UDK 528.181
Originalni znanstveni članak

POVEZANOST FUNKCIJSKIH MODELA POSREDNIH I UVJETNIH MJERENJA

Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Ispitana je matematička povezanost funkcijskih modela posrednih i uvjetnih mjerenja pri rješavanju istoga geodetskog zadatka. Izvedeni su algoritmi transformacije sustava jednadžbi popravaka u sustav uvjetnih jednadžbi. Algoritmi ne ovise o načinu i postupku određivanja datuma i utemeljeni su na primjeni klasične regularne inverzije. Proizlazi da je funkcijski model posrednih mjerenja temeljni i najopćenitiji funkcijski model koji se koristi za rješavanje geodetskih zadataka. Teorijska razmatranja upotpunjena su dvama primjerima.

1. UVOD

Pri rješavanju različitih geodetskih zadataka, koji se temelje na računskoj obradi podataka mjerenja primjenom postupaka izjednačenja, najčešće se koriste funkcijski modeli direktnih, posrednih ili uvjetnih mjerenja, koji se mogu smatrati temeljnim funkcijskim modelima. Izraženi su u direktnih i posrednih mjerenja sustavima jednadžbi popravaka, a kod uvjetnih mjerenja sustavom uvjetnih jednadžbi (Höpcke, 1980.; Klak, 1982.; Feil, 1989.; Rožić, 1993.). Funkcijski modeli kombiniranih mjerenja, nastali kombinacijom temeljnih funkcijskih modela, zbog složenosti i većeg obujma računanja, rijetko se koriste i u ovom radu nisu predmet analize.

Osnovna su obilježja ovih funkcijskih modela linearnost i višeznačnost rješenja što je posljedica prekobrojnosti mjerenja. Uklanja se primjenom odgovarajućih metoda izjednačenja koje se temelje na teorijskim pretpostavkama djelovanja pogrešaka mjerenja. U geodeziji se koristi metoda najmanjih kvadrata koja postavlja uvjet minimuma zbroja kvadrata popravaka mjerenja, a po potrebi uvode se i dodatni uvjeti, npr. kod funkcijskog modela posrednih mjerenja uvjet minimuma zbroja kvadrata nepoznanica (Mittermayer, 1972.; Rožić, 1991.).

Suvremena obrada podataka, zbog brojnih opravdanih razloga, najveće značenje daje primjeni funkcijskog modela posrednih mjerenja (Pelzer, 1985.; Caspary, 1988.). Međutim, međusobni je odnos različitih funkcijskih modela i nadalje zanimljiv problem. To se osobito odnosi na međusobni odnos posrednih i uvjetnih mjerenja, jer se prema tradicijskom pristupu pri objašnje-

* Mr. Nevio Rožić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 41000 Zagreb.

nju teorijskih osnova i praktičnoj primjeni, pretežito ustrajava na njihovim razlikama. Stoga ispitivanje povezanosti tih modela daje potpuniji uvid u postupke računa izjednačenja, napose pri izjednačenju geodetskih mreža.

U postojećoj literaturi već je ustvrđeno da se funkcijski model posrednih mjerenja može prevesti na funkcijski model uvjetnih mjerenja i obratno (Čubranić, 1967.; Bjerhammar, 1973.; Klak, 1982.), pa je pri rješavanju istoga geodetskog zadatka (izjednačenju geodetskih mreža) zanimljiv njihov međusobni odnos.

2. FUNKCIJSKI MODEL POSREDNIH MJERENJA

Funkcijski model posrednih mjerenja je linearni matematički model u kojemu su uz pomoć odgovarajućih matematičkih funkcija međusobno povezani popravci mjerenja s prikraćenim vrijednostima nepoznanica. Izražen je sustavom jednadžbi popravaka (Feil, 1990.):

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times s}{\mathbf{A}}\ \underset{s\times 1}{\mathbf{x}} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \quad \underset{n\times n}{\mathbf{P}}, \tag{1}$$

gdje su:

n — broj mjerenja
s — broj nepoznanica
$\mathbf{v}$ — vektor popravaka mjerenja
$\mathbf{x}$ — vektor prikraćenih nepoznanica
$\mathbf{l}$ — vektor prikraćenih mjerenja
$\mathbf{A}$ — matrica koeficijenata jednadžbi popravaka
$\mathbf{P}$ — matrica težina mjerenja

Broj nepoznanica, tj. ukupni broj svih zadanih i nepoznatih parametara ovoga funkcijskog modela, koji su obuhvaćeni vektorom nepoznanica $\mathbf{x}$, može se izraziti:

$$s = u + k, \tag{2}$$

gdje su:

u — broj ne-datumskih nepoznanica (nepoznatih parametara modela)
k — broj datumskih nepoznanica (broj zadanih parametara modela ili tzv. parametara datuma)

