Osječki matematički list 22 (2022), 119–129

Matematički model problema školskog rasporeda

Maja Andrijević,* Ivana Kuzmanović Ivičić†

Sažetak

Problem školskog rasporeda vrlo je zastupljen problem koji s vremenom postaje sve složeniji jer je pri izradi rasporeda sve više uvjeta i ograničenja koji moraju biti zadovoljeni. U ovom radu prikazan je matematički model osnovnog problema rasporeda sati. Već u tom sasvim jednostavnom slučaju vidljivo je da se radi o vrlo složenom problemu koji svakim dodatnim uvjetom postaje sve složeniji sa sve manjim brojem rješenja. Danas je dostupno mnogo aplikacija koje pomažu pri izradi rasporeda, a sve se baziraju na nekoj matematičkoj metodi za pronalaženje optimalnog rješenja.

Ključne riječi: *raspored sati, matematički model, problem mrežnog protoka, obojani graf, bipartitivni multigraf*

Mathematical model for school timetabling problem

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, *email: mandrije@mathos.hr*

†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, *email: ikuzmano@mathos.hr*

Abstract

The problem of school timetabling is a very common problem that becomes more complex over time as more and more conditions and restrictions must be met. This paper presents a mathematical model of the basic problem of scheduling. Already in that simple case it is evident that this is quite a complex problem which, with each additional condition, becomes more and more complex and having fewer solutions. Today there are numerous applications available that help with scheduling, and all are based on some mathematical method for finding optimal solutions.

Keywords: *school timetable, mathematical model, network flow problem, graph coloring, bipartitive multigraphs*

1 Uvod u problem

Početkom školske godine svaka škola susreće se s problemom izrade rasporeda sati. Cilj je izraditi raspored prihvatljiv svim sudionicima, odnosno i učenicima i nastavnicima, a koji će zadovoljiti sva pedagoška i organizacijska ograničenja. U praksi, problem izrade rasporeda vrlo je složen i dugotrajan posao. Općenito, problem rasporeda ubraja se među složenije matematičke probleme. Složenost se krije u velikom broju mogućih kombinacija među kojima je potrebno naći onu najprihvatljiviju koja zadovoljava sve unaprijed određene uvjete.

Promotrimo vrlo pojednostavljeni primjer rasporeda u kojem imamo četiri predmeta koja predaju četiri različita nastavnika $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, četiri razreda $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ te u tablici 1 ukupan broj školskih sati koji uključuju nastavnika n_j i razred r_i, $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$.

	r_1	r_2	r_3	r_4
n_1	1	1	1	2
n_2	2	1	1	1
n_3	0	2	1	2
n_4	0	1	2	0

Tablica 1. Broj školskih sati koji uključuju nastavnika n_j i razred r_i

Vidimo da je ukupni broj kombinacija velik te da stoga nije jednostavno odrediti neko rješenje. Jedan od mogućih rasporeda dan je u tablici 2. Unutar pet školskih sati rasporedili smo nastavnike i razrede, na način da u svakom od 5 školskih sati pridružujemo uređeni par (n_j, r_i) nastavnika i razreda.

1	2	3	4	5
(n_1, r_1)	(n_1, r_3)	(n_1, r_4)	(n_1, r_4)	(n_1, r_2)
(n_2, r_2)	(n_2, r_1)	(n_2, r_1)	(n_2, r_3)	(n_2, r_4)
(n_3, r_4)	(n_3, r_2)	(n_3, r_2)	(n_4, r_2)	(n_3, r_3)
(n_4, r_3)	(n_4, r_4)	(n_4, r_3)		

1	2	3	4	5
(n_1, r_1)	(n_2, r_1)	(n_2, r_1)	-	-
(n_2, r_2)	(n_3, r_2)	(n_3, r_2)	(n_4, r_2)	(n_1, r_2)
(n_4, r_3)	(n_1, r_3)	(n_4, r_3)	(n_2, r_3)	(n_3, r_3)
(n_3, r_4)	(n_4, r_4)	(n_1, r_4)	(n_1, r_4)	(n_2, r_4)

Tablica 2. Raspored (gornji po nastavnicima, donji po razredima) za jedan dan od pet školskih sati

Uočimo kako smo u navedenom primjeru promatrali samo 4 razreda i 4 nastavnika, dok su stvarni primjeri puno složeniji. Treba uzeti u obzir sve razrede koje škola može imati, sve predmete koje pojedini razred sluša, kao i kapacitete i opremljenost učionica za potrebe izvedbe pojedinih predmeta. Također, u stvarnoj situaciji mogu se javiti i preferencije kao na primjer kojim satima nastavnik više preferira raditi, koji predmet je bolje staviti na početak ili kraj nastave i slično. No, i u prethodnom vrlo pojednostavljenom primjeru već uviđamo veliku složenost naizgled jednostavnog problema školskog rasporeda.

