UDK 528.412
Originalni znanstveni članak

ODREĐIVANJE KOORDINATA TRIGONOMETRIJSKE TOČKE MJERENJEM UNUTARNJIH PRAVACA I VERTIKALNIH KUTOVA NA DVIJE DANE TOČKE — NOVI POSTUPAK

Nihad KAPETANOVIĆ — Sarajevo*

SAŽETAK. U članku se izlaže još jedan način određivanja koordinata trigonometrijske točke mjerenjem jednoga horizontalnog i dvaju vertikalnih kutova s traženih na dvije dane točke. Isti problem razmatran je u Geodetskom listu 1983, 151—156, 1990, 5—11. U odnosu na prvi način, ovaj ima prednost što se ne zanemaruju utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije, pa se dobivaju točniji rezultati, a u odnosu na oba spomenuta načina, ovaj je kraći i pregledniji.

1. UVOD

Vrlo zanimljiv zadatak određivanja koordinata trigonometrijske točke na osnovi mjerenja jednoga horizontalnog i dvaju vertikalnih kutova razmatrao je Deželak (1983). U tom radu, uz odgovarajuće formule za rješenje zadatka, nalazi se i geometrijska interpretacija, a pokazano je da uvijek postoje dva ili barem jedno rješenje. Razmatrana je i srednja položajna pogreška tako određene nove točke. U tom radu, međutim, zanemareni su utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije.

Isti zadatak riješio sam na drugi način, prevođenjem na lučni presjek (Kapetanović, 1990.) pričem su uzeti u obzir utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije, pa se dobivaju točniji rezultati.

U ovom radu zadatak je riješen prevođenjem na presijecanje naprijed. U odnosu na postupak Deželaka (1983.), prednost je ovoga u tomu što su obračunani utjecaji zakrivljenosti Zemlje i refrakcije, a u odnosu na oba postupka (Deželak, 1983.; Kapetanović, 1990.), ovaj je postupak kraći i pregledniji.

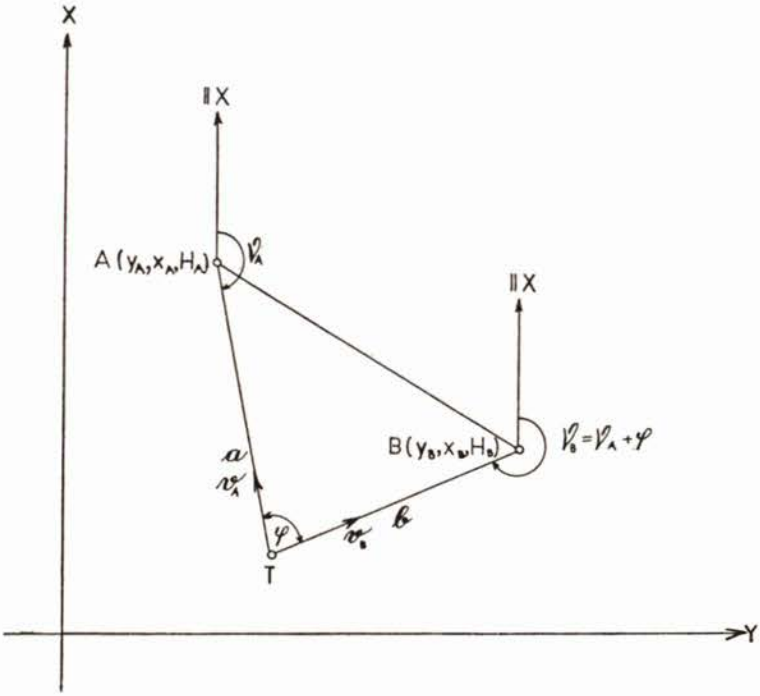
O postignutoj točnosti neće se raspravljati, jer je to obrađeno u oba spomenuta rada.

2. RJEŠENJE ZADATKA PREVOĐENJEM NA PRESIJECANJE NAPRIJED

Neka su s tražene točke T izmjereni horizontalni kut φ i vertikalni kutovi v_A i v_B prema točkama A i B čije su sve tri koordinate poznate. Pritom točke

* Prof. dr. Nihad Kapetanović, Građevinski fakultet, Hasana Brkića 24, Sarajevo.