Ovisno o broju i načinu određivanja datumskih nepoznanica, definira se željeni referentni sustav (datum), a o datumu neposredno ovise i ne-datumske nepoznanice (Rožić, 1992., b). Zato se sustav jednadžbi popravaka, dan izrazom (1), može rastaviti na pripadne subvektore i submatrice:

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = [\underset{n\times u}{\mathbf{A}_1}, \ \underset{n\times k}{\mathbf{A}_2}] \begin{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{x}_1} \\ \underset{k\times 1}{\mathbf{x}_2} \end{bmatrix} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{3}$$

ili

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times u}{\mathbf{A}_1}\ \underset{u\times 1}{\mathbf{x}_1} + \underset{n\times k}{\mathbf{A}_2}\ \underset{k\times 1}{\mathbf{x}_2} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{4}$$

gdje su:

$\mathbf{x}_1$ — subvektor ne-datumskih nepoznanica
$\mathbf{x}_2$ — subvektor datumskih nepoznanica
$\mathbf{A}_1$ — submatrica koeficijenata ne-datumskih nepoznanica
$\mathbf{A}_2$ — submatrica koeficijenata datumskih nepoznanica

Kada datumske nepoznanice nisu unaprijed određene (zadane), pojavljuje se ovisnost vektora u matrici koeficijenata jednadžbi popravaka **A** (Rožić, 1992., a). Tada je u izrazima (3) i (4):

$$u = r_D, \tag{5}$$

$$k = d_D, \tag{6}$$

gdje su:

r_D — rang matrice **A**
d_D — defekt matrice **A** (defekt datuma).

Defekt datuma jednak je broju stupnjeva slobode gibanja referentnog sustava i redovito je unaprijed poznat (Welsch, 1979.). Ovisnost vektora matrice **A** može se izraziti i uz pomoć odgovarajuće linearne transformacije submatrica $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$, tj.:

$$\underset{n\times k}{\mathbf{A}_2} = \underset{n\times u}{\mathbf{A}_1}\ \underset{u\times k}{\mathbf{F}}, \tag{7}$$

gdje je **F** matrica operatora linearne transformacije. Posljedica ovisnosti vektora je i neodređenost referentnog sustava, kao i potreba za njegovim definiranjem — optimalni datum.

Ako je pri određivanju sustava jednadžbi popravaka minimalni broj datumskih nepoznanica (jednak je broju parametara datuma) unaprijed određen (zadan), dolazi do pojednostavnjenja izraza (3) i (4):

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times u}{\mathbf{A}_1}\ \underset{u\times 1}{\mathbf{x}_1} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{8}$$

jer je tada subvektor datumskih nepoznanica jednak nultom vektoru, tj.:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \tag{9}$$

a pripadni referentni sustav je čvrsto određen — konvencionalni datum (Rožić, 1991.).

U oba se primjera sustav jednadžbi popravaka može zapisati izrazom (1). Pritom je, u prvom primjeru, broj nepoznanica određen izrazom (2), a u drugom je

$$s = u, \quad (k = 0). \tag{10}$$

Osobitost sustava jednadžbi popravaka je i prisutnost prekobrojnih mjerenja:

$$n_f = n - n_0, \tag{11}$$

gdje je n_0 minimalan broj mjerenja potreban za određivanje jednoznačnog rješenja. Jednak je broju ne-datumskih nepoznanica ($n_0 = u$), pa je

$$n_f = n - u. \tag{12}$$

Sve su ne-datumske nepoznanice međusobno neovisne, pa je submatrica koeficijenata $\mathbf{A}_1$, u izrazima (4) i (8), regularna s obzirom na stupčane vektore. Zato je i broj neophodnih mjerenja n_0 jednak broju neovisnih popravaka mjerenja u sustavu jednadžbi popravaka, dok je broj ovisnih popravaka mjerenja

$$r = n - u = n_f \tag{13}$$

jednak broju prekobrojnih mjerenja.

Ako je broj mjerenja *n* manji od broja međusobno neovisnih nepoznanica *u*, pojavljuje se umanjenje ranga, pa nije moguće niti jednoznačno rješenje geodetskog zadatka — defekt konfiguracije (Welsch, 1979.).

3. FUNKCIJSKI MODEL UVJETNIH MJERENJA

Funkcijski model uvjetnih mjerenja je linearni matematički model kojim su, uz pomoć odgovarajućih implicitno definiranih funkcija, uspostavljeni uvjeti koje zadovoljavaju popravci mjerenja. Izražen je sustavom uvjetnih jednadžbi:

$$\underset{r\times n}{\mathbf{B}^t}\ \underset{n\times 1}{\mathbf{v}} + \underset{r\times 1}{\omega} = \underset{r\times 1}{\mathbf{0}},\quad \underset{n\times n}{\mathbf{P}}, \tag{16}$$

gdje su:

n — broj mjerenja
r — broj neovisnih uvjeta
$\mathbf{v}$ — vektor nesuglasica
ω — vektor nesuglasica
$\mathbf{B}$ — matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi
$\mathbf{P}$ — matrica težina mjerenja

U sustavu uvjetnih jednadžbi nema nepoznanica u klasičnom smislu, jer je nepoznat jedino vektor popravaka mjerenja. Stoga je njegovo određivanje neovisno o problemu definiranja datuma.

Broj prekobrojnih mjerenja određuje se kao kod posrednih mjerenja na temelju izraza (11). Broj potrebnih mjerenja za jednoznačno rješenje n_0 najčešće se određuje empirijski ili uz pomoć posebno izvedenih formula, ovisno o geodetskom zadatku. Međutim, taj se broj teorijski može izraziti:

$$n_0 = n - r, \tag{17}$$

gdje je r broj međusobno neovisnih uvjeta. Uslijed toga je broj prekobrojnih mjerenja

$$n_f = n - n_0 = n - (n - r) = r \tag{18}$$

jednak broju neovisnih uvjeta.

U sustav uvjetnih jednadžbi uobičajeno su uključeni samo neovisni uvjeti, pa je matrica koeficijenata tog sustava $\mathbf{B}$ uvijek regularna s obzirom na stupčane vektore. Stoga je samo *r* popravaka mjerenja u tom sustavu međusobno neovisno, dok je preostalih *n-r* ovisno, a broj neovisnih popravaka mjerenja je jednak broju prekobrojnih mjerenja.

4. POVEZANOST FUNKCIJSKIH MODELA POSREDNIH I UVJETNIH MJERENJA

Usporedba funkcijskih modela posrednih i uvjetnih mjerenja, tj. sustava jednadžbi popravaka i uvjetnih jednadžbi što se odnose na isti geodetski zadatak, ukazuje na međusobnu povezanost. Ona je izražena brojem prekobrojnih mjerenja i jednakošću vektora popravaka u oba sustava jednadžbi.

Kod posrednih i uvjetnih mjerenja broj prekobrojnih mjerenja n_f jednak je i određen, i to kod posrednih mjerenja brojem međusobno ovisnih popravaka mjerenja, a kod uvjetnih mjerenja brojem međusobno neovisnih popravaka.

Osnovna razlika sastoji se u postojanju vektora nepoznanica $\mathbf{x}$ samo u sustavu jednadžbi popravaka, jer je problem određivanja datuma pri izjednačenju geodetskih mreža sastavni dio pripadnoga funkcijskog modela (Caspary, 1988.).

Zato se povezanost sustava jednadžbi popravaka i uvjetnih jednadžbi najjednostavnije ispituje na temelju mogućnosti reduciranja vektora nepoznanica $\mathbf{x}$ iz sustava jednadžbi popravaka.

Ako su datumske nepoznanice unaprijed određene, pripadni se sustav jednadžbi popravaka

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times u}{\mathbf{A}} \; \underset{u\times 1}{\mathbf{x}} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{19}$$

rastavlja s obzirom na broj nepoznanica i broj prekobrojnih mjerenja, tj. broj neovisnih i ovisnih popravaka mjerenja:

$$\begin{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{v}_1} \\ \underset{r\times 1}{\mathbf{v}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{u\times u}{\mathbf{A}_1} \\ \underset{r\times u}{\mathbf{A}_2} \end{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{l}_1} \\ \underset{r\times 1}{\mathbf{l}_2} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Dobiveni sustav jednadžbi, nakon prikaza u razvijenom obliku

$$\underset{u\times 1}{\mathbf{v}_1} = \underset{u\times u}{\mathbf{A}_1} \; \underset{u\times 1}{\mathbf{x}} - \underset{u\times 1}{\mathbf{l}_1}, \tag{21}$$

$$\underset{r\times 1}{\mathbf{v}_2} = \underset{r\times u}{\mathbf{A}_2} \; \underset{u\times 1}{\mathbf{x}} - \underset{r\times 1}{\mathbf{l}_2} \tag{22}$$

omogućuje određivanje jednog od brojnih mogućih rješenja za vektor nepoznanica. Naime, množenjem izraza (21) s lijeve strane s matricom $\mathbf{A}_1^{-1}$ slijedi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{l}_1). \tag{23}$$

Blok-matrica A_1 općenito je nesimetrična i regularna matrica, pa je definirana njena regularna inverzija:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_1 = \mathbf{I}, \tag{24}$$

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica. Nakon uvrštenja izraza (23) u izraz (22) i preuređenja slijedi sustav jednadžbi:

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{v}_1 - \mathbf{I} \mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{l}_1 - \mathbf{I} \mathbf{l}_2 = \mathbf{0}. \tag{25}$$

Uvođenjem oznaka

$$\underset{r\times u}{\mathbf{B}_1^t} = \underset{r\times u}{\mathbf{A}_2} \; \underset{u\times u}{\mathbf{A}_1^{-1}}, \tag{26}$$

$$\underset{r\times r}{\mathbf{B}_2^t} = \underset{r\times r}{-\mathbf{I}}, \tag{27}$$

ovaj se sustav jednadžbi zapisuje

$$\mathbf{B}_1^t \mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{v}_2 + \mathbf{B}_1^t \mathbf{l}_1 + \mathbf{B}_2^t \mathbf{l}_2 = \mathbf{0}, \tag{28}$$

odnosno smatrajući matrice $\mathbf{B}_1^t$ i $\mathbf{B}_2^t$ submatricama

$$[\mathbf{B}_1^t, \mathbf{B}_2^t] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{B}_1^t, \mathbf{B}_2^t] \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Prema izrazu (2), subvektori $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ čine cjelovit vektor popravaka mjerenja $\mathbf{v}$, te subvektori $\mathbf{l}_1$ i $\mathbf{l}_2$ vektor prikraćenim mjerenja $\mathbf{l}$. Uz pomoć matrice koeficijenata ovog sustava

$$\underset{r\times n}{\mathbf{B}^t} = [\underset{r\times u}{\mathbf{B}_1^t}, \underset{r\times r}{\mathbf{B}_2^t}] \tag{30}$$

određen je vektor

$$\underset{r\times 1}{\omega} = \underset{r\times n}{\mathbf{B}^t}\ \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{31}$$

pa je

$$\mathbf{B}^t\,\mathbf{v} + \omega = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Prema tomu, dobiven je sustav od r neovisnih linearnih jednadžbi s n nepoznatih popravaka mjerenja, od kojih je samo r međusobno neovisno.

Kada datumske nepoznanice nisu unaprijed određene, sustav jednadžbi popravaka dan izrazom (4) rastavlja se na isti način kao u izrazu (20), vodeći računa o postojanju subvektora datumskih nepoznanica, tj.

$$\begin{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{v}_1} \\ \underset{r\times 1}{\mathbf{v}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{u\times u}{\mathbf{A}_{11}} \\ \underset{r\times u}{\mathbf{A}_{21}} \end{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{x}_1} + \begin{bmatrix} \underset{u\times k}{\mathbf{A}_{12}} \\ \underset{r\times k}{\mathbf{A}_{22}} \end{bmatrix} \underset{k\times 1}{\mathbf{x}_2} - \begin{bmatrix} \underset{u\times 1}{\mathbf{l}_1} \\ \underset{r\times 1}{\mathbf{l}_2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

ili pisanjem u razvijenom obliku

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{l}_1, \tag{34}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\,\mathbf{x}_2 - \mathbf{l}_2, \tag{35}$$

U izrazu (34) sumbatrica $\mathbf{A}_{11}$ općenito je nesimetrična i regularna matrica, pa je nakon množenja tog izraza s njenom regularnom inverzijom $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ s lijeve strane:

$$\mathbf{x}_1 = -\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{l}_1) \tag{36}$$

Uvrštenjem tog izraza u izraz (35) određen je, nakon odgovarajućeg preuređenja, sustav jednadžbi:

$$(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12})\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{I}\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{l}_1 - \mathbf{I}\,\mathbf{l}_2 = 0 \tag{37}$$

Dodatno pojednostavnjenje proizlazi iz analize prvog člana, tj. submatrice koeficijenata uz subvektor datumskih nepoznanica $\mathbf{x}_2$. Naime, na temelju izraza (7) i rastavljanja matrica $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ na pripadne submatrice, istovjetno kao u izrazu (33), slijedi:

$$\begin{bmatrix} \underset{u\times k}{\mathbf{A}_{12}} \\ \underset{r\times k}{\mathbf{A}_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{u\times u}{\mathbf{A}_{11}} \\ \underset{r\times u}{\mathbf{A}_{21}} \end{bmatrix} \underset{u\times k}{\mathbf{F}}, \tag{38}$$

odnosno

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{11}\,\mathbf{F}, \tag{39}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{F}. \tag{40}$$

Množenjem izraza (39) s lijeve strane sa submatricom $\mathbf{A}_{11}^{-1}$

$$\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12} = \mathbf{F} \tag{41}$$

i uvrštenjem u izraz (40) slijedi:

$$\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{22}. \tag{42}$$

Uslijed te jednakosti proizlazi:

$$\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0}. \tag{43}$$

Stoga je u izrazu (37) prvi član jednak nul-vektoru, pa je

$$\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{I}\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{l}_1 - \mathbf{I}\,\mathbf{l}_2 = \mathbf{0}. \tag{44}$$

Uvođenjem oznaka

$$\underset{r\times u}{\mathbf{B}_1^t} = \underset{r\times u}{\mathbf{A}_{21}}\,\underset{u\times u}{\mathbf{A}_{11}^{-1}}. \tag{45}$$

i

$$\underset{r\times r}{\mathbf{B}_2^t} = -\underset{r\times r}{\mathbf{I}}, \tag{46}$$

i smatrajući matrice $\mathbf{B}_1^t$ i $\mathbf{B}_2^t$ submatricama

$$[\mathbf{B}_1^t,\ \mathbf{B}_2^t]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{bmatrix} + [\mathbf{B}_1^t,\ \mathbf{B}_2^t]\begin{bmatrix}\mathbf{l}_1\\ \mathbf{l}_2\end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{47}$$

slijedi, uz

$$\underset{r\times n}{\mathbf{B}^t} = [\underset{r\times u}{\mathbf{B}_1^t},\ \underset{r\times r}{\mathbf{B}_2^t}] \tag{48}$$

$$\underset{r\times 1}{\omega} = \underset{r\times n}{\mathbf{B}^t}\,\underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \tag{49}$$

sustav linearnih jednadžbi

$$\mathbf{B}^t\,\mathbf{v} + \omega = \mathbf{0}. \tag{50}$$

Proizlazi da su u oba karakteristična primjera sustavi jednadžbi popravaka reduciranjem vektora nepoznanica transformirani u odgovarajući sustav uvjetnih jednadžbi. Taj sustav uvjetnih jednadžbi u općem slučaju formalno se ne podudara sa sustavom uvjetnih jednadžbi određenim neposrednom primjenom funkcijskog modela uvjetnih mjerenja pri rješavanju istoga geodetskog zadatka, a prema uobičajenim postupcima ovisnim o vrsti geodetske mreže, odnosno obavljenih mjerenja. Naime, u tim uvjetnim jednadžbama sumbatrica koeficijenata $\mathbf{B}_2$ općenito je različita od negativne vrijednosti jedinične matrice. No, ti su sustavi uvjetnih jednadžbi međusobno ekvivalentni, jer se primjenom linearnih transformacija blok-matrica $\mathbf{B}_2^t$ može prevesti na jediničnu matricu, uslijed linearne ovisnosti vektora u submatricama $\mathbf{B}_1^t$ i $\mathbf{B}_2^t$

Kada je submatrica $\mathbf{A}_1$, odnosno $\mathbf{A}_{11}$ jedinična matrica, postupak transformacije se dodatno pojednostavnjuje. Također, u slučaju singularnosti tih matrica, koja može nastati uslijed uključivanja mjerenja što povezuju isključivo datumske nepoznanice, potrebno je osigurati njihovu regularnost promjenom redoslijeda popravaka mjerenja u sustavu jednadžbi popravaka.

5. ZAKLJUČAK

Na temelju prethodnih razmatranja, kako je već i u uvodu navedeno, potvrđuje se da su funkcijski modeli posrednih i uvjetnih mjerenja, tj. sustavi jednadžbi popravaka i uvjetnih jednadžbi pri rješavanju istoga geodetskog zadatka međusobno čvrsto matematički povezani. Potvrda tog zaključka proizlazi iz jednakosti prekobrojnih mjerenja i iz algoritma transformacije sustava jednadžbi popravaka u sustav uvjetnih jednadžbi. Algoritmi transformacije temelje se na rastavljanju sustava jednadžbi popravaka, reduciranju vektora nepoznanica i primjeni regularne inverzije, a obavljaju se bez obzira na način definicije datuma.

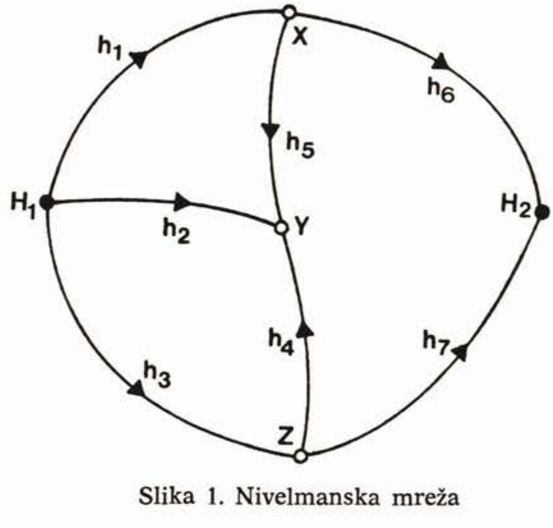
Time je, s jedne strane, postupkom primjerenim računu izjednačenja, ponovno ukazano na neovisnost funkcijskog modela uvjetnih mjerenja o problemu određivanja datuma, jer se svi podaci vezani uz zadane i nepoznate parametre iz modela reduciraju, i s druge je strane zaključeno da je funkcijski model uvjetnih mjerenja poseban sučaj općenitijega funkcijskog modela posrednih mjerenja. Štoviše, ako se i funkcijski model direktnih mjerenja shvati kao model posrednih mjerenja, ali samo s jednom nepoznanicom, proizlazi da je funkcijski model posrednih mjerenja najopćenitiji model koji se u računu izjednačenja koristi za obradu podataka geodetskih mjerenja, dakako ne uzimajući u obzir složenije funkcijske modele kombiniranih mjerenja.

Algoritmi transformacije su i praktično primjenljivi, iako je njihovo značenje više teorijskog značenja, jer doprinose temeljitijem spoznavanju međusobnih odnosa posrednih i uvjetnih mjerenja. Pri praktičnoj primjeni ti su algoritmi konzistentni i učinkoviti, a za razliku od postojećih postupaka (Bjerhammar, 1973), temelje se na regularnoj inverziji.

Dakako, postupak transformacije sustava uvjetnih u sustav jednadžbi popravaka znatno je složeniji zbog neophodnosti uvođenja svih podataka vezanih uz definiciju datuma.

6. PRIMJERI

6.1. Nivelmanska mreža geometrijskog nivelmana (konvencionalni datum)



Slika 1. Nivelmanska mreža

Mjerene visinske razlike	Duljine
$h_1 = 1.4462$ m	$d_1 = 1.5$ km
$h_2 = 5.3298$ m	$d_2 = 1.1$ km
$h_3 = 3.4561$ m	$d_3 = 1.4$ km
$h_4 = 1.8712$ m	$d_4 = 0.9$ km
$h_5 = 3.8891$ m	$d_5 = 0.8$ km
$h_6 = 4.5719$ m	$d_6 = 1.7$ km
$h_7 = 2.5631$ m	$d_7 = 1.6$ km

Zadane visine	Približne nepoznanice
$H_1 = 100.5011$ m	$x_0 = 101.95$ m
$H_2 = 106.5202$ m	$y_0 = 105.83$ m
	$z_0 = 103.96$ m

A) Funkcijski model posrednih mjerenja

$$n = 7,\quad u = 3,\quad n_f = n - u = 4,$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= dx + x_0 - H_1 - h_1,\\
v_2 &= dy + y_0 - H_1 - h_2,\\
v_3 &= dz + z_0 - H_1 - h_3,\\
v_4 &= dy - dz + y_0 - z_0 - h_4,\\
v_5 &= -dx + dy - x_0 + y_0 - h_5,\\
v_6 &= -dx - x_0 + H_2 - h_6,\\
v_7 &= -dz - z_0 + H_2 - h_7,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{1},$$

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx\\ dy\\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.7\\ -0.9\\ 2.8\\ -1.2\\ -9.1\\ -1.7\\ -2.9 \end{bmatrix}.$$

B) Funkcijski model uvjetnih mjerenja

$$n = 7,\quad n_0 = 3,\quad n_f = n - n_0 = 4,$$

$$\begin{aligned}
v_2 - v_3 - v_4 + (h_2 - h_3 - h_4) &= 0,\\
-v_1 + v_2 - v_5 + (-h_1 + h_2 - h_5) &= 0,\\
-v_1 - v_6 + (-h_1 - h_6 + (H_2 - H_1)) &= 0,\\
-v_3 - v_7 + (-h_3 - h_7 + (H_2 - H_1)) &= 0,
\end{aligned}$$

h_2	5.3298	$-h_1$	−1.4462	$-h_1$	−1.4462	$-h_3$	−3.4561
$-h_3$	−3.4561	h_2	5.3298	$-h_6$	−4.5719	$-h_7$	−2.5631
$-h_4$	−1.8712	$-h_5$	−3.8891	$H_2 - H_1$	6.0191	$H_2 - H_1$	6.0191
ω_1	0.0025	ω_2	−0.0055	ω_3	0.0010	ω_4	−0.0001

$$\mathbf{B}^t\,\mathbf{v} + \omega = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5.5 \\ 1.0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

C) Transformacija funkcijskog modela posrednih mjerenja u funkcijski model uvjetnih mjerenja

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_1\,\mathbf{x} - \mathbf{l}_1,$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{x} & -\mathbf{l}_1 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.9 \\ 2.8 \end{bmatrix}, \end{array}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2\,\mathbf{x} - \mathbf{l}_2,$$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_2 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{x} & -\mathbf{l}_2, \\ \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} -1.2 \\ -9.1 \\ -1.7 \\ -1.7 \end{bmatrix}, \end{array}$$

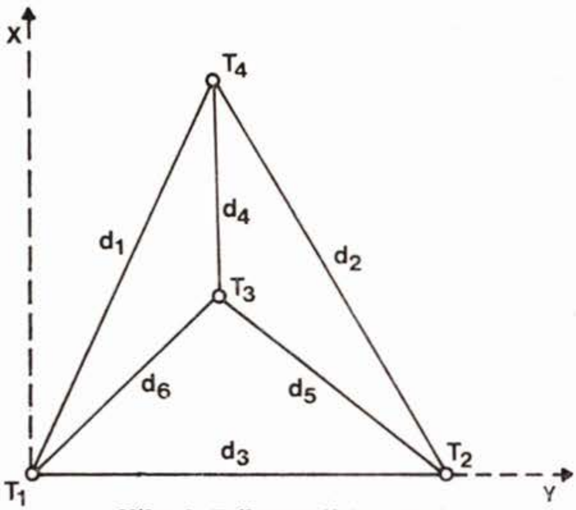
$$\mathbf{B}^t_1 = \mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_1^{-1} \qquad \mathbf{B}^t_2 = -\mathbf{I} \qquad \omega = \mathbf{B}^t_1\,\mathbf{l}_1 + \mathbf{B}^t_2\,\mathbf{l}_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5.5 \\ 1.0 \\ -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^t\,\mathbf{v} + \omega = \mathbf{0},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \hline v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_6 \end{array}\right] + \begin{bmatrix} 2.5 \\ -5.5 \\ 1.0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

6.2. Trilateracijska mreža (optimalni datum)



Slika 2. Trilateracijska mreža

Mjerene duljine	Približne nepoznanice		
	T_i	x_i^0	y_i^0
d_1 = 1027.784 m,	T_1	0.00 m,	0.00 m,
d_2 = 952.358 m,	T_2	0.00 m,	1008.73 m,
d_3 = 1008.728 m,	T_3	386.75 m,	610.94 m,
d_4 = 463.930 m,	T_4	849.52 m,	578.40 m.
d_5 = 554.824 m,			
d_6 = 723.135 m.			

A) Funkcijski model posrednih mjerenja

$n = 6,$

$s = 8,$

$u = r_D = 5,$

$k = d_D = 3,$

$n_f = n - u = 1,$

d_i	$T_A - T_B$	$x_B^0 - x_A^0$ (m)	$y_B^0 - y_A^0$ (m)	d_i^0 (m)	a_i	b_i	$-l_i$ (mm)
d_1	$T_1 - T_4$	849.52	578.40	1027.731	0.827	0.563	−53.11
d_2	$T_2 - T_4$	849.52	−430.33	952.296	0.892	−0.452	−61.75
d_3	$T_1 - T_2$	0.00	1008.73	1008.730	0.000	1.000	2.00
d_2	$T_3 - T_4$	462.77	−32.54	463.913	0.998	−0.070	−17.37
d_5	$T_2 - T_3$	386.75	−397.79	554.808	0.697	−0.717	−15.52
d_6	$T_1 - T_3$	386.75	610.94	723.065	0.535	0.845	−69.83

$$v_i = -\frac{x_B^0 - x_A^0}{d_i^0}\,dx_A - \frac{y_B^0 - y_A^0}{d_i^0}\,dy_A + \frac{x_B^0 - x_A^0}{d_i^0}\,dx_B + \frac{y_B^0 - y_A^0}{d_i^0}\,dy_B + d_i^0 - d_i,$$

$$-l_i = d_i^0 - d_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mathbf{v} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{l},$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} & -\mathbf{l} \\ \begin{bmatrix} -0.827 & -0.563 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.827 & 0.563 \\ 0.000 & 0.000 & -0.892 & 0.452 & 0.000 & 0.000 & 0.892 & -0.452 \\ 0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.998 & 0.070 & 0.998 & -0.070 \\ 0.000 & 0.000 & -0.697 & 0.717 & 0.697 & -0.717 & 0.000 & 0.000 \\ -0.535 & -0.845 & 0.000 & 0.000 & 0.535 & 0.845 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -53.11 \\ -61.75 \\ 2.00 \\ -17,37 \\ -15.52 \\ -69.83 \end{bmatrix} \end{array}$$

B) Funkcijski model uvjetnih mjerenja

$n = 6,$

$n_0 = 5,$

$n_f = n - n_0 = 1,$

$a_{s1} v_{s1} + a_{s2} v_{s2} + a_{s3} v_{s3} + a_{r1} v_{r1} + a_{r2} v_{r2} + a_{r3} v_{r3} + \omega = 0,$

$$a_{si} = \frac{s_i}{r_{i-1}\, r_i \sin \alpha_i}\, \rho'' = \frac{s_i}{F_i}\, \rho'',$$

$$a_{si} = \left(\frac{r_{i-1} \cos \alpha_i - r_i}{r_{i-1}\, r_i \sin \alpha_i} + \frac{r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - r_i}{r_i\, r_{i+1} \sin \alpha_{i+1}}\right) \rho'' = \left(\frac{A_i}{F_i} + \frac{B_i}{F_{i+1}}\right) \rho'',$$

$$\omega = \sum \arc\cos \left(\frac{r_{i-1}^2 + r_i^2 - s_i^2}{2 r_{i-1}\, r_i}\right),$$