2 Formalni zapis problema rasporeda

Zapišimo sada matematički model promatranog problema. Krenimo od najjednostavnijeg problema dnevnog rasporeda: razred - nastavnik. Unutar ovog problema ne uključujemo nikakva dodatna ograničenja s kojima se susrećemo u stvarnom životu, baziramo se samo na razrede i nastavnike. Jedan razred označavat će skup učenika koji pohađaju isti program, a skup razreda označavat ćemo s $\{r_1, \ldots, r_m\}$. Skup nastavnika označimo s $\{n_1, \ldots, n_n\}$. Nadalje, pretpostavimo da na raspolaganju imamo p školskih sati, i definirajmo matricu $U \in \mathbb{R}^{mxn}$ s elementima u_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, gdje u_{ij} označava broj školskih sati koji uključuju nastavnika n_j i razred r_i. Sada je problem raspoređivanja nastavnika i razreda u danih p školskih sati, uz uvjet da niti jedan nastavnik i niti jedan razred nemaju raspoređeno više od jednog školskog sata u isto vrijeme, dan s:

$$\text{Odrediti } x_{ijk},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1 \ldots, n,\ k = 1 \ldots, p, \tag{1}$$

uz uvjete

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = u_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq 1,\ i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leq 1,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p \tag{4}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p \tag{5}$$

gdje je $x_{ijk} = 1$ ako razredu r_i predaje nastavnik n_j u terminu k, a 0 inače.

Izraz (2) osigurava da svaki nastavnik održi točno onoliko školskih sati koliko je predviđeno, izraz (3) osigurava da niti jedan nastavnik nema nastavu s više razreda istovremeno, dok izraz (4) osigurava da svaki razred u svakom školskom satu ima najviše jedan predmet.

Postavlja se pitanje uz koje uvjete prethodni problem ima rješenje. Može se pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja koja govori kako postoji raspored u p školskih sati ako i samo ako niti jedan razred i niti jedan nastavnik nemaju zadano više od p školskih sati koje moraju odraditi.

Propozicija 2.1. *Problem* (1)–(5) *ima rješenje ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq p,\ j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \leq p,\ i = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Navedeni uvjeti (6) i (7) osiguravaju da je ukupan broj školskih sati koje svaki nastavnik mora održati u danu, odnosno svaki razred pohađati, manji ili jednak od ukupnog broja dostupnih školskih sati. U tom slučaju, prema prethodnoj propoziciji, sigurno postoji barem jedan raspored koji zadovoljava sva ograničenja (2)–(5).

Promotrimo sada problem rasporeda sati unutar jednog tjedna. Za taj problem, neka je svakom razredu r_i, $i = 1, \ldots, m$, pridružen pozitivan cijeli broj a_i koji predstavlja maksimalan broj školskih sati koji razred r_i može imati tijekom svakog dana u tjednu. Nadalje, za svakog nastavnika n_j, $j = 1, \ldots, n$, neka je b_j pozitivan cijeli broj koji predstavlja maksimalan broj školskih sati koji nastavnik n_j može održati tijekom svakog dana u tjednu. Sada promatrani problem možemo zapisati na sljedeći način:

$$\text{Odrediti } x_{ijk},\ i = 1 \ldots, m,\ j = 1 \ldots, n,\ k = 1 \ldots, p, \tag{8}$$

uz uvjete

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = u_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq a_i,\ i = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p \tag{11}$$

$$x_{ijk} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, p. \tag{12}$$

U ovom modelu x_{ijk} je broj školskih sati koje izvodi nastavnik n_j u razredu r_i u danu k. Stoga sada x_{ijk} ne mora biti 0 ili 1, nego bilo koji nenegativan cijeli broj. O nužnim i dovoljnim uvjetima rješivosti ovog problema govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.2. *Rješenje problema* (8)–(12) *postoji ako i samo ako je*

