJA UZ ISPITIVANJE AUTOKORELACIJE

Pri usporedbenim mjerenjima upoznali smo značenje kritične razlike za otkrivanje djelovanja utjecajnih veličina u mjernom procesu. Ispitivanje ponovljivosti mjerenja temeljilo se na usporedbi sredina mjernih nizova, uz pretpostavku da je broj mjerenja u nizu približno jednak. Prema tome, imamo za ispitivanje sljedeću osnovnu shemu:

Mjerni nizovi

	1	2	3	. .	k	.
A	x_{11}	x_{21}	x_{31}	. .	x_{k1}	$\overline{x}_A$
B	x_{12}	x_{22}	x_{32}	. .	x_{k2}	$\overline{x}_B$
.	.	.	.	. . .		.
.	.	.	.	. . .		.
N	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}	. .	x_{kn}	$\overline{x}_N$
	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	. .	$\overline{x}_k$	$\overline{\overline{x}} = \dfrac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots . \overline{x}_k}{k}$

Pretpostavimo li da se mjerenja u svakom pojedinom mjernom nizu (1.....n) izvode u kratkom vremenskom razdoblju u uvjetima ponovljivosti, a da između mjernih nizova protiče određeni vremenski interval, očito je da može doći do signifikantnih razlika srednjih vrijednosti. Kritičnom razlikom srednjih vrijednosti ($\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_k$) određen je kriterij ponovljivosti mjerenja i jedna je od metoda ispitivanja usporedbenim mjerenjima.

Ta problematika naravno nije nova i istraživanja su pokazala različite matematičko-statističke modele analiza promjena u mjernom procesu, mjernim uređajima i opremi, ili djelovanje promjenljivih okolišnih uvjeta. Za potpuniji prikaz osvrnimo se na neke.

Već gornja shema pokazuje mogućnost analiza, poznatih u statističkoj teoriji pod nazivom *Analiza varijance djelovanjem promjenljivih faktora (Pavlić, 1965)*.

Ta metoda omogućuje otkrivanje promjena pri mjerenjima na osnovi analiza varijanci unutar i između mjernih nizova kao statističkih uzoraka.

Kao ocjene mjere točnosti u geodetskim se mjerenjima primjenjuju izrazi:
- »unutarnja« točnost s mjerom disperzije:

$$m_u = \sqrt{\frac{[v\,v]}{N-k}}, \tag{18}$$

gdje je N broj svih mjernih vrijednosti, k broj mjernih nizova, v odstupanje pojedine mjerne vrijednosti unutar mjernih nizova od sredina $\overline{x}_i$ (vidi shemu).

Ova mjera disperzije odgovara standardnom odstupanju ponovljivosti s_r (Benčić, Dusman, 1995), s obzirom da je na primjer pri jednakom broju mjerenja n, u nizovima:

$$s_r^2 = \frac{1}{k}\sum s_i^2 = \frac{1}{k}\,\frac{[v\,v]_1 + [v\,v]_2 + \ldots [v\,v]_k}{n-1} = \frac{[v\,v]}{k\,n-k} = \frac{[v\,v]}{N-k},$$

budući da je $k \cdot n = N$.

– »vanjska« točnost s mjerom disperzije:

$$m_v = \sqrt{\frac{n[v'\,v']}{k-1}}, \tag{19}$$

gdje je n broj mjernih vrijednosti u nizu, k broj mjernih nizova, v' odstupanje sredina nizova od ukupne srednje vrijednosti $\bar{\bar{x}}$ (Wolf, 1966).

Statističkim F-testom može se ocijeniti razlikuju li se signifikantno te srednje pogreške, odnosno varijance. Istaknimo da je struktura formula »vanjske« točnosti i standardnog odstupanja obnovljivosti različita, iako obje pokazuju utjecaj promjena uvjeta pri mjerenjima. No, za to su potrebne posebne analize.

S obzirom na aktualne definicije preciznosti i točnosti mjerenja, izrazi »unutarnja« točnost i »vanjska« točnost nisu ispravno primijenjeni ako se mjere disperzije ne odnose na istinitu vrijednost mjerne veličine, a to zahtijeva posebnu analizu.

