UDK 528.14:512.25
Stručni članak

PROBLEM ELIMINACIJE I METODA NAJMANJIH KVADRATA

Miljenko LAPAINE i Damjan JOVIČIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Teorijski je razjašnjen problem eliminacije koji se sastoji u određivanju vrijednosti linearne forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ *gdje su* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *dani brojevi i* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *rješenja regularnog sustava linearnih jednadžbi. Primjena metode eliminacije osobito je pogodna pri izjednačenjima po metodi najmanjih kvadrata uz pomoć računala. Naime, kako je u ovome radu pokazano, jedna jedina programska naredba u trostrukoj petlji omogućuje formiranje normalnih jednadžbi, određivanje nepoznatih parametara i popravaka, kao i njihovih disperzijskih matrica (do na faktor varijance).*

1. UVOD

U prošlosti, kad nisu postojala elektronička računala, izjednačenje većih geodetskih mreža bio je veliki problem. Najveći dio posla odnosio se na rješavanje normalnih jednadžbi koje je obično rješavala jedna osoba. Zato je taj posao trajao veoma dugo.

Najbržim rješavanjem u prošlom stoljeću smatra se izjednačenje pruskog primorja što ga je obavio Zacharias Dase 1849. godine, koji je tom prigodom riješio 86 jednadžbi za tri i pol mjeseca. Danas se isti broj jednadžbi može riješiti za nekoliko minuta ili nekoliko sekundi, ovisno o tome kakvim računalom raspolažemo.

Numeričko rješavanje sustava linearnih jednadžbi bio je uvijek stanoviti izazov. I autori ovog rada objavili su do sada nekoliko radova o toj temi (Jovičić i dr., 1981., a. 1981., b, 1983., 1984., 1985.). Međutim, razvoj računala je u silnom zamahu pa ono što nam je ne tako davno izgledalo teško dostupno ili čak teško zamislivo danas je stvarnost. Stoga se ponovno vraćamo problematici vezanoj rješavanju sustava linearnih jednadžbi u geodeziji i u ovome radu predlažemo jedan univerzalan i vrlo jednostavan algoritam s pomoću kojeg se pri izjednačenju posrednih opažanja, odnosno parametarskom izjednačenju obavlja formiranje i rješavanje normalnih jednadžbi, te računanje popravaka i odgovarajućih disperzijskih matrica.

* Mr. Miljenko Lapaine, mr. Damjan Jovičić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 41000 Zagreb

2. PROBLEM ELIMINACIJE

Taj se problem, u najjednostavnijem slučaju, sastoji od računanja vrijednosti linearne forme

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.1}$$

gdje su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dani brojevi, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rješenja regularnog sustava

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

Prirodni postupak rješavanja tog problema bio bi u određivanju brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u eksplicitnom obliku i njihovom uvrštavanju u izraz (2.1). Međutim, to se može izbjeći.

Sastavimo tablicu koeficijenata sustava (2.2), pripišimo s desne strane stupac slobodnih članova i s donje strane redak sastavljen od koeficijenata linearne forme. Predznaci tih koeficijenata neka su promijenjeni. U desni donji kut stavimo nulu. Imat ćemo sljedeću shemu:

$$\begin{array}{cccc||c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ \hline\hline -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_n & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

ili, u skraćenim oznakama

$$\begin{array}{c||c} A & b \\ \hline\hline -c & 0 \end{array} \tag{2.3'}$$

Neka $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ označuju rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11} \gamma_1 + a_{12} \gamma_2 + \ldots + a_{1n} \gamma_n &= c_1 \\ a_{21} \gamma_1 + a_{22} \gamma_2 + \ldots + a_{2n} \gamma_n &= c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \gamma_1 + a_{n2} \gamma_2 + \ldots + a_{nn} \gamma_n &= c_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tada se lako pokaže da je

$$b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + \ldots + b_n \gamma_n = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Dakle, računanje forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ može se zamijeniti računanjem forme $b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+\ldots+b_n\gamma_n$. Očevidno je da ako prvi redak u tablici (2.3) pomnožimo s γ_1, drugi s $\gamma_2, \ldots$, n-ti s γ_n i dodamo posljednjem retku, dobit ćemo redak čiji su elementi smješteni ispod dvostruke linije jednaki nuli; element u donjem desnom kutu očevidno je jednak traženom broju: vrijednosti linearne forme. Obrnuto, ako na neki način izaberemo linearnu kombinaciju od n redaka tako da njenim dodavanjem posljednjem retku dobijemo nul redak (do linije), koeficijenti te kombinacije bit će rješenje sustava (2.4), i prema tome element u donjem desnom kutu bit će jednak traženom broju. To slijedi iz jedinstvenosti rješenja sustava (2.4). Dakle, nema potrebe za traženjem brojeva $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Nužno je samo »anulirati posljednji redak« dodavanjem odgovarajuće linearne kombinacije prvih n redaka. To se može napraviti običnim postupkom unaprijed u Gaußovoj metodi primijenjenoj na shemu (2.3).

Takav isti plan može se, očevidno, primijeniti na računanje nehomogene linearne forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + d$. Razlika je samo u tomu da u donjem desnom kutu ne treba staviti nulu, nego konstantu d, tako da polazna shema ima oblik

$$\begin{array}{c||c} A & b \\ \hline\hline -c & d \end{array}. \qquad (2.3'')$$

Rješenje sustava (2.2) može se također naći tom metodom bez primjene postupka unatrag. Zaista, izrazi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su specijalni slučajevi linearne forme (2.1) s koeficijentima $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. Njihovo određivanje može se izvesti simultano uvođenjem u donji lijevi kut redaka $(-1, 0, \ldots, 0), (0, -1, \ldots, 0), \ldots, -1)$, koji zajedno čine matricu —I. U donjem desnom kutu umjesto znamenke nula, stavimo stupac nula.

Polazna shema za rješavanje sustava ima dakle oblik

$$\begin{array}{c||c} A & b \\ \hline\hline -I & 0 \end{array}. \qquad (2.5)$$

Kada dodavanjem odgovarajućih linearnih kombinacija prvih n redaka dobijemo u donjem lijevom kutu nul matricu, u donjem desnom kutu imat ćemo stupac s vrijednostima nepoznanica.

Invertiranje matrice je ekvivalentno rješavanju n sustava posebnog oblika, čiji slobodni članovi čine jediničnu matricu. Računanje inverzne matrice može se izvesti uz pomoć sheme

$$\begin{array}{c||c} A & I \\ \hline\hline -I & 0 \end{array}. \qquad (2.6)$$

gdje I, kao i prije, označuje jediničnu matricu, a u donjem desnom kutu je smještena nul matrica n-tog reda. Nakon anuliranja svih redaka u donjem lijevom kutu, dodavanjem odgovarajućih linearnih kombinacija prvih n redaka, dobit ćemo inverznu matricu A^{-1} u donjem desnom kutu.

Rezultat eliminacije može se skicirati u matričnom obliku. To omogućava dobivanje nekih poopćenja. Naime, rješenje sustava $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može se napisati u matričnom obliku kao stupac

$$x = A^{-1} b,$$

forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ kao broj

$$c^T x = c^T A^{-1} b.$$

Takav prikaz ukazuje na način računanja složenijeg izraza $CA^{-1}B$, gdje su C i B stanovite pravokutne matrice, takve da je broj stupaca matrice C jednak n i broj redaka matrice B jednak n, dok broj redaka matrice C i broj stupaca matrice B može biti bilo koji. Računanje elemenata matrice $CA^{-1}B$ može biti provedeno metodom eliminacije primijenjenom na shemu

$$\begin{array}{c||c} A & B \\ \hline -C & 0 \end{array}. \tag{2.7}$$

Nakon anuliranja elemenata smještenih u donjem lijevom kutu, dodavanjem linearnih kombinacija prvih n redaka, dobit ćemo u desnom donjem kutu matricu $CA^{-1}B$.

Stavljajući $C = I$, dolazimo do sheme

$$\begin{array}{c||c} A & B \\ \hline -I & 0 \end{array} \tag{2.8}$$

za računanje produkta $A^{-1}B$.