$$\sum_{i=1}^{m} u_{ij} \leq pb_j,\ j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \leq pa_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Vratimo se sada na dnevni raspored i uvedimo dodatni uvjet raspoloživosti razreda i nastavnika. Naime, mogu postojati termini nastave koji su unaprijed zadani prije same izrade rasporeda. Cilj nam je za razred r_i i nastavnika n_j pronaći termin k u kojem su i razred i nastavnik slobodni, odnosno u kojem nisu unaprijed zauzeti. U tu svrhu s p_{ijk} označimo novu varijablu koja se odnosi na razred r_i, nastavnika n_j i termin k te se realizira s 0 ako razred r_i i nastavnik n_j nisu unaprijed predodređeni za neki termin k, a u suprotnom s 1. Unaprijed raspoređena predavanja možemo formalno zapisati na sljedeći način:

$$x_{ijk} \geq p_{ijk},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p.$$

Prethodne nejednakosti osiguravaju da ukoliko je razredu r_i u terminu k unaprijed dodijeljen nastavnik n_j da će x_{ijk} biti 1, dok u suprotnom x_{ijk} može biti 0 ili 1.

Sada promatrani problem s navedenim dodatnim ograničenjem poprima oblik:

$$\text{Odrediti } x_{ijk},\ i = 1\ldots,m,\ j = 1\ldots,n,\ k = 1\ldots,p, \tag{13}$$

uz uvjete

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} = \overline{u}_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq \overline{c}_{ik},\ i = 1,\ldots,m,\ k = 1,\ldots,p \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leq \overline{t}_{jk},\ j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p \tag{16}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,p \tag{17}$$

gdje su:

$$\overline{u}_{ij} = u_{ij} - \sum_{k=1}^{p} p_{ijk},$$

$$\overline{c}_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ako razred } r_i \text{ nije unaprijed predodređen u terminu } k \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

$$\overline{t}_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ako nastavnik } n_j \text{ nije unaprijed predodređen u terminu } k \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

Uočimo kako izrazi (15) i (16) zamjenjuju izraze (3) i (4) iz početnog problema jer osiguravaju da niti jedan nastavnik, odnosno niti jedan razred ne budu raspoređeni u terminima u kojima nisu raspoloživi.

Sada smo vidjeli kako izgleda opći model problema rasporeda za nekoliko inačica problema. Kao što smo već u samom početku mogli uočiti, porastom broja ograničenja značajno se otežava promatrani problem. Može se pokazati da problem rasporeda sati pripada skupini NP-potpunih problema. Za neke vrlo specijalne slučajeve postoje i jednostavniji algoritmi za njihovo rješavanje:

Propozicija 2.3. *Ako je u problemu* (13)–(17) *svaki nastavnik dostupan tijekom najviše dva školska sata, onda postoji algoritam koji će u* $O(n^2)$ *vremena pronaći raspored.*

Dokaz. Dokaz pogledati u [1]. □

Rješavajući problem rasporeda, želimo pronaći bilo koje rješenje x_{ijk}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$, koje zadovoljava sve postavljene uvjete (14)–(17), odnosno od rasporeda se očekuje da zadovoljava zadana linearna ograničenja. Ukoliko modelu dodamo još primjerice i težinske preferencije tj. ukoliko brojčano s t_{ijk} izrazimo za koju varijablu više želimo da bude 1, onda problem postaje optimizacijski problem s funkcijom cilja

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} t_{ijk} x_{ijk} \tag{18}$$

i ograničenjima (14)–(17). U tom slučaju tražimo rješenje koje zadovoljava sva ograničenja (dopustivo rješenje), a za koje je vrijednost funkcije cilja (18) minimalna ili maksimalna (optimalno rješenje). U funkciju cilja možemo dodati različite organizacijske, didaktičke ili pedagoške preferencije i zahtjeve. Funkcija cilja koja u obzir uzima više faktora možda u primjeni daje bolji raspored, no takav je problem puno teži za riješiti.

3 Neke metode za rješavanje problema rasporeda

Vratimo se sada na pojednostavljeni problem izrade rasporeda sati. Za rješavanje tog problema postoji više metoda. Neki od pristupa za rješavanje baziraju se na primjeni

- algoritma za rješavanje problema mrežnog protoka,
- bipartitivnog multigrafa,
- algoritma za bojanje grafova.