A_i	B_i	F_i	a_{si}	a_{ri}
−806.85	−877.70	295362.8	717.75	−1619 22
−900 81	−723.15	171478.5	1145.56	−1456.82
−852.28	−943.14	390192.3	533.24	−1109.17

$\alpha_1 =$ 118° 18′ 30″25
$\alpha_2 =$ 138 13 33.05
$\alpha_3 =$ 103 27 36.15

$\Sigma =$ 359 59 39.45
−360 00 00.00

$\omega =$ −20.55

$\mathbf{b}^t\, \mathbf{v} + \omega = \mathbf{0},$

$[0.72 \quad 1.15 \quad 0.53 \quad -1.62 \quad -1.47 \quad -1.11]\ \mathbf{v} + [-20.55] = 0.$

C) Transformacija funkcijskog modela posrednih mjerenja u funkcijski model uvjetnih mjerenja

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_{11}\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{l}_1,$

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_{21}\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{l}_2,$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \begin{bmatrix} -0.827 & -0.563 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.892 & 0.452 & 0.000 \\ 0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.998 \\ 0.000 & 0.000 & -0,697 & 0.717 & 0.697 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.000 & 0.827 & 0.563 \\ 0.000 & 0.892 & -0.452 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.070 & 0.998 & -0.070 \\ -0.717 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ [-0.535 \quad -0.845 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.535] & [0.845 \quad 0.000 \quad 0.000], \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{11}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1.20978 & 1.46215 & 0.68086 & -1.30757 & -1.87114 \\ 0.00000 & -2.14752 & -1.00000 & 1.92048 & 2.74822 \\ 0.00000 & -2.20882 & 0.00000 & 0.97283 & 1.39213 \\ 0.00000 & -2.14752 & 0.00000 & 1.92048 & 2.74822 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -1.00247 & 0.00000 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_1^t = \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{b}_2^t = -\mathbf{I} & \omega = \mathbf{b}_1^t\,\mathbf{l}_1 + \mathbf{b}_2^t\,\mathbf{l}_2 \\ [0.65 \quad 1.03 \quad 0.48 \quad -1.46 \quad -1.32] & [-1.00] & [-18.53] \end{array}$$

$$\mathbf{b}^t\,\mathbf{v} + \omega = 0,$$

$$[0.65 \quad 1.03 \quad 0.48 \quad -1.46 \quad -1.32 \mid -1.00]\,\mathbf{v} + [-18.53] = 0.$$

Napomena: Nakon množenja s koeficijentom 1.11 određen je oblik uvjetne jednadžbe:

$$[0.72 \quad 1.15 \quad 0.53 \quad -1.62 \quad -1.47 \quad -1.11]\,\mathbf{v} + [-20.55] = 0.$$

LITERATURA

Bjerhammar, A. (1973.): Theory of errors and generalized matrix inverses. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam — London — New York.

Caspary, W. F. (1988.): Concepts of network and deformation analysis. The Universitö of New South Wales, Kensington, Australia.

Čubranić, N. (1967.): Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb.

Feil, L. (1989.): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja — prvi dio. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Feil, L. (1990.): Teorija pogrešaka izjednačenja — drugi dio. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Höcke, W. (1980.): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin — New York.

Klak, S. (1982.): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.

Mittermayer, E. (1972.): A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networks. Bulletin Geodesique 104, 139—157.

Pelzer, H. (1985.): Geodatische Netze in Landes- und Ingeneur-Vermessung II. Konrad Wittwer, Stuttgart.

Rožić, N. (1991.): Prilog izjednačenju geodetskih mreža posebnih namjena. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Rožić, N. (1992., a): Izjednačenje geodetskih mreža s dodatnim fiktivnim mjerenjima, Geodetski list 1992, 1, 49—60.

Rožić, N. (1992., b): Datum geodetskih mreža i S-transformacije. Geodetski list 4, 451—463.

Rožić, N. (1993.): Repetitorij i zbirka zadataka iz teorije pogrešaka i računa izjednačenja. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Welsch, W. (1979.): A review of the adjustment of free networks. Survey Review 194, 167—180.

CONNECTION OF INDIRECT AND CONDITION MEASUREMENT FUNCTIONAL MODELS

Mathematical connection of indirect and conditional measurement functional models in solving of same geodetic task is investigated. Procedure for indirect measurement functional model transformation into appropriate conditional measurement functional model is derived. Transformation procedure is not dependent about different geodetic datum definitions and it is established on the basis of regular matrix inversion. Indirect measurement functional model is the basic and most general functional model which can be used for solving of geodetic problems. Theoretical considerations are illustrated with two examples.

Primljeno: 1994-03-25