

## ANALIZA OVISNOSTI »VIDLJIVOSTI« GPS SATELITA O GEOGRAFSKOJ ŠIRINI MJESTA MJERENJA

Miljenko SOLARIĆ, Asim BILAJBEGOVIĆ, Branka CAPEK i  
Boris PODUNAVAC – Zagreb\*

*SAŽETAK.* U ovom radu analizirana je ovisnost »vidljivosti« GPS satelita o geografskoj širini mjesta mjerenja. Izvedene su formule za izračunavanje graničnih kutova »vidljivosti« satelita i uspoređeni rezultati s onima dobivenima po programu *The Multi-Site Mission Planning*. Poseban naglasak dan je za naše geografske širine kako bi se omogućio što lakši odabir točke za GPS opažanja.

### 1. UVOD

Umjetni Zemljini sateliti iz Globalnoga pozicijskog sustava (skraćeno GPS) nalaze se na visini 20 200 km od površine Zemlje, a njihove orbite leže u 6 ravnina koje zatvaraju s ravninom ekvatora kut nagiba  $i = 55^\circ$ . Pri tome su one ravnomjerno raspoređene tako da točke uzlaznih čvorova leže u ravnini ekvatora međusobno udaljene po  $60^\circ$ . U svakoj se ravnini nalaze po 4 aktivna GPS satelita ili 3 aktivna i 1 rezervni satelit, tj. u svemirskom prostoru oko Zemlje kruži 21 aktivni GPS satelit i 3 rezervna (sl. 1) (Bauer 1989, Bilajbegović 1991, Wells 1987, Seeber 1989).

Pri tome ravnine orbita GPS satelita čiji se argumenti duljina razlikuju za  $180^\circ$ , tj. kojima točke uzlaznih čvorova leže na istom pravcu, čine par ravnina. Tako će biti tri para ravnina:

- I. par nastaje od ravnine orbita A i D
- II. par nastaje od ravnine orbita B i E
- III. par nastaje od ravnine orbita C i F

Na sl. 2. prikazan je samo I. par ravnina orbita GPS satelita koji nastaje presjekom ravnina A i D, a ostala su 2 para zbog složenosti slike ispušteni. Iz te slike vidi se da u zenitu na polu i  $25^\circ$  u blizini pola neće nikada nadlijetati GPS sateliti preko zenita.

Taj je sustav planiran tako da se čitav dan (od 0 do 24 sata) mogu pomoću GPS uređaja odrediti položaji točaka na Zemlji, tj. da se u svakome trenutku na nebeskom svodu iznad horizonta bilo koje točke na Zemlji nalaze 4 satelita GPS.

---

\* Prof. dr. M. Solarić, prof. dr. A. Bilajbegović, B. Capek, dipl. inž., B. Podunavac, dipl. inž., Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

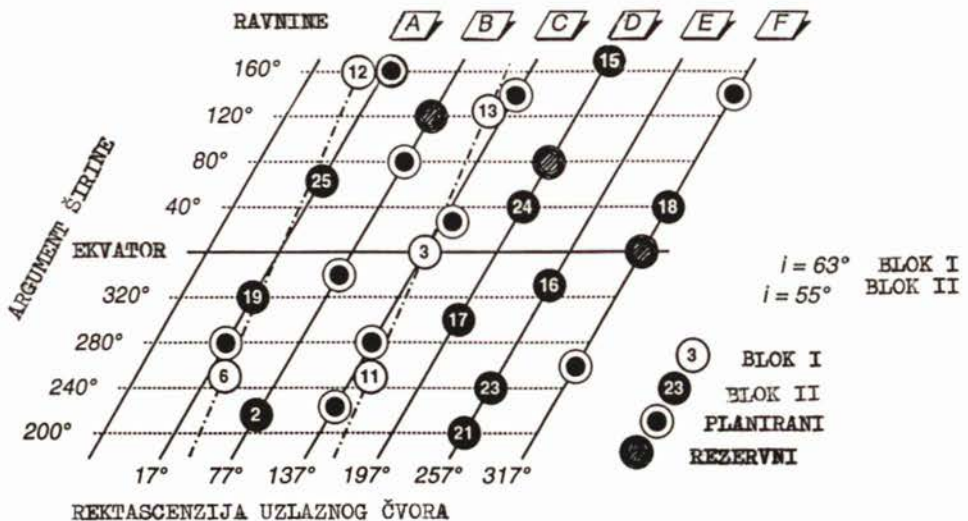
Pri korištenju GPS satelita često se postavlja pitanje mogućnosti primanja signala sa što većeg broja GPS satelita. Naime, primanjem signala s većeg broja GPS satelita povećava se točnost mjerenja.