A i B treba označiti tako da je polazeći od točke A u smjeru kretanja kazaljke na satu prvo točka B, pa onda točka T (sl. 1). Ako s *i* označimo visinu instrumenta, s l_A visinu signala na točki A i s l_B visinu signala na točki B, bit će odgovarajuće visinske razlike:



Slika 1.

$$\Delta h_T^A = a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2 + i - l_A,$$
$$\Delta h_T^B = b \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b^2 + i - l_B, \tag{1}$$

pričem su:
k — koeficijent refrakcije
R — polumjer Zemlje

S obzirom na sliku 1. vrijedi jednadžba:

$$\Delta h_T^A - \Delta h_T^B = H_A - H_B, \tag{2}$$

gdje su H_A i H_B nadmorske visine točaka A i B.

Ako jednadžbu (1) uvrstimo u jednadžbu (2), dobit ćemo:

$$a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2 - b \operatorname{tg} v_B - \frac{1-k}{2R} b^2 = \Delta H, \tag{3}$$

pričem je uvedena oznaka:

$$\Delta H = H_A - H_B + l_A - l_B. \tag{4}$$

Jednadžbu (3) možemo pisati u obliku:

$$a \operatorname{tg} v'_A - b \operatorname{tg} v'_B = \Delta H, \tag{5}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} v'_A &= \frac{a \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a^2}{a} = \operatorname{tg} v_A + \frac{1-k}{2R} a, \\ \operatorname{tg} v'_B &= \frac{b \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b^2}{b} = \operatorname{tg} v_B + \frac{1-k}{2R} b. \end{aligned} \tag{6}$$

U korekcijskim članovima $\frac{1-k}{2R} \cdot a$ odnosno $\frac{1-k}{2R} \cdot b$ nisu poznate vrijednosti duljina strana a i b, pa umjesto njih treba uzeti približne vrijednosti a_0 i b_0 koje se izmjere na karti ili se procijene.

Na osnovi slike 1. možemo postaviti sljedeće jednadžbe:

$$\nu_B = \nu_A + \varphi \tag{7}$$

i

$$\begin{aligned} y &= y_A + a \sin \nu_A, \\ y &= y_B + b \sin(\nu_A + \varphi), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x &= x_A + a \cos \nu_A, \\ x &= x_B + b \cos(\nu_A + \varphi), \end{aligned} \tag{9}$$

Iz jednadžbi (8) i (9) slijedi:

$$\begin{aligned} y_A + a \sin \nu_A &= y_B + b \sin(\nu_A + \varphi), \\ x_A + a \cos \nu_A &= x_B + b \cos(\nu_A + \varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

Ako prvu od jednadžbi (10) pomnožimo s $\cos(\nu_A + \varphi)$, a drugu sa $\sin(\nu_A + \varphi)$ i oduzmemo drugu od prve, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} a [\cos(\nu_A + \varphi) \sin \nu_A - \sin(\nu_A + \varphi) \cos \nu_A] &= (y_B - y_A) \cos(\nu_A + \varphi) - \\ &- (x_B - x_A) \sin(\nu_A + \varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

Ako u jednadžbi (11) zamijenimo

$$\begin{aligned} \sin(\nu_A + \varphi) &= \sin \nu_A \cos \varphi + \cos \nu_A \sin \varphi. \\ \cos(\nu_A + \varphi) &= \cos \nu_A \cos \varphi - \sin \nu_A \sin \varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

te obavimo potrebna množenja, dobivamo nakon skraćivanja i sređivanja, uz uvažavanje relacije

$$\sin^2 \nu_A + \cos^2 \nu_A = 1, \tag{13}$$

izraz za stranu a

$$a = [(y_B - y_A) + (x_B - x_A) \operatorname{ctg} \varphi] \sin \nu_A + [(x_B - x_A) - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \varphi] \cos \nu_A \tag{14}$$