No, djelovanje utjecajnih veličina možemo pozornije promatrati analizom međusobno ovisnih *koreliranih mjerenja.*

Ako u osnovnom statističkom skupu (μ, σ^2) promatramo skup svih mogućih mjernih vrijednosti, tada mogu promjenljive utjecajne veličine i kraće i dulje periode djelovati u čitavoj međuigri zajedničkog učešća na rezultate kao slučajne veličine. No, u mjernom nizu imamo ograničen broj mjerenja, koja ne obuhvaćaju čitav prostor djelovanja utjecajnih veličina, a koje uzrokuju pogreške mjerenja. Budući da niz elementarnih pogrešaka podliježe promjenljivim utjecajima često tako polako da pri više uzastopnih mjerenja one ostaju stalne, pretpostavka o slučajnosti pogrešaka više ne vrijedi. Promjenljive utjecajne veličine u kratkom vremenskom razdoblju djeluju sustavno, pa mjerenja međusobno nisu neovisna. Tako nastaje *fizikalna korelacija* mjernih vrijednosti. Mjerne se vrijednosti polako i postupno mijenjaju – mjerenja su *korelirana.* Tako npr. utjecaj atmosfere u kratkom vremenskom razdoblju može uzrokovati visoke korelacije u mjerenjima.

Teorija korelacije razvila se u statističkim metodama istraživanja promatranjem djelovanja dvaju ili više obilježja u određenom procesu. Veza između dvije slučajne varijable x i y obično nije funkcijska, već stohastička. kao mjera stohastičke veze u slučaju linearne korelacije koriste se koeficijenti korelacije. Iz teorije je poznato da je empirijski *koeficijent korelacije:*

$$r_{xy} = \frac{m_{xy}}{m_x \cdot m_y}, \tag{20}$$

gdje su: $m_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2}$, $m_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2}$ empirijske srednje pogreške, a

$$m_{xy} = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \text{ kovarijanca}$$

$$\text{slijedi } r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum v_x v_y}{\sqrt{\sum v_x v_x \cdot \sum v_y v_y}}. \tag{21}$$

Ukoliko imamo dva mjerna niza s varijablama x i y s konačnim brojem mjerenja n po datim formulama možemo procijeniti koeficijent korelacije uz pretpostavku da mjerenja x, a isto tako i y nisu korelirana.

Korelacija *unutar* mjernog niza naziva se *autokorelacija* pa se i koeficijenti r_{xx} i r_{yy} nazivaju koeficijentima autokorelacije, za razliku od r_{xy} koji označava koeficijent *križne korelacije* (Höpcke, 1980).

U geodetskim se mjerenjima često primjenjuju *dvostruka mjerenja.* Ako se npr. radi o parovima (prema shemi) $x_{11}, x_{12}; x_{21}, x_{22}; \ldots; x_{k1}, x_{k2}$, to su dvostruka mjerenja. Mjerenja u nizovima općenito se nazivaju *višestrukim mjerenjima,* prikazana su u datoj shemi. Dvostruka su mjerenja najjednostavniji (poseban) slučaj višestrukih mjerenja. Analogno bismo mogli promatrati mjerne nizove s varijablom y.

U mjernoj tehnici, s obzirom na problematiku koju smo opisali, važna je upravo *autokorelacija* koja se ispituje *metodom dvostrukih,* odnosno višestrukih usporedbenih mjerenja.

Za *razliku* od metode ispitivanja ponovljivosti mjerenja, kada smo uspoređivali srednje vrijednosti mjernih nizova računane po stupcima sa $\bar{x}_1 \ldots . \bar{x}_k$, pri ispitivanju *autokorelacije* promatramo srednje vrijednosti nizova po *redcima A...N,* tj. $\bar{x}_A \ldots . \bar{x}_N$, u kojima između mjernih vrijednosti i očekujemo značajne promjene zbog djelovanja utjecajnih veličina.

U geodetskoj stručnoj literaturi poznato je ispitivanje autokorelacije pomoću dvostrukih mjerenja. Tako W. Höpcke prikazuje ispitivanje korelacije pri mjerenju zenitnog kuta u razdoblju od 10h do 16h svakih pola sata na točkama udaljenima 1 km (visina vizure 1,7m) i 3 km (visina vizure 8,3m). Za svako mjerenje ranučane su visinske razlike uz $k = 0{,}13$. No, prije ispitivanja križne korelacije (x, y), ispitivana je autokorelacija (xx, yy) po analognim formulama (vidi formulu (21)):

$$r_{xx} = \frac{\sum v_{xA} v_{xB}}{\sqrt{\sum v_{xA} v_{xA} \cdot \sum v_{xB} v_{xB}}}; \quad r_{yy} = \frac{\sum v_{yA} v_{yB}}{\sqrt{\sum v_{yA} v_{yA} \cdot \sum v_{yB} v_{yB}}}, \tag{22}$$

gdje su:

$v_{xA} = x_{i1} - \bar{x}_A$ (*pogreške pojedinog mjerenja u nizu A*).

$v_{xB} = x_{i2} - \bar{x}_B$ (*pogreške pojedinog mjerenja u nizu B*).

(oznake uzete prema našoj shemi mjernih nizova (x), $i = 1,2,\ldots k$).

Napomenimo da su u originalnom prikazu (Höpcke, 1980) uzete u obzir istinite pogreške (ε), budući da je prethodno preciznim nivelmanom određena visinska razlika točaka.

Računom je dobivena vrlo visoka autokorelacija (r_{xx} i $r_{yy} > 0{,}9$), pa račun križne korelacije nema svrhu.

Pri višestrukim mjerenjima ispituju se autokorelacije po mjernim nizovima A do N uz mogućnost različitih kombinacija.

Pri promatranju i praćenju procesa djelovanja utjecajnih veličina moguće je nakon k mjernih nizova nastaviti s daljnjim mjernim nizovima, te ponovo računati za sve nizove koeficijent autokorelacije, a to znači pratiti njegove promjene.

Ispitivanje autokorelacije u usporedbenim mjerenjima još je jedna metoda za znanstvene analize mogućih promjena preciznosti i točnosti mjerenja, što je osobito važno pri mjerenjima visoke točnosti.

8. PREGLED REZULTATA ISTRAŽIVANJA

ZAKLJUČAK

Zbog sve značajnije primjene usporedbenih mjerenja u mjernoj tehnici, željeli smo prikazati u dva rada, na osnovi vlastitog iskustva i suradnje, dosadašnja dostignuća i mogućnosti pri usporedbenim mjerenjima. U prvom radu prikazana su opširno usporedbena mjerenja najprimjenjenija određivanjem mjerne ponovljivosti i obnovljivosti u međulaboratorijskim ispitivanjima. No ona se mogu primjenjivati i u geodetskim istraživanjima. U ovom dijelu težište je bilo u prikazu jednostavnijih metoda na osnovi kriterija ponovljivosti mjerenja, kao novog pojma, i mjerne kompatibilnosti.

Mjerna ponovljivost i mjerna obnovljivost sa svojim mjernim vrijednostima mjere su preciznosti. Njihovo je određivanje *prva i osnovna faza* ispitivanja i *snimka određenog stanja* preciznosti. Uz uvjete ponovljivosti dat je *minimum* disperzije mjernih vrijednosti kao slučajne varijable, a *maksimum* uz *određeno stanje* uvjeta obnovljivosti.

U drugoj fazi već određene mjerne vrijednosti ponovljivosti i obnovljivosti su kriteriji za ispitivanje ispravnosti industrijskih proizvoda na osnovi uzetih uzoraka, a u mjernoj tehnici za stalnu kontrolu preciznosti mjernih metoda i uređaja, te stalnosti mjernog objekta i mjernih instrumenata. Osobito je važno ispitivanje *promjena* uvjeta ponovljivosti, odnosno obnovljivosti, a to znači *utjecaj vremenskog faktora.* U te svrhe računa se *kritična razlika* ponovljivosti i obnovljivosti. U razmatranje se mogu uzeti razlike dviju ili više mjernih vrijednosti. No pri ispitivanjima u mjernoj tehnici važno je promatranje razlike rezultata *mjernih nizova,* posebno pri analizi utjecaja *vremenskog faktora.*

Uspoređujući kritičnu razliku za mjerne nizove s prirastom nepouzdanosti srednjih vrijednosti došlo se do poopćenja i uvođenja novog pojma *ponovljivosti mjerenja* za vremenski odvojene nizove. Ukoliko razlika rezultata i utjecaj izvjesnih promjena uvjeta ponovljivosti nije signifikantna, mjerenja su *ponovljiva.* To znači da su utjecaji sustavnih promjenljivih veličina zanemarivi, a razlike možemo smatrati slučajnim. Analogno promatramo obnovljivost mjerenja.

Analiza je pokazala da *kriterij ponovljivosti mjerenja* odgovara *kriteriju potpune kompatibilnosti* rezultata pri usporedbenim ispitivanjima između dva ispitivališna mjesta.

Kod približno *jednakog broja* mjerenja u mjernim nizovima pokazana je u usporedbi s uobičajenim statističkim testovima jednostavnost primjene kriterija ponovljivosti mjerenja. Kako ovisnost pogrešaka mjerenja o *vremenskom faktoru* upravo definira *fizikalnu koleraciju,* pokazane su mogućnosti ispitivanja *autokorelacije,* što je u uskoj vezi s *ponovljivosti mjerenja,* a može biti predmet daljnjih istraživanja.

Mjerna ponovljivost i obnovljivost ne mogu se uspoređivati s pojmovima »unutarnje« odnosno »vanjske« točnosti, budući da su ponovljivost i obnovljivost mjere slaganja razlika mjernih rezultata. Do zamjene pojmova ipak dolazi, kao na primjer u normi ISO 7078 – 1985 E/F Annex – Equvalent terms.

Ponovljivost i obnovljivost mjerenja s različitim nijansama značenja novo je i zanimljivo područje za opširnija istraživanja u primjeni i u geodetskoj mjernoj tehnici.

BILJEŠKA

Oznake srednjih vrijednosti $\bar{y}$ u formulama za kritičnu razliku uzete su na osnovi izvornih formula u Međunarodnoj normi ISO 5725–1986 (E).

Prema normi DIN 18709,4–1984, a također DIN 13303,1–1982 slučajna varijabla osnovnog skupa označuje se s X također Y i Z, pa analogno i opažana vrijednost x, također y i z, odnosno srednje vrijednosti $\bar{x}$, također $\bar{y}$ i $\bar{z}$. U statističkim analizama jednog obilježja najčešće je primijenjena oznaka X, a to znači opažane vrijednosti x i srednje vrijednosti $\bar{x}$.

Ispravak

U prethodnom radu: Pojam i značenje mjerne ponovljivosti i obnovljivosti G. L. 1995, 2, 107–120 pogrešno je otisnuta formula 26:

umjesto: $$C_rD\,(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|) = \sqrt{R^2 - r^2\left(1 - \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}\right)},$$

treba: $$C_rD\,(|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|) = \sqrt{R^2 - r^2\left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)}.$$

i formula 12.:

umjesto: $\sigma_R = \sqrt{s_L^2 + s_r^2}$,

treba: $s_R = \sqrt{s_L^2 + s_r^2}$.

LITERATURA

Benčić, D., Dusman, F. (1994): Od mjerenja do mjeriteljske informacije, Geodetski list, 2, 129–146.

Benčić, D., Dusman, F. (1995): Pojam i značenje mjerne ponovljivosti i obnovljivosti, Geodetski list, 2, 107–120.

Dusman, F., Mudronja, V. (1992): Ponovljivost i obnovljivost u mjerenju duljine i kuta, Strojarstvo 34, 13–19.

Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, udžbenik, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichrechnung, Berlin-New York.

Mandel, J., Lashof, T. W. (1987): The nature of Repeatability and Reproducibility, Journal of Quality Technology, Vol. 19, No. 1, 29–36.

Pavlić, J. (1965): Statistička teorija i primjena, Panorama, Zagreb.

Vranić, V. (1965): Vjerojatnost i statistika, Tehnička knjiga, Zagreb.

Wolf, H. (1966): Die Beurteilung der »ausseren« und »inneren« Messgenauigkeit als ein statistisches Problem.

ASTM (1978) American Society for Testing and materials, Philadelphia: Standard Recommended Practice E 180–78 for Developing Precision Data on ASTM.

ASTM (1981): Standard Practice F 465–76(81) for Developing Precision and Accuracy Data on ASTM.

DIN norme 1319,3, 1983.
ISO, International Standard (1979): Petroleum Products Determination and Aplication of Precision Data in Relation to Methods of Test, ISO 4259.
ISO 1981, 1986: Precision of Test Methods-Determimation of Repeatability and Reproducibility by Interlaboratory Test, ISO 5725–1981, Geneva, ISO 5725–1986(E).

COMPATIBILITY AND COMPARABILITY OF MEASUREMENTS AND TEST RESULTS

On the basis of the definition of repeatability, its significance in application by comparison of mutually independent measurement results is described. This implies with repeated experiments new term the repeatable measurements in the case of closeness of agreement between test results obtained at the time displaced measurements. The concepts of compatibility and comparability of measurements, as well as their significance in application are being analyzed.

Primljeno: 1995–03–14