Transponiranjem sheme može se dobiti modifikacija metode eliminacije, naime: ako je $D = CA^{-1}B$, tada je $D^T = B^T(A^T)^{-1}C^T$; i odatle slijedi da D^T (i prema tome također i D) može biti izračunano postupkom unaprijed primijenjenim na shemu

$$\begin{array}{c||c} A^T & C^T \\ \hline -B^T & 0 \end{array}. \tag{2.9}$$

Posebno, za računanje vrijednosti linearne forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ može se također koristiti shema

$$\begin{array}{c||c} A^T & c^T \\ \hline -b^T & 0 \end{array}.$$

gdje je A^T transponirana matrica matrice koeficijenata sustava, c^T stupac sastavljen od koeficijenta linearne forme koju treba izračunati, a b^T redak slobodnih članova. Valjanost te konstrukcije može se izravno dokazati, bez pozivanja na prethodne rezultate. Ako pomnožimo prvih n redaka sheme (2.9) s $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i dodamo posljednjem, dobit ćemo nulu u donjem lijevom kutu i $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ u donjem desnom kutu.

Analogno, za rješavanje sustava $Ax = b$ možemo koristiti shemu

$$\begin{array}{c||c} A^T & I \\ \hline -b^T & 0 \end{array}. \tag{2.10}$$

Zapažanje. Pri rješavanju sustava metodom eliminacije broj operacija ponešto premašuje onaj u Gaußovoj metodi. Ipak, uniformnost postupka, i posebno odsutnost hoda unatrag, često čini ovu metodu pogodnijom.

Za invertiranje matrice može se koristiti shema

$$\begin{array}{c||c} A^T & I \\ \hline -I & 0 \end{array}. \tag{2.11}$$

Nakon završetka postupka, u donjem desnom kutu dobit ćemo matricu transponiranu matrici A^{-1}.

Dakle, za svaki analizirani problem postoje dvije sheme, definirane ili matricom A ili njenom transponiranom. Uočava se da je učinkovitija ona shema koja sadrži manji broj redaka u donjem lijevom kutu. Dakle, pri rješavanju linearnog sustava bez hoda unatrag djelotvornije je koristiti shemu s transponiranom matricom; pri računanju produkta $A^{-1}B$ — shemu s transponiranom matricom u slučaju da je broj stupaca u B manji od n; treba koristiti danu matricu ako je broj stupaca u B veći od n.

3. PROBLEM ELIMINACIJE I METODA NAJMANJIH KVADRATA

Neka je A zadana matrica tipa (m, n), rang(A) = n, x vektor nepoznatih parametara, y slučajni vektor mjerenja, $D(y) = \sigma_0^2 I$ disperzijska (kovarijacijska) matrica vektora y i $\sigma_0^2 > 0$ nepoznati faktor varijance koji treba procijeniti. Tada se sustav

$$Ax = E(y), \qquad D(y) = \sigma_0^2 I \tag{3.1}$$

naziva Gauß-Markovljevim modelom s potpunim rangom (Koch, 1980).

Označimo s $\hat{x}$ vektor procijenjenih parametara, s $\hat{v}$ vektor procijenjenih pogrešaka mjerenja i s $\hat{y} = y + \hat{v}$ vektor popravljenih ili prilagođenih mjerenja. Primjena metode najmanjih kvadrata daje (Lapaine, 1989.):

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= (A^T A)^{-1} A^T y \\
E(\hat{x}) &= x \\
D(\hat{x}) &= \sigma_0^2 (A^T A)^{-1} \\
\hat{v} &= A\hat{x} - y \\
E(\hat{v}) &= 0 \\
D(\hat{v}) &= \sigma_0^2 (I - A(A^T A)^{-1} A^T) \\
\hat{y} &= y + \hat{v} = A\hat{x} \\
E(\hat{y}) &= E(y) \\
D(\hat{y}) &= \sigma_0^2 A (A^T A)^{-1} A^T \\
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{v}^T \hat{v}}{m-n}, \qquad E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

U računu izjednačenja spomenuto se procjenjivanje najčešće naziva izjednačenjem posrednih mjerenja ili parametarskim izjednačenjem. Pri praktičnom računanju takvog izjednačenja obično se razlikuju pojedine faze rada kao što su npr.: formiranje normalnih jednadžbi, rješavanje normalnih jednadžbi, te ocjena točnosti koja uključuje računanje procjene faktora varijance i srednjih pogrešaka ili disperzijskih matrica parametara, popravaka i popravljenih mjerenja. Za pojedine korake u računanju postoje i odgovarajuće kontrole (Feil, 1989.; Rožić, 1993.).

Primjena metode eliminacije omogućuje da se i formiranje i rješavanje normalnih jednadžbi i računanje popravaka i disperzijskih matrica napravi jednim jedinim i nadasve jednostavnim algoritmom. To je Gaußova metoda eliminacije po stupcima ili hod unaprijed primijenjen na shemu oblika:

$$\begin{array}{ccc||ccc}
-\mathrm{I} & \mathrm{A} & \mathrm{y} & \mathrm{I} & 0 & 0 \\
\mathrm{A}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\
\mathrm{y}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{3.3}$$

Pomnožimo li prvi redak tablice (3.3) redom s A^T, y^T, $-I$ i dodamo drugom, trećem, odnosno četvrtom retku, dobit ćemo tablicu

$$\begin{array}{ccc||ccc}
-\mathrm{I} & \mathrm{A} & \mathrm{y} & \mathrm{I} & 0 & 0 \\
0 & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} & \mathrm{A}^{\mathrm{T}} & \mathrm{I} & 0 \\
0 & \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} & \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} & \mathrm{y}^{\mathrm{T}} & 0 & 1 \\
\hline\hline
0 & -\mathrm{A} & -\mathrm{y} & -\mathrm{I} & 0 & 0 \\
0 & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{3.4}$$

u kojoj možemo prepoznati matricu normalnih jednadžbi A^TA i desnu stranu normalnih jednadžbi A^Ty. Pomnožimo li sada drugi redak tablice (3.4) redom s $-y^TA(A^TA)^{-1}$, $A(A^TA)^{-1}$, $(A^TA)^{-1}$ te dodamo trećem, četvrtom, odnosno petom retku, dobit ćemo tablicu u kojoj možemo pročitati vrijednosti

$$\begin{array}{ccc||ccc}
-\mathrm{I} & \mathrm{A} & \mathrm{y} & \mathrm{I} & 0 & 0 \\
0 & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} & \mathrm{A}^{\mathrm{T}} & \mathrm{I} & 0 \\
0 & 0 & \hat{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{v}} & -\hat{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} & -\hat{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}} & 1 \\
\hline\hline
0 & 0 & \hat{\mathrm{v}} & -\mathrm{D}(\hat{\mathrm{v}})/\sigma_0^2 & \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1} & 0 \\
0 & 0 & \hat{\mathrm{x}} & (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} & \mathrm{D}(\hat{\mathrm{x}})/\sigma_0^2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{3.5}$$

procijenjenih parametara $\hat{x}$, procijenjenih popravaka $\hat{v}$ i zbroj njihovih kvadrata $\hat{v}^T\hat{v}$ s pomoću kojeg dolazimo dijeljenjem s odgovarajućim brojem stupnjeva slobode do procjene faktora varijance $\hat{\sigma}_0^2$. Nadalje, u tablici (3.5) postoji također, do na faktor varijance, disperzijska matrica nepoznanica $D(\hat{x})$ i disperzijska matrica popravaka $D(\hat{v})$. Disperzijska matrica prilagođenih mjerenja lako se dobije kao razlika

$$D(\hat{y}) = D(y) - D(\hat{v}). \tag{3.6}$$

Time je postupak izjednačenja doveden do kraja. Međutim, pomnožimo li još redom treći redak tablica (3.5) s $-\hat{v}/\hat{v}^T\hat{v}, -\hat{x}/\hat{v}^T\hat{v}, 1/\hat{v}^T\hat{v}$ te dodamo četvrtom, petom, odnosno šestom retku, dobit ćemo u desnom donjem kutu inverznu matricu polazne matrice iz gornjega lijevoga kuta polazne tablice (3.3). Taj posljednji korak eliminacije može poslužiti kao definitivna (i jedina) numerička provjera čitavog postupka. Provjere pojedinih međukoraka nisu potrebne ako pretpostavimo da će računanje obavljati računalo uz pomoć odgovarajućeg programa.

U slučaju Gauß-Markovljevog modela oblika

$$Ax = E(y), \qquad D(y) = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{3.7}$$

gdje je P (pa prema tome i P^{-1}) pozitivno definitivna matrica, može se na poznati način prijeći na model oblika (3.1) ili izravno primijeniti metodu eliminacije, s tom razlikom što sada umjesto polazne tablice (3.3) treba staviti

$$
\begin{array}{ccc||ccc}
-P & PA & Py & I & 0 & 0 \\
A^{T}P & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
y^{T}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
-I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\tag{3.8}
$$

Nakon provedenih m + n koraka eliminacije dobiva se tablica

$$
\begin{array}{ccc||ccc}
-P & PA & Py & I & 0 & 0 \\
0 & A^{T}PA & A^{T}Py & A^{T} & I & 0 \\
0 & 0 & \hat{v}^{T}P\hat{v} & -\hat{v}^{T} & -\hat{x}^{T} & 1 \\
\hline\hline
0 & 0 & \hat{v} & -D(\hat{v})/\sigma_0^2 & A(A^{T}PA)^{-1} & 0 \\
0 & 0 & \hat{x} & (A^{T}PA)^{-1}A^{T} & D(\hat{x})/\sigma_0^2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\tag{3.9}
$$

koja odgovara tablici (3.5) za slučaj jednako točnih opažanja (P=I).

4. PRAKTIČNA PRIMJENA METODE ELIMINACIJE

U današnje bi se vrijeme numerički dio rješavanja geodetskih problema trebao redovito obavljati s pomoću računala i odgovarajućih programa. Primjena metode eliminacije koja se predlaže u ovome radu mogla bi pritom biti iskorištena zbog svoje upravo zapanjujuće jednostavnosti za programiranje. Zaista, pretpostavimo li da cijela polazna tablica (3.8) predstavlja jednu matricu, odnosno dvodimenzionalno polje koje smo nazvali M. Tada je za dobivanje tablice (3.9) koja sadrži:

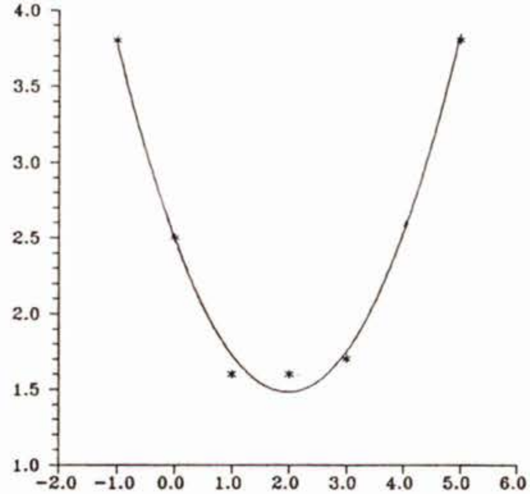
normalne jednadžbe: $A^{T}PA$, $A^{T}Py$
rješenje normalnih jednadžbi: $\hat{x}$
procijenjene popravke: $\hat{v}$
zbroj kvadrata popravaka, odnosno: $\hat{v}^{T}P\hat{v}$
disperzijsku matricu nepoznanica podijeljenu faktorom varijance: $D(\hat{x})/\sigma_0^2$ i
disperzijsku matricu popravaka podijeljenu faktorom varijance, $D(\hat{v})/\sigma_0^2$

potrebno u BASICU isprogramirati samo sljedećih sedam programskih linija:

```
for i = 1 to m + n
for j = i + 1 to 2*(m + n + 1)
for k = i + 1 to 2*(m + n + 1)
M (j, k) = M (j, k) — M (i, k) * M (j, i)/M (i,i)
next k
next j
next i
```

Nakon toga preostaje samo ispis rezultata. Na temelju izloženih teorijskih postavki sastavljen je odgovarajući program za osobno računalo s pomoću kojeg je riješen jedan numerički primjer.

Primjer



Slika 1. Prilagođavanje parabole skupu točaka

Zadano je sedam točaka

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	3.8	2.5	1.6	1.6	1.7	2.6	3.8

Traži se funkcionalna zavisnost oblika $y = a+bx+cx^2$ koja će se u smislu metode najmanjih kvadrata, a uz pretpostavku o bespogrešnim apscisama i jednakim težinama ordinata (P=I), najbolje prilagoditi zadanim podacima (sl. 1.).

Primjena metode eliminacije daje:

Procijenjeni parametri:

$$\hat{a} = 2.4929 \qquad \hat{b} = -1.0226 \qquad \hat{c} = 0.2583$$

Procijenjene popravke:

$$\check{v}_1 = -0.0262$$
$$\hat{v}_2 = -0.0071$$
$$\hat{v}_3 = 0.1286$$
$$\hat{v}_3 = -0.1190$$
$$\hat{v}_5 = 0.0500$$
$$\hat{v}_6 = -0.0643$$
$$\hat{v}_7 = 0.0381$$

$$\hat{v}^T P \hat{v} = 0.0395 \quad \hat{\sigma}_0^2 = 0.0099 \quad \hat{\sigma}_0 = 0.0994$$

Disperzijske matrice:

$$D\,(\hat{x}/)\sigma_0^2 = \begin{bmatrix} 0\ 2857 & -0.0714 & 0.0000 \\ & 0.2262 & -0.0476 \\ & & 0.0119 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}\,(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.0007 & 0.0000 \\ & 0.0022 & -0.0005 \\ & & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$D\,(\hat{o})/\sigma_0^2 = \begin{bmatrix} 0.2381 & -0.3571 & -0.0714 & 0.0952 & 0.1429 & 0.0714 & -0.1190 \\ & 0.7143 & -0.2143 & -0.1429 & -0.0714 & 0.0000 & 0.0714 \\ & & 0.7143 & -0.2857 & -0.2143 & -0.0714 & 0.1429 \\ & & & 0.6667 & -0.2857 & -0.1429 & 0.0952 \\ & & & & 0.7143 & -0.2143 & -0.0714 \\ & & & & & 0.7143 & -0.3571 \\ & & & & & & 0.2381 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}\,(\hat{v}) = \begin{bmatrix} 0.0024 & -0.0035 & -0.0007 & 0.0009 & 0.0014 & 0.0007 & -0.0012 \\ & 0.0071 & -0.0021 & -0.0014 & -0.0007 & 0.0000 & 0.0007 \\ & & 0.0071 & -0.0028 & -0.0021 & -0.0007 & 0.0014 \\ & & & 0.0066 & -0.0028 & -0.0014 & 0.0009 \\ & & & & 0.0071 & -0.0021 & -0.0007 \\ & & & & & 0.0071 & -0.0035 \\ & & & & & & 0.0024 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}\,(\hat{y}) = \begin{bmatrix} 0.0075 & -0.0035 & -0.0007 & 0.0009 & 0.0014 & 0.0007 & -0.0012 \\ & 0.0028 & -0.0021 & -0.0014 & -0.0007 & 0.0000 & 0.0007 \\ & & 0.0028 & -0.0028 & -0.0021 & -0.0007 & 0.0014 \\ & & & 0.0033 & -0.0028 & -0.0014 & 0.0009 \\ & & & & 0.0028 & -0.0021 & -0.0007 \\ & & & & & 0.0028 & -0.0035 \\ & & & & & & 0.0075 \end{bmatrix}$$

Procijenjene standardne devijacije (srednje pogreške) prilagođenih mjerenja:

$$\sigma_{y1} = 0.0868$$
$$\sigma_{y2} = 0.0531$$
$$\sigma_{y3} = 0.0531$$
$$\sigma_{v3} = 0.0574$$
$$\sigma_{y5} = 0.0531$$
$$\sigma_{y6} = 0.0531$$
$$\sigma_{y7} = 0.0868$$

ZAKLJUČAK

U ovome radu najprije je teorijski razjašnjen problem eliminacije koji se sastoji u određivanju vrijednosti linearne forme $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ gdje su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dani brojevi i $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rješenja regularnog sustava linearnih jednadžbi. Zatim je pokazano kako se metoda eliminacije može primijeniti pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi i pri računanju inverzne matrice.