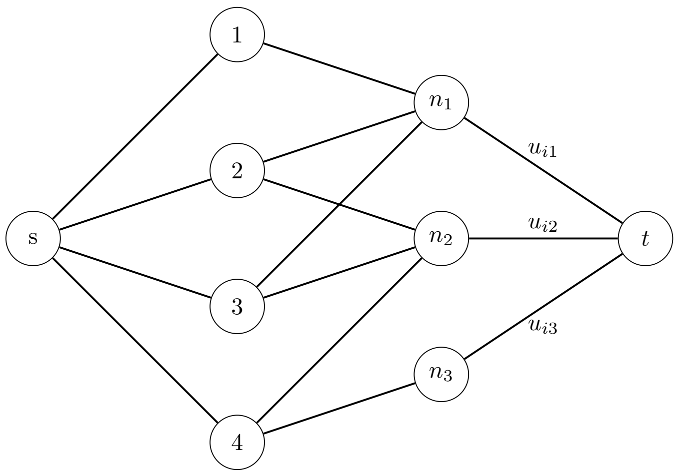
Kod problema mrežnog protoka stvaramo mrežu, odnosno graf za svaki školski sat tako da tok u mreži predstavlja predavanja održana unutar tog školskog sata. Na sličan način u [1] možemo pronaći analogni pristup za razrede, tj. izgrađuje se mreža za svaki razred r_i, a konstrukcija rasporeda sastoji se od svih predavanja u koja je uključen razred r_i. Preciznije rečeno, za dani razred r_i radimo sljedeće:

1. neka vrhovi grafa predstavljaju školske sate $k = 1, \ldots, p$, i nastavnike n_j, $j = 1, \ldots, n$,
2. bridom spojimo školski sat k i nastavnika n_j ako je nastavnik n_j dostupan i nije ranije određen za drugi razred (graf) u terminu k,

3. u graf dodamo nova dva vrha, takozvane vrhove „izvor“ i „ponor“, označimo ih sa s i t redom te s spojimo sa svim vrhovima $k = 1, \ldots, p$, a t spojimo bridovima sa svim vrhovima n_j, $j = 1, \ldots, n$,

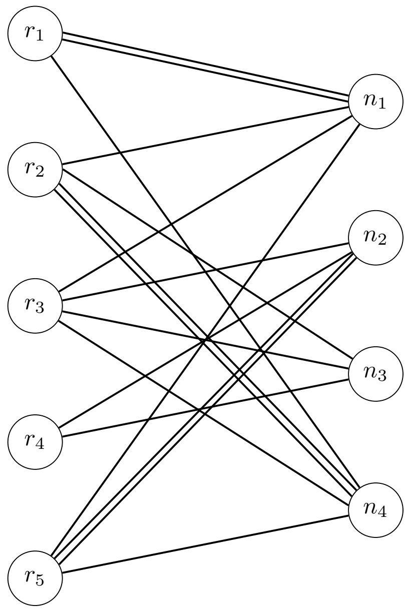
4. postavimo kapacitete bridova (n_j, t), $j = 1, \ldots, n$, na u_{ij}, a za sve ostale bridove kapacitete stavimo ili 0 ili 1.

Rješenje mrežnog protoka daje raspored svih predavanja za dani razred. Konstruiranjem mreže za svaki razred dolazimo do potpunog rasporeda, ali nemamo osiguranje da ova metoda uvijek nađe prihvatljivo rješenje. Na slici 1 možemo vidjeti jednostavan primjer u kojem smo konstruirali mrežu za neki razred r_i.



Slika 1. Primjer mrežnog protoka za razred r_i

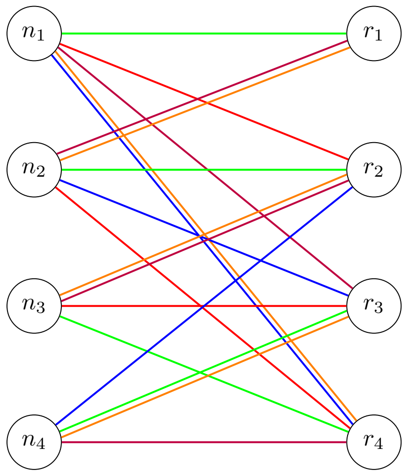
Nadalje, jedna od metoda kojom se promatrani problem može riješiti za fiksni k je upotrebom bipartitivnog multigrafa, gdje razredi i nastavnici predstavljaju vrhove grafa, a bridovi odgovