UDK 528.91:528.235
Pregledni članak

EKVIDISTANTNO PRESLIKAVANJE PO MERIDIJANIMA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU I OBRATNO PRIMJENOM TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

Miljenko LAPAINE, Blanka ŽARINAC-FRANČULA, Damjan JOVIČIĆ, Nedjeljko FRANČULA – Zagreb*

SAŽETAK. Istražuje se primjena trigonometrijskih redova za određivanje geografske širine pri ekvidistantnom preslikavanju po meridijanima sfere na rotacijski elipsoid i rotacijskog elipsoida na sferu. Umjesto primjene redova sinusa višestrukih kutova, predlažu se odgovarajući redovi potencija kosinusa dvostrukoga kuta.

1. UVOD

Postoji beskonačno mnogo načina preslikavanja elipsoida na sferu. Ipak, praktičnu vrijednost i manje ili više detaljno razmatrana i korištena do naših dana gotovo isključivo su takva preslikavanja kod kojih se paralele elipsoida preslikavaju u paralele sfere. Nadalje, od navedenih preslikavanja primjenjuju se uglavnom samo simetrična, s obzirom na izabrani meridijan. Pri takvim se preslikavanjima i meridijani elipsoida preslikavaju na meridijane sfere, pri čemu sferne duljine nisu bilo kakve funkcije elipsoidnih koordinata, već su proporcionalne ili jednake elipsoidnim duljinama, tako da je (Kavrajskij 1958.):

$$\begin{aligned} \varphi &= f\,(\Phi) \\ \lambda &= \alpha\Lambda, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gdje su φ, λ geografske koordinate na sferi, Φ, Λ geografske koordinate na elipsoidu, a α konstantna veličina.

Preslikavanja elipsoida ili sfere u ravninu – kartografske projekcije – izučavaju se prvenstveno u cilju njihove primjene za sastavljanje karata. Suprotno tome, teorija preslikavanja elipsoida na sferu ne koristi se pri konstruiranju globusa.

U većini slučajeva elipsoid se na sferu ne preslikava materijalno, nego samo u mislima, i takvo se preslikavanje koristi kao međukorak i matematičko sredstvo za preslikavanje elipsoida u ravninu ili za numeričko rješavanje geodetskih zadataka koji se odnose na elipsoid.

* Mr. Miljenko Lapaine, mr. Blanka Žarinac-Frančula, mr. Damjan Jovičić, prof. dr. Nedjeljko Frančula, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb.

Zemljin elipsoid moguće je preslikati u ravninu na dva načina: 1) izravno, tj. izraziti koordinate proizvoljne točke u ravnini neposredno pomoću geografskih koordinata, ili 2) najprije preslikati elipsoid na sferu, a zatim tu sferu preslikati u ravninu. Značenje tog drugog puta važno je za kartografiju, jer je samo na taj način moguće izračunavati kose kartografske projekcije koristeći se za prijelaz na uspravne formulama sferne trigonometrije i u isto vrijeme uzimati u obzir Zemljinu spljoštenost (Kavrajskij, 1958.).

Na primjer, ako se elipsid preslika konformno na sferu, a zatim se ta sfera konformno preslika u ravninu pomoću jedne od konformnih projekcija u kosom položaju, dobiva se odgovarajuća konformna projekcija sferoida – kosa stereografska, kosa Mercatorova itd.

Isto vrijedi i za ekvivalentno preslikavanje, tj. ako je preslikavanje elipsoida na sferu ekvivalentno i preslikavanje sfere u ravninu ekvivalentno, tada je kompozicija tih preslikavanja ekvivalentno preslikavanje elipsoida u ravninu.

Što se tiče svojstva ekvidistanntosti, za njega analogna tvrdnja općenito nije istinita. Samo u slučaju kada su pri ekvidistantnom preslikavanju elipsoida na sferu i nastavnom na njega ekvidistantnom preslikavanju sfere u ravninu glavni smjerovi, uzduž kojih je linearno mjerilo jednako jedinici, bili jedni te isti, moguće je zaključiti da će se kao rezultat dobiti ekvidistantna projekcija elipsoida u ravninu.

U elipsoidnoj geodeziji se preslikavanje elipsoida na sferu primjenjuje pri rješavanju osnovnih geodetskih zadataka po formulama sferne trigonometrije, nakon što je elipsoid u mislima preslikan uz male deformacije na sferu. Ponekad se uvode popravci i za te deformacije, tako da se dobije točnije rješenje.

Za takvu je primjenu po prvi put Gauss 1822. godine razradio jedno općenito konformno preslikavanje. Besselov način rješavanje geodetskih zadataka na elipsoidu za proizvoljne udaljenosti također se može interpretirati na temelju izvjesnog preslikavanja elipsoida na sferu. Tome je načinu bliska i većina kasnijih prilaza rješavanju osnovnih geodetskih zadataka.

Kod ekvidistantnih preslikavanja elipsoida na sferu, govori se o ekvidistantnom preslikavanju po meridijanima i ekvidistantnom preslikavanju po paralelama. U ovome radu bavit ćemo se samo ekvidistanim preslikavanjem po meridijanima koje je nešto složenije, dok je problematika ekvidistantnog preslikavanja po paralelama relativno jednostavna i njeno se objašnjenje može naći u literaturi (Borčić, 1955.; Fiala, 1957.; Kavrajskij, 1958.; Vahrameeva i dr., 1986.).

2. EKVIDISTANTNO PRESLIKAVANJE PO MERIDIJANIMA IZMEĐU ROTACIJSKOG ELIPSOIDA I SFERE

Neka je $\omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $r:\omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama:

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda, \quad Y = R\text{co}\varphi\sin\lambda, \quad Z = R\sin\varphi. \tag{2.1}$$

To preslikavanja je geografska parametrizacija sfere $\mathcal{S}$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjerom R. Prva diferencijalna forma tog preslikavanja jest (Frančula i dr. 1992.):

$$ds^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2). \tag{2.2}$$

Neka je $\Omega = \omega$ i $R:\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R(\Phi, \Lambda) = (X, Y, Z)$ preslikavanje zadano ovako:

$$X = N\cos\Phi\cos\Lambda, \quad Y = N\cos\Phi\sin\Lambda, \quad Z = \frac{b^2}{a^2}N\sin\Phi, \tag{2.3}$$

gdje je N polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\Phi + b^2\sin^2\Phi}}. \tag{2.4}$$

To preslikavanje je geografska parametrizacija rotacijskog elipsoida $\mathscr{E}$ sa središtem u ishodištu i poluosima a i b. Prva diferencijalna forma tog preslikavanja jest (Frančula i dr., 1992.)

$$dS^2 = M^2 d\Phi^2 + N^2\cos^2\Phi d\Lambda^2, \tag{2.5}$$

gdje je M polumjer zakrivljenosti meridijana

$$M = \frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2\cos^2\Phi + b^2\sin^2\Phi)^3}}. \tag{2.6}$$

Želimo definirati po meridijanima ekvidistantno preslikavanje k sa sfere $\mathscr{S}$ na elipsoid $\mathscr{E}$. Da bi preslikavanje k bilo po meridijanima ekvidistantno, nužno je i dovoljno da lokalno mjerilo duljina uzduž meridijana bude jednako jedinici, tj.

$$m = \frac{ds}{dS} = \frac{Rd\varphi}{Md\Phi} = 1. \tag{2.7}$$

Bez obzira na odnos geografskih duljina λ i Λ na sferi i elipsoidu na temelju relacije (2.7) možemo napisati izraz:

$$Rd\varphi = Md\Phi \tag{2.8}$$

koji nakon integriranja daje:

$$R\varphi = s_m(0, \Phi) + C, \tag{2.9}$$

gdje smo sa $s_m(0,\Phi)$ označili duljinu luka meridijana na rotacijskom elipsoidu od ekvatora do točke s geografskom širinom Φ.

Postavimo li dodatni uvjet da se ekvator elipsoida preslika u ekvator sfere, tj.

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0, \tag{2.10}$$

proizlazi da integracijska konstanta C mora biti jednaka nuli. Uz taj uvjet, izraz (2.9) prelazi u formulu:

$$R\varphi = s_m(0, \Phi). \tag{2.11}$$

Pri konformnom preslikavanju rotacijskog elipsoida na sferu, nebitan je odnos između polumjera sfere i poluosi, odnosno veličine elipsoida (Frančula i dr. 1992.). Međutim, pri ekvivalentnom i ekvidistantnom preslikavanju, nije tako. Uzmemo li, na primjer, za R polumjer sfere koja ima površinu jednaku površini Besselova elipsoida, tada se može izračunati da vrijednosti $\Phi = 90°$ odgovara geografska širina φ na sferi od približno 89°57′, a to znači da će se pol elipsoida preslikati u jednu malu kružnicu na sferi (Fiala 1957.).

Postavimo li međutim dodatni zahtjev da duljine luka meridijana na sferi i na elipsoidu moraju biti međusobno jednake, tada možemo naći vezu između polumjera R sfere i poluosi elipsoida. Zaista je duljina luka meridijana na sferi:

$$s_{sfera} = R\pi, \tag{2.12}$$

dok je duljina luka meridijana na elipsoidu:

$$s_{elipsoid} = 2s_m\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.13}$$

Iz jednakosti duljina (2.12) i (2.13) proizlazi:

$$R = \frac{2}{\pi}s_m\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.14}$$

Do istog izraza mogli smo doći i uz uvjet da se pol sfere preslika u pol elipsoida, tj. u oblik:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}. \tag{2.15}$$

Tada se do formule (2.14) dolazi neposredno iz formule (2.11).

3. EKVIDISTANTNO PRESLIKAVANJE PO MERIDIJANIMA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU

Za poznatu geografsku širinu Φ na elipsoidu, geografska se širina Φ na sferi može izračunati iz izraza koji se jednostavno dobije iz formule (2.11):

$$\varphi = \frac{s_m(0, \Phi)}{R}. \tag{3.1}$$

Da bismo pojednostavili računanje, prisjetimo se da se duljina luka meridijana na elipsoidu od ekvatora do točke s geografskom širinom Φ može izračunati po formuli:

$$s_m = (0, \Phi) = a(1 - e^2)\left(A\Phi - \frac{B}{2}\sin 2\Phi + \frac{C}{4}\sin 4\Phi - \frac{D}{6}\sin 6\Phi + \frac{E}{8}\sin 8\Phi - \ldots\right), \tag{3.2}$$

gdje konstante A, B, C, D i E napisane do članova s e^8 imaju sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \ldots \\
B &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \ldots \\
C &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \ldots \\
D &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \ldots \\
E &= \frac{315}{16384}e^8 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

U literaturi se mogu naći navedeni koeficijenti do potencija e^{10} (Jordan/Eggert/Kneissl, Baeschlin, 1948.), međutim mi ćemo se zadovoljiti točnošću koju daju prethodno navedeni koeficijenti. Ta će točnost biti jednaka točnosti odgovarajućih formula za konformno i ekvivalentno preslikavanje (Frančula i dr., 1992., Lapaine i dr. 1993.).

Iz (2.14) i (3.2) slijedi da je polumjer sfere R:

$$R = a(1\text{-}e^2)A = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \dots\right). \tag{3.4}$$

Na temelju relacija (3.1), (3.2) i (3.4) imamo:

$$\varphi = \Phi + b_2\sin 2\Phi + b_4\sin 4\Phi + b_6\sin 6\Phi + b_8\sin 8\Phi + \dots, \tag{3.5}$$

gdje su koeficijenti b_i određeni prema:

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{B}{2A} = -\left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{111}{1024}e^6 + \frac{141}{2048}e^8 + \dots\right)\\
b_4 &= \frac{C}{4A} = \frac{15}{156}e^4 + \frac{15}{256}e^6 + \frac{405}{8192}e^8 + \dots\\
b_6 &= -\frac{D}{6A} = -\left(\frac{35}{3072}e^6 + \frac{35}{2048}e^8 + \dots\right)\\
b_8 &= \frac{E}{8A} = \frac{315}{131072}e^8 + \dots
\end{aligned} \tag{3.6}$$

U literaturi nismo našli izraze za koeficijente b_i u obliku (3.6). Primjena izraza u obliku linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova (3.5) imala je nekada prednost u odnosu prema drugačijim zapisima. Pri primjeni računala za računanje izraza oblika (3.5) treba primijeniti metodu Clenshawa (Tscherning i Poder, 1982.) ili, ako se računa na jednom te istom elipsoidu, zapis treba transformirati u oblik polinoma:

$$\begin{aligned}
&b_2\sin 2\Phi + b_4\sin 4\Phi + b_6\sin 6\Phi + b_8\sin 8\Phi =\\
&= \sin 2\Phi(c_1 + c_2\cos 2\Phi + c_3\cos^2 2\Phi + c_4\cos^3 2\Phi),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje se novi koeficijenti c_i mogu izraziti pomoću b_i na sljedeći način (vidi Snyder, 1987., Lapaine, 1991.):

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = -\left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{23}{192}e^6 + \frac{53}{1024}e^8 + \dots\right)\\
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{15}{128}e^4 + \frac{15}{128}e^6 + \frac{2925}{32768}e^8 + \dots\\
c_3 &= 4b_6 = -\left(\frac{35}{768}e^6 + \frac{35}{512}e^8 + \dots\right)\\
c_4 &= 8b_8 = \frac{315}{16384}e^8 + \dots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Konačno, izraz (3.7) treba modificirati na poznati način, tako da se potenciranja zamijene množenjima te imamo konačno:

$$\varphi = \Phi + \sin2\Phi(c_1 + (c_2 + (c_3 + c_4\cos2\Phi)\cos2\Phi)\cos2\Phi) + \ldots \quad (3.9)$$

Na taj se način izbjegava višestruko pozivanje trigonometrijskih funkcija i time ubrzava izvođenje, odnosno skraćuje vrijeme računanja.

4. EKVIDISTANTNO PRESLIKAVANJE PO MERIDIJANIMA SFERE NA ROTACIJSKI ELIPSOID

Za poznatu geografsku širinu φ na sferi iz izraza (2.11) ili (3.5) nije moguće izravno izračunati odgovarajuću geografsku širinu Φ na elipsoidu. U skladu s ranijim radovima o konformnom ili ekvivalentnom preslikavanju (Frančula i dr. 1992., Lapaine i dr. 1993.), želimo dobiti red oblika:

$$\Phi = \varphi + b_2\sin2\varphi + b_4\sin4\varphi + b_6\sin6\varphi + b_8\sin8\varphi + \ldots \quad (4.1)$$

To je moguće postići invertiranjem trigonomterijskog reda (3.5). Na taj način dobiveni koeficijenti b_i jesu:

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{213}{2048}e^6 + \frac{255}{4096}e^8 + \ldots \\ b_4 &= \frac{21}{256}e^4 + \frac{21}{256}e^6 + \frac{533}{8192}e^8 + \ldots \\ b_6 &= \frac{151}{6144}e^6 + \frac{151}{4096}e^8 + \ldots \\ b_8 &= \frac{1097}{131072}e^8 + \ldots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nadalje, želimo li pri radu s računalom dati prednost zapisu u obliku polinoma:

$$\begin{aligned} &b_2\sin2\varphi + b_4\sin4\varphi + b_6\sin6\varphi + b_8\sin8\varphi = \\ &= \sin2\varphi(c_1 + c_2\cos2\varphi + c_3\cos^2 2\varphi + c_4\cos^3 2\varphi), \end{aligned} \quad (4.3)$$

novi koeficijenti c_i mogu se izraziti pomoću b_i analogno kao što je to urađeno u radovima (Frančula i dr. 1992., Lapaine i dr. 1993.):

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_6 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{61}{768}e^6 + \frac{13}{512}e^8 + \ldots \\ c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{21}{128}e^4 + \frac{21}{128}e^6 + \frac{3167}{32768}e^8 + \ldots \\ c_3 &= 4b_6 = \frac{151}{1536}e^6 + \frac{151}{1024}e^8 + \ldots \\ c_4 &= 8b_8 = \frac{1097}{16384}e^8 + \ldots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Za praktičnu primjenu pomoću računala, izraz (4.3) treba modificirati tako da se potenciranja zamijene množenjima, tj. konačna je formula oblika:

$$\Phi = \varphi + \sin2\varphi(c_1 + (c_2 + (c_3 + c_4\cos2\varphi)\cos2\varphi)\cos2\varphi) + \ldots \quad (4.5)$$

5. PRIKAZ KOEFICIJENATA U REDOVIMA POMOĆU TREĆE SPLJOŠTENOSTI

U geodetskoj se literaturi vrlo često susreću redovi tirgonometrijskih funkcija. Koeficijenti u tim redovima su beskonačni redovi potencija. Ti koeficijenti se gotovo redovito zapisuju u obliku beskonačnih redova potencija ekscentriciteta e ili e'. Međutim, prije više od stotinu godina Helmert (1880.) je uočio kako se isti koeficijenti mogu prikazati i u obliku beskonačnih redova potencija raznih drugih parametara, ovisno o kojima spomenuti redovi konvergiraju brže ili sporije.

Posebno pogodna pokazala se primjena parametra n koji se naziva treća spljoštenost, a definira se kao

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \tag{5.1}$$

gdje su a i b poluosi rotacijskog elipsoida. Polumjer R sfere, koji se pojavljuje u izrazu (3.4) pri ekvidistantnom preslikavanju po meridijanima rotacijskog elipsoida na sferu, može se s pomoću treće spljoštenosti n napisati u obliku:

$$R = a\left(1 - n + \frac{5}{4}n^2 - \frac{5}{4}n^3 + \frac{81}{64}n^4 + \ldots\right). \tag{5.2}$$

Koeficijenti b_i koji se pojavljuju u izrazu (3.5) pri ekvidistantnom preslikavanju rotacijskog elipsoida po meridijanima na sferu prikazani pomoću treće spljoštenosti n glase (također Adams 1921., Snyder 1987.):

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{3}{2}n + \frac{9}{16}n^3 + \ldots \\
b_4 &= \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{32}n^4 + \ldots \\
b_6 &= -\frac{35}{48}n^3 + \ldots \\
b_8 &= \frac{315}{512}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Koeficijenti c_i u zapisu (3.8) mogu se pomoću treće spljoštenosti izraziti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 + \ldots \\
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4 + \ldots \\
c_3 &= 4b_6 = -\frac{35}{12}n^3 + \ldots \\
c_4 &= 8b_8 = \frac{315}{64}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Koeficijenti b_i, koji se pojavljuju u izrazu (4.1) pri ekvidistantnom preslikavanju po meridijanima sfere na rotacijski elipsoid, prikazani pomoću treće spljoštenosti n poprimaju oblik (također Adams, 1921., Snyder, 1987.):

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \ldots \\ b_4 &= \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \ldots \\ b_6 &= \frac{151}{96}n^3 + \ldots \\ b_8 &= \frac{1097}{512}n^4 + \ldots \end{aligned} \tag{5.5}$$

Konačno, želimo li umjesto formule (4.1) primijeniti djelotvorniju formulu (4.5), trebat će nam njeni koeficijenti izraženi pomoću treće spljoštenosti n:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_6 = \frac{3}{2}n - \frac{29}{12}n^3 + \ldots \\ c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{21}{8}n^2 - \frac{1537}{128}n^4 + \ldots \\ c_3 &= 4b_6 = \frac{151}{24}n^3 + \ldots \\ c_4 &= 8b_8 = \frac{1097}{64}n^4 + \ldots \end{aligned} \tag{5.6}$$

LITERATURA

Adams, O.S. (1921.): Latitude developments connected with geodesy and cartography with tables, including a table for Lambert Equal-Area Meridional projection. U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. no. 76.

Baeschlin, C.F. (1948.): Lehrbuch der Geodäsie, Orell Füssli Verlag, Zürich.

Borčić, B. (1955.): Matematička kartografija. Tehnička knjiga, Zagreb.

Fiala, F. (1957.): Mathematische Kartographie. VEB Verlag Technik, Berlin.

Frančula, N., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B., Lapaine, M. (1992.): Konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list 2, 181–189. Ispravak: Geodetski list 1992, 4, 537.

Helmert, F.R. (1880.): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen. B.G. Teubner, Leipzig.

Jordan/Eggert/Kneissl (1958.): Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, Erste Hälfte. J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.

Kavrajskij, V.V. (1958.): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vypusk 1, Obščaja teorija kartografičeskih proekcij. Izdanie Upravlenija načal'nika Gidrografičeskoj služby VMF.

Lapaine, M. (1991.) Transformiranje linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova. Geodetski list, 10–12, 387–396.

Lapaine, M., Žarinac-Frančula, B., Frančula, N., Jovičić, D. (1993.): Ekvivalentno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list, 4, 315–324.

Snyder, J.P. (1987.): Map Projections – A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395. U.S. Government Printing Office, Washington.

Tscherning, C.C. and Poder, K. (1982.): Some Geodetic Applications of Clenshaw Summation. Bollettino di geodesia e scienze affini 4, 349–375.

Vahrameeva, L.A., Bugaevskij, L.M. i Kazakova, Z.L. (1986.) Matematičeskaja kartografija. Nedra, Moskva.

EQUIDISTANT MAPPING ALONG MERIDIANS OF THE ROTATIONAL ELLIPSOID ONTO A SPHERE AND VICE VERSA BY USING TRIGONOMETRIC SERIES

The paper investigates the application of trigonometric series in determination of geographic latitude in equidistant mapping along meridians of the rotational ellipsoid onto a sphere and vice versa. Instead of the application of sines of multiple angles it has been proposed to use the series in powers of double angle cosines.

Primljeno: 1944-05-09