odnosno, ako uvedemo oznake

$$\begin{aligned} y_B - y_A + (x_B - x_A) \operatorname{ctg} \varphi &= C_1 \\ x_B - x_A - (y_B - y_A) \operatorname{ctg} \varphi &= C_2, \end{aligned} \tag{15}$$

dobivamo

$$a = C_1 \sin \nu_A + C_2 \cos \nu_A, \tag{16}$$

Ako prvu od jednadžbi (10) pomnožimo sa cos ν_A, a drugu sa sin ν_A i oduzmemo drugu od prve, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} b [\sin (\nu_A + \varphi) \cos \nu_A - \cos (\nu_A + \varphi) \sin \nu_A] = (x_B - x_A) \sin \nu_A - \\ - (y_B - y_A) \cos \nu_A \end{aligned} \tag{17}$$

Ako u jednadžbu (17) uvrstimo jednadžbe (12), obavimo potrebna množenja i sređivanja uz uvažavanje relacije (13), dobivamo izraz za stranu b:

$$b = \frac{x_B - x_A}{\sin \varphi} \sin \nu_A - \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi} \cos \nu_A, \tag{18}$$

odnosno, ako uvedemo oznake

$$\frac{x_B - x_A}{\sin \varphi} = D_1 \quad \text{i} \quad \frac{y_B - y_A}{\sin \varphi} = D_2 \tag{19}$$

dobivamo

$$b = D_1 \sin \nu_A - D_2 \cos \nu_A, \tag{20}$$

Jednadžbu (16) pomnožimo s tg v'_A, a jednadžbu (20) s tg v'_B pa je

$$\begin{aligned} a \operatorname{tg} v'_A &= C_1 \operatorname{tg} v'_A \sin \nu_A + C_2 \cdot \operatorname{tg} v'_A \cos \nu_A, \\ b \operatorname{tg} v'_B &= D_1 \operatorname{tg} v'_B \sin \nu_A - D_2 \operatorname{tg} v'_B \cos \nu_A, \end{aligned} \tag{21}$$

Ako od prve od jednadžbi (21) oduzmemo drugu i uvažimo jednadžbu (5), dobivamo:

$$(C_1 \operatorname{tg} v'_A - D_1 \operatorname{tg} v'_B) \sin \nu_A + (C_2 \operatorname{tg} v'_A + D_2 \operatorname{tg} v'_B) \cos \nu_A = \Delta H. \tag{22}$$

Ako uvedemo oznake

$$C_1 \operatorname{tg} v'_A - D_1 \operatorname{tg} v'_B = M \quad \text{i} \quad C_2 \operatorname{tg} v'_A + D_2 \operatorname{tg} v'_B = N, \tag{23}$$

možemo jednadžbu (22) pisati u obliku:

$$M \sin \nu_A + N \cos \nu_A = \Delta H. \tag{24}$$

Dobili smo poznatu trigonometrijsku jednadžbu koja se može riješiti tako da se zamijene

$$\sin \nu_A = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\nu_A}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\nu_A}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos \nu_A = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\nu_A}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\nu_A}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{25}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (25) u jednadžbu (24) dobivamo:

$$M\,\frac{2\,t}{1+t^2} + N\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = \Delta H, \tag{26}$$

odakle je

$$(N+\Delta H)\,t^2 - 2\,M\,t + \Delta H - N = 0. \tag{27}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe (27) su:

$$t_{1,2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + N^2 - \Delta H^2}}{N+\Delta H}. \tag{28}$$

Iz jednadžbi (5), (15), (19), (23) i (28) vidi se da postoje dva rješenja ili barem jedno, uz uvjete $0° < \varphi < 180°$, $v'_A \neq v'_B \neq 0$, te $90° < v'_A$, $v'_B < 90°$, koji su u praksi redovito zadovoljeni. To je dokazao i Deželak (1983.).

Jednadžbom (28) i — za provjeru — jednadžbom (24) jednoznačno je određen kvadrant kutova $\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_1$ i $\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_2$. Nakon pronalaženja polovičnih kutova nije teško naći potrebne smjerne kutove, jer je

$$(\nu_A)_1 = 2\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_1 \quad \text{i} \quad (\nu_A)_2 = 2\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_2. \tag{29}$$

Od dvaju rješenja, pravo treba odabrati uz pomoć skice. Svrhovito je ručnim kompasom približno izmjeriti smjernjak $\nu_A \pm 180°$, na točki T, pa na osnovi njega utvrditi pravo rješenje. Na osnovi izračunanoga smjernoga kuta ν_A i danih vrijednosti nije teško izračunati duljine strana a i b po formulama (16) i (20), a zatim koordinate tražene točke T na dva načina po formulama (8) i (9).

Napomena: Nakon što su izračunane duljine strana a i b, ako se ustanovi da su vrijednosti a_0 i b_0 uzete suviše grubo, treba s vrijednostima a i b izračunati nove vrijednosti za tg v'_A i tg v'_B (po formulama (6)), pa s tim vrijednostima ponovno izračunati vrijednosti a i b.

3. NUMERIČKI PRIMJER

Uzet je isti primjer kao u radovima Deželaka (1983.) i Kapetanovića (1990.).

Dani **podaci:**

točka	y (m)	x (m)	H (m)
A	13 000	40 000	300
B	14 000	41 000	150

$\varphi = 85°$, $v_A = 8°$, $v_B = 3°$, $l_A = l_B$

Rješenje:

(procjena) $a_0 = 1\,400$ m, $b_0 = 600$ m

formule (6) $\mathrm{tg}\, v'_A = 0{,}140\,636$, $\mathrm{tg}\, v'_B = 0{,}052\,449$

(računanje je obavljeno s vrijednostima $k = 0{,}13$ i $R = 6370$ km)

formule (15) $C_1 = 1\,087{,}4887$ m, $C_2 = 912{,}5113$ m

formule (19) $D_1 = 1\,003{,}8198$ m, $D_2 = 1\,003{,}8198$ m

formule (23) $M = 100{,}2907$ m, $N = 180{,}9813$ m

formule (28) i (29)

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_1 = 0{,}733\,614,\quad \left(\frac{\nu_A}{2}\right)_1 = 36°\,15'\,51{,}''5$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\nu_A}{2}\right)_2 = -\,0.127\,594,\quad \left(\frac{\nu_A}{2}\right)_2 = 352°\,43'\,43{,}''3$$

$$(\nu_A)_1 = 72°\,31'\,43'',\quad (\nu_A)_2 = 345°\,27'\,27''$$

Ručnim kompasom izmjeren je približni smjerni kut $\nu_A \pm 180° = 250°$, što znači da vrijedi rješenje $(\nu_A)_1$.

formule (16) i (20) $a = 1311{,}2826$ m, $b = 656{,}1337$ m

formula (7) $\nu_B = 157°\,31'\,43''$

formule (8) i (9) $y = 14\,250{,}79$ m, $x = 40\,393{,}68$ m

Dobiven je isti rezultat kao u radu Kapetanovića (1990.).

LITERATURA

Deželak, F. (1989.): Određivanje koordinata trigonometrijske točke mjerenjem unutrašnjih pravaca i vertikalnih kutova na dvije date točke. Geodetski list 7—9, 151—156.

Kapetanović, N. (1990.): Određivanje koordinata trigonometrijske tačke mjerenjem unutrašnjih pravaca i vertikalnih kutova na dvije date tačke. Geodetski list 1—3, 5—11.

THE DETERMINATION OF COORDINATES OF A TRIGONOMETRIC POINT BY MEASURING HORIZONTAL DIRECTIONS AND VERTICAL ANGLES TOWARDS TWO GIVEN POINTS — NEW METHOD

The paper deals with another way of determination the coordinates of a trigonometric point by measuring one horizontal and two vertikal angles from the searched to two given points. The same problem was considered in Geodetski list 1983, 151—156; 1990, 5—11. As related to the first one, this method is more advantageous because the influences of terrestrial curvature and refraction are not ignored enabling thus the obtaining of more accurate results in less time and more clearly.

Primljeno: 1994-05-03