Budući da se sada u geodeziji primijenjuje uglavnom diferencijalni način rada, zbog njegove točnosti, to je posebno važno da na obje stanice GPS uređaji primaju signale s istih satelita. Oni sateliti čiji se signali ne primaju istodobno na obje stanice ne uzimaju se u račun.

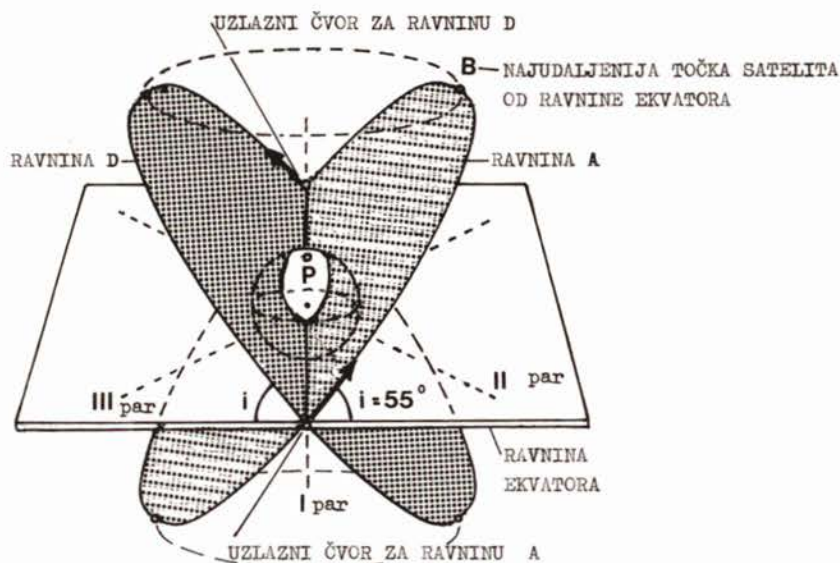
Ako nebeski svod iznad horizonta antene GPS uređaja nije čist, tj. ako su u blizini zgrade, drveća itd., tada GPS uređaj neće moći primati poslone signale sa satelita koji se nalaze na manjim elevacijskim kutovima od krovova kuća, vrhova drveća i sličnih objekata.

Može se reći da pravac satelita-antena GPS uređaja mora biti čist (Hoffman-Wellenhof et al 1992), tj. da između njih ne smije biti zapreke od čvrsta tijela na putu širenja elektromagnetskih valova odašlanih sa GPS satelita. (Elektromagnetski valovi, valne duljine koje emitiraju odašiljači sa GPS satelita, prolaze kroz oblake, te im oblaci nisu zapreka u njihovu širenju od satelita do antene GPS uređaja.)

GPS sateliti kruže oko težišta Zemlje po približno kružnim orbitama radijusa  $r_s = 26\,550$  km, tako da jedanput obidu oko Zemlje za  $11^h\ 58^{min}$ . Pri tome još i Zemlja rotira oko svoje osi pa se neprestano mijenjaju položaji GPS satelita u prostoru oko Zemlje. To mijenjanje položaja GPS satelita na nebeskome svodu iznad raznih točaka na Zemlji bit će različito, te će se zato analizirati ovisnost »vidljivosti« GPS satelita o geografskoj širini mjesta prijama signala sa satelita. Pritom »vidljivost« treba uvjetno shvatiti. Naime, GPS sateliti su relativno malih dimenzija, a na udaljenosti od 20 200 km od površine Zemlje sigurno se ne mogu vidjeti okom. Zato se ovdje pod »vidljivošću« podrazumijeva da se GPS satelit nalazi na nebeskom svodu iznad horizonta antene GPS uređaja.



Slika 1. Raspored GPS satelita



Slika 2. Prikaz presjeka ravnina orbita GPS satelita A i D koje tvore I. par. (P – pol., II – linija čvorova para ravnina B i E, III – linija čvorova para ravnina C i F. Ravnine II. para i III. para nisu nacrtane jer bi slika postala nepregledna).

## 2. »VIDLJIVOST« GPS SATELITA NA ZEMLJI NA MJESTIMA RAZLIČITE GEOGRAFSKE ŠIRINE

Svih 6 ravnina u kojima leže orbite GPS satelita zatvaraju s ravninom ekvatora kut od  $i = 55^\circ$ . Zato će od ravnine ekvatora biti najudaljenije točke orbite GPS satelita u položajima B (sl. 3). Na njoj oznake imaju sljedeće značenje: C – težište zemlje, R – radijus Zemlje,  $R_s = r_{CB}$  – udaljenost GPS satelita od težišta Zemlje, B – točka u kojoj je GPS satelit najudaljeniji od ravnine ekvatora, P – pol,  $i = 55^\circ$  – nagib orbita GPS satelita, N – točka u zenitu iznad pola P i  $A_E$  – točka na ekvatoru.

Budući da su orbite GPS satelita približno kružne, radijusa  $r_s = 26\,550$  km, to će se oni kretati po dijelu sferne plohe radijusa  $r_s$  (vidi sl. 2 i 3). Pri tome na dijelu te sfere iznad polova neće nikada proći niti jedan GPS satelit, a to znači da u zenitu iznad pola pa i u točkama s većom geografskom širinom od  $55^\circ$  neće nikada zenitom proći GPS sateliti.

Iz sl. 3 vidi se da će u nekoj točki  $A_E$  na ekvatoru GPS sateliti prelijetati preko zenita, ali ih neće biti na dijelu nebeskoga svoda iznad horizonta u pravcu prema sjevernom i južnom polu.

### 2.1. Izvod formula u općem obliku do koje najveće elevacije prema sjeveru neće biti GPS satelita i koliko ih neće biti na istok i zapad

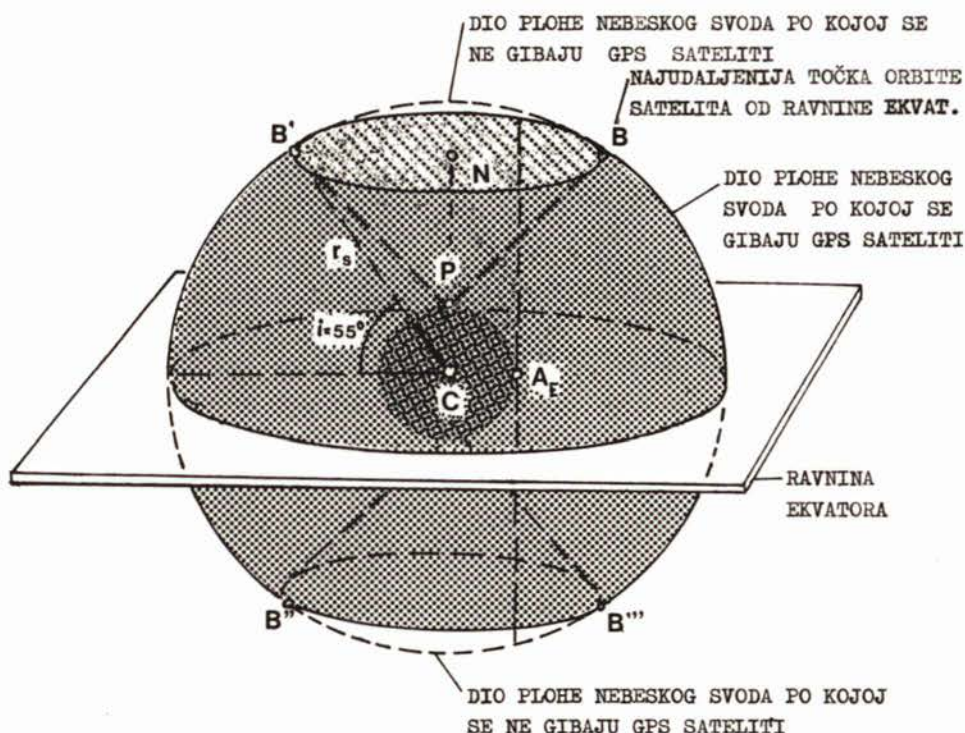
Izvod će se učiniti za točku A na proizvoljnoj geografskoj širini  $\varphi$  na sjevernoj Zemljinoj polukugli.

Na slikama su duljine označene slovom  $r$ , a između kojih točaka je ta duljina označava indeks. Iz sl. 4 trokuta CAB i AGB mogu se izvesti sljedeće funkcijske ovisnosti:

$$r_{GB} = r_s \cdot \cos(i - \varphi) - R \quad (1)$$

$$r_{GA} = r_s \cdot \sin(i - \varphi) \quad (2)$$

$$\alpha = \arctg \left( \frac{r_{GB}}{r_{GA}} \right) = \arctg \left( \frac{r_s \cdot \cos(i - \varphi) - R}{r_s \cdot \sin(i - \varphi)} \right) \quad (3)$$



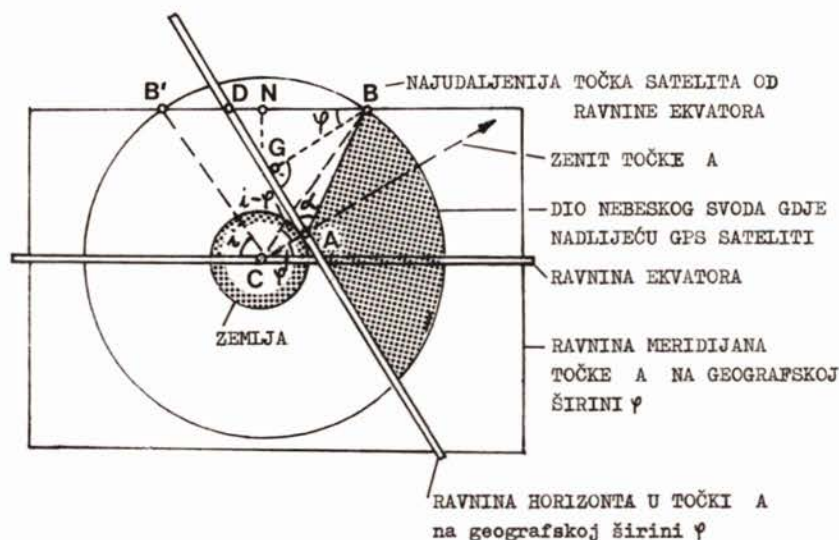
Slika 3. Prostorni prikaz dijela plohe kugle po kojoj se kreću GPS sateliti u njihovu gibanju oko Zemlje

Da bi se odredili kutovi  $\beta$  koliko prema istoku, odnosno zapadu od pravca sjevera neće biti GPS satelita pri horizontu opažaca na geografskoj širini  $\varphi$ , treba proučiti funkcijske ovisnosti sa sl. 4. Iz trokuta CBN dobije se da je

$$r_{NB} = r_s \cdot \cos i, \quad (4)$$

a iz trokuta BDG

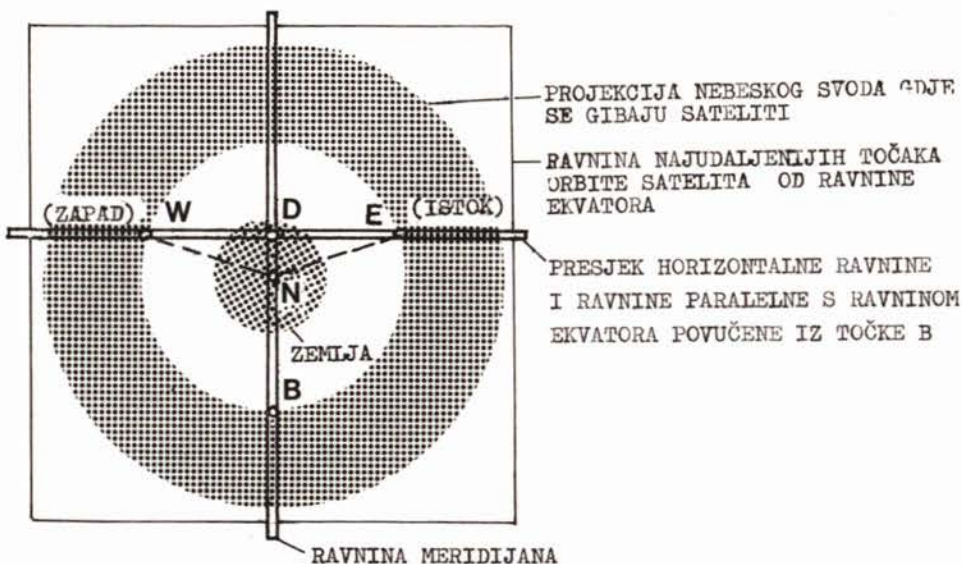
$$r_{DB} = r_{GB} / \cos \varphi = [r_s \cdot \cos(i - \varphi) - R] / \cos \varphi \quad (5)$$



Slika 4. Ravnina meridijana kroz točku A na geografskoj širini  $\varphi$  na sjevernoj Zemljinoj polukugli

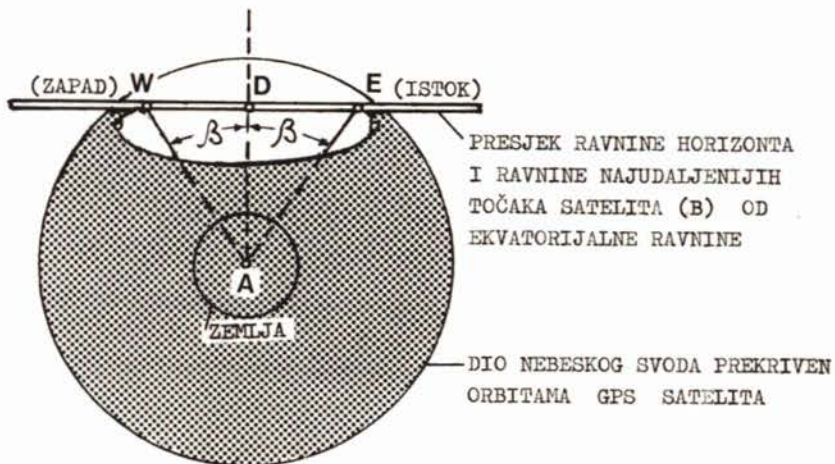
Iz slike 4 vidi se također da je

$$r_{DN} = r_{DB} - r_{NB} = r_{GB} / \cos \varphi - r_s \cdot \cos i \quad (6)$$



Slika 5. Ravnina usporedna s ravninom ekvatora povučena iz točke B i njezin presjek s ravninom meridijana i ravninom horizonta iz točke A na geografskoj širini  $\varphi$

$$\begin{aligned} r_{DA} &= r_{AG} + r_{GD} = r_s \cdot \sin(i - \varphi) + r_{GB} \cdot \operatorname{tg}\varphi \\ &= r_s \cdot \sin(i - \varphi) + [r_s \cdot \cos(i - \varphi) - R] \cdot \operatorname{tg}\varphi \end{aligned} \quad (7)$$



Slika 6. Projekcija nebeskoga svoda u točki A na horizont i njezin presjek s ravninom koja prolazi najudaljenijim točkama B orbite GPS satelita od ravnine ekvatora

Iz sl. 5 slijede ove ovisnosti:

$$r_{NE} = r_{NB} = r_s \cdot \cos i \quad (8)$$

$$r_{DE} = \sqrt{r_{NE}^2 - r_{DN}^2} \quad (9)$$

Traženi kut  $\beta$  odredit će se prema sl. 6 iz formule:

$$\beta = \arctg \left( \frac{r_{DE}}{r_{DA}} \right). \quad (10)$$

## 2.2. Usporedba »vidljivosti« GPS satelita iz točaka različite geografske širine

Na osnovi formule (3) izračunat je kut  $\alpha$ , tj. do kojega maksimalnog elevacijskog kuta u pravcu sjevera na sjevernoj Zemljinoj polutki na nebeskom svodu neće biti GPS satelita na raznim geografskim širinama. Također je izračunat i kut  $\beta$  po formuli (10), tj. koliko na istok i zapad od pravca sjevera u horizontu opažaća neće biti GPS satelita. Rezultati za razne geografske širine uvršteni su u tablicu 1. Za geografsku širinu  $\varphi$  veću od  $48^{\circ}52'$  ne može se izračunati kut  $\beta$  jer se sateliti nalaze i na samoj sjevernoj strani horizonta. Također, kut  $\alpha$  za geografske širine  $\varphi$  veće od  $48^{\circ}52'$  više nije kut maksimalne elevacije do koje neće biti satelita, jer se oni sada nalaze i na samome sjeveru.

Pomoću programa The Multi-Site Mission Plannig (skraćeno MP) firme Ashtech (a i ostali proizvođači GPS uređaja imaju svoje programe) može se vrlo lagano dobiti iscrtana slika kako se vide orbite GPS satelita na nebeskom svodu na bilo kojemu mjestu na Zemlji i u bilo kojem trenutku.

Tablica 1: Izračunati kutovovi  $\alpha$  i  $\beta$  po formulama (3) i (10) za razne geografske širine mjesta GPS mjerenja.  
(Sa \* je označena geografska širina najjužnije i najsjevnije točke Hrvatske.)

Geografska širina mjesta ( $\varphi$ )	$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$
0°	22.2	32.5
20°	45.3	36.1
30°	57.6	33.7
*42°23'	73.5	23.5
45°	76.9	18.9
*46°33'	78.9	15.0
48°52'	81.9	0
60°	96.6	–
70°	109.60	–
90°	134.70	–

Da bi se dobio pregled gdje se na nabeskom svodu, iznad horizonta mjesta mjerenja GPS uređajima, nikad neće nalaziti bilo koji GPS satelit, uzet je interval od 0 do 24 sata.

Budući da »vidljivost« GPS satelita na raznim mjestima na Zemlji ovisi o geografskoj širini ( $\varphi$ ) mjesta mjerenja pomoću MP programa, iscrtane su orbite GPS satelita kako se one vide na mjestima različite geografske širine, tj. koji je dio nebeskog svoda prekriven GPS satelitima na različitim geografskim širinama (vidi sl. 7).

Usporede li se dobiveni rezultati iz tablice 1 i sa rezultatima iz sl. 7 vidi se da su oni u potpunosti jednaki. (Istina je da se na tim slikama 5 vidi orbita jednog GPS satelita koja odskače od ostalih. To je zbog toga što su GPS sateliti prve generacije (blok I) izbačeni pod kutem nagiba  $i = 63^\circ$ )

Iz sl. 8 vidi se da se na području Hrvatske dio nebeskog svoda neprekriven orbitama GPS satelita nalazi u pravcu sjevera sve do elevacijskog kuta  $\alpha = 75^\circ$ . Također se iz sl. 8 vidi da orbite GPS satelita na području Hrvatske uz elevacijsku masku od  $15^\circ$  ne prelaze horizont  $\beta = 35^\circ$  istočno i  $\beta = 35^\circ$  zapadno od pravca sjevera.

Tu činjenicu da su kutovi  $\alpha = 75^\circ$  i  $\beta = 35^\circ$  treba imati na umu pri izboru lokacija GPS točaka. Naime, ako se ne može odabrati dobar položaj GPS točke s čistim horizontom treba ju po mogućnosti postaviti tako da je horizont zaklonjen zgradama ili drvećem u pravcu sjevera, tj. gdje na nabeskom svodu nema GPS satelita.

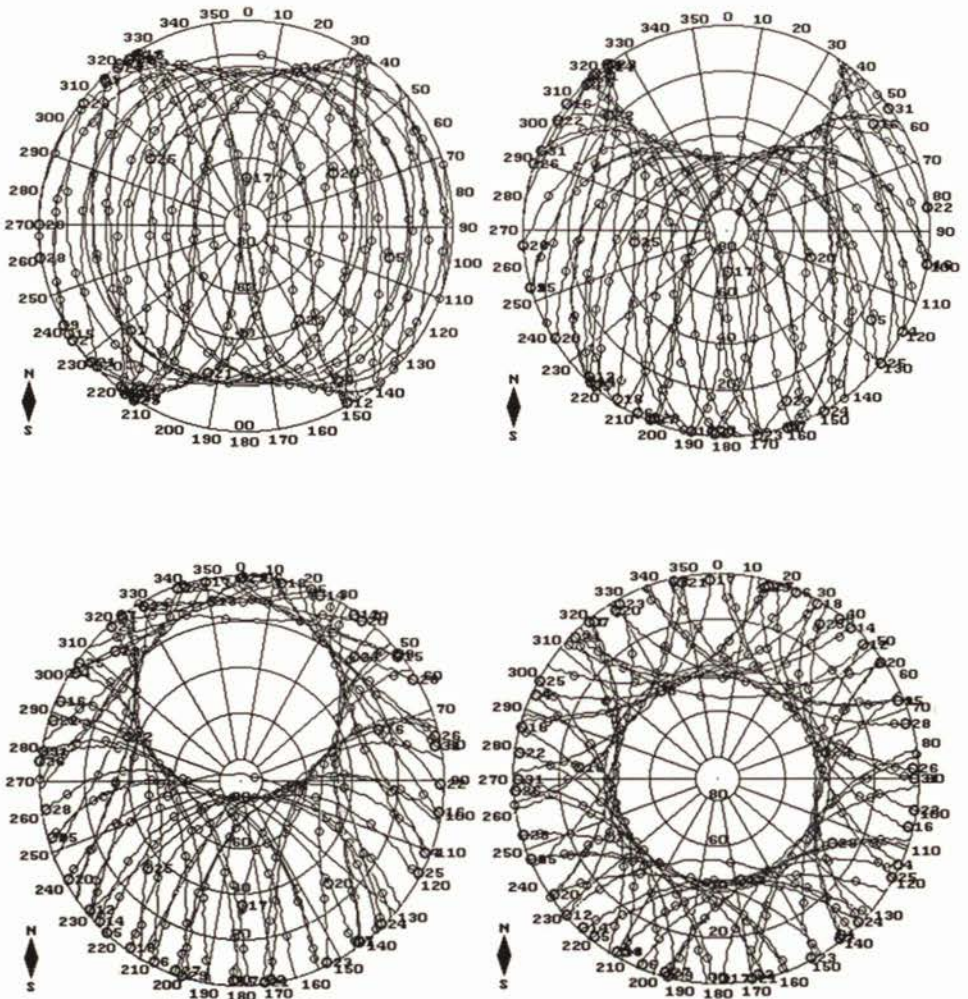
Potpuno je razumljivo da u tom slučaju zaprečnost horizonta neće utjecati na rezultat mjerenja ako nema refleksa elektromagnetskih valova odaslanih s GPS satelita od tih objekata.

Ta činjenica u dosadašnjoj literaturi nije posebno naglašena iako ima sigurno veliku praktičnu važnost, te ju treba iskoristiti u terenskim radovima.

#### 4. ZAKLJUČAK

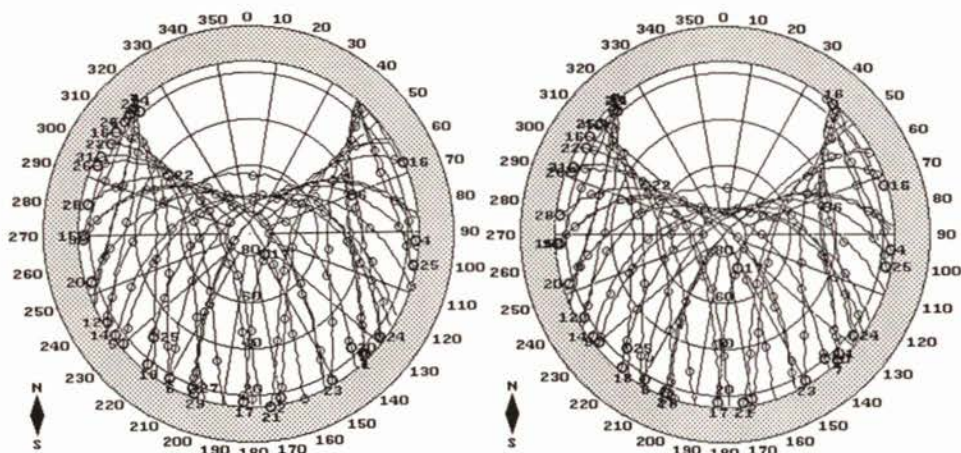
Uz navedenih se analiza može donijeti sljedeći zaključak: na geografskim širinama u Hrvatskoj GPS sateliti ne prelaze nebeski svod u pravcu sjevera sve do elevacije od  $75^\circ$ , kao i  $35^\circ$  istočno i  $35^\circ$  zapadno od pravca sjevera.

To znači da ukoliko je na tom dijelu GPS točke horizont zaklonjen zgradama i drvećem, to neće smetati radu GPS uređaja ako nema refleksa elektromagnetskih valova.



Slika 7. Orbite GPS satelita – za geografske širine stajališta  $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .





Slika 8. Orbite GPS satelita – prekriveni dio nebeskog svoda GPS satelitima na najjužnijoj točki ( $\varphi = 42^{\circ}23'$ ) i najsjevernijoj točki ( $\varphi = 46^{\circ}33'$ ) Hrvatske uz elevacijsku masku od  $15^{\circ}$

Tu činjenicu treba imati na umu kod rekognosciranja terena, tj. izbora lokacije točke pa ju treba odabrati, ako je to potrebno, tako da je horizont zaklonjen u pravcu sjevera.

## LITERATURA

- Bauer, M. (1989): Vermessung und Ortung mit Satelliten. Wichmann, Karlsruhe.  
 Bilajbegović, A., Hofman-Wellenhof, B. i Lihtenegger, H. (1991): Geodetski radovi – suvremene metode GPS. Tehnička knjiga, Zagreb.  
 Hofmann-Wellenhof, B., Lihtenegger, H. (1988): Mitteilungen der geodätischen Institute der technischen Universität Graz, Folge 62.  
 Hofmann-Wellenhof, B., Lihtenegger, H. i Collins, J. (1992): GPS Theory and practice. Springer-Verlag-Wien, New York.  
 Seeber, G. (1989): Satellitengeodäsie. Walter de Gruyter, Berlin – New York.  
 Wells, D. (1987): Guide to GPS Positioning. Canadian GPS associates, Fredericton.

## ANALYSIS OF THE DEPENDENCE OF THE GPS SATELLITES »VISIBILITY« ON THE MEASUREMENT SITE LATITUDE

The dependence of the »visibility« of GPS satellites on the latitude of the measurement site is analysed in this paper. The formulas for calculating the limiting angles of the satellite visibility have been derived and the results compared with those obtained according to the programme The Mult-Site Mission Planning. A special accent has been given to Croatian latitudes in order to enable an easier selection of the points for GPS observations.

Primljeno: 1995–01–31