Primjena metode eliminacije osobito je pogodna pri izjednačenjima po metodi najmanjih kvadrata uz pomoć računala. Naime, kako je u ovome radu pokazano, jedna jedina programska naredba u trostrukoj petlji omogućuje određivanje ne samo nepoznatih parametara i popravaka, nego i njihovih disperzijskih matrica (do na faktor varijance).

Međutim, predložena metoda ipak nije bez mana i toga moramo biti svjesni. Osnovni nedostaci izravne primjene metode eliminacije, prema opisu u ovome radu, jesu zahtjevi za memorijom i veći broj računskih operacija od onoga neophodnog. Ukratko, neposredna primjena metode eliminacije nije najučinkovitije sredstvo za sva moguća izjednačenja. Međutim, glede djelotvornosti za stadardne probleme može biti potpuno zadovoljavajuća.

Spretniji ili iskusniji korisnici uočit će više mogućnosti za poboljšanje djelotvornosti predložene metode. Moguće su uštede i u memoriji, i u smanjenju broja računskih operacija.

U ovome radu objašnjena je primjena metode eliminacije na izjednačenje posrednih mjerenja. Odgovarajućim poopćenjima moguće je metodom eliminacije obuhvatiti i druge oblike izjednačenja (Kampmann i Wüllner, 1987.).

LITERATURA

Faddeeva, V. N. (1959.): Computational Methods of Linear Algebra. Dover Publications, Inc., New York.

Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1981., a): Rješavanje normalnih jednadžbi pomoću računala. Zbornik radova 4. susreta geodeta SRH. Osijek: Savez društava geodeta Hrvatske, 1—11.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1981., b): Programi za rješavanje normalnih jednadžbi. Zbornik radova kolokvija Džepni i stolni računari u graditeljskoj praksi, Opatija, Fakultet graditeljskih znanosti Rijeka, 41—51.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1983.): Invertiranje matrice normalnih jednadžbi i stolno računalo. Zbornik radova Savjetovanja o automatizaciji u geodeziji, Bled, Savez geodetskih inženjera i geometara Jugoslavije, 277—283.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1984.): Rješavanje normalnih jednadžbi i metoda Choleskog. Geodetski list 1984, 1—3, 33—44.

Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, B., Petrović, S. (1985): Usporedba efikasnosti dvaju algoritama za rješavanje normalnih jednadžbi koji se baziraju na metodi Choleskog. Geodetski list 1985, 7—9, 211—222.

Kampmann, G. i Wüller, H. (1987.): Die Methode der kleinsten Quadraten mittels Totalinversion. AVN 1987, 3, 104—110.

Koch, K. R. (1980.): Parameterschätzung und Hypotesentests in linearen Modellen. Dümmler Verlag, Bonn.

Lapaine, M. (1989.): Metoda najmanjih kvadrata u naše vrijeme. Geodetski list 1989, 4—6, 119—133.

Rožić, N. (1993.): Repetitorij i zbirka zadataka iz teorije pogrešaka i računa izjednačenja. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

PROBLEM OF ELIMINATION AND THE METHOD OF LEAST SQUARES SQUARES

The problem of elimination consists of computation of the values of a linear form $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ where $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are given numbers and $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is the solution of a linear sistem of eqations. The paper explaines the problem of elimination from the theoretical point of view. The application of the method of elimination is especially suitable in computer-aided least squares adjustements. The paper shows that only one program command in a triple loop enabls not only the estimation of unknown parameters and errors of observations, but also their covariance matrices (up to the variance factor).

Primljeno: 1993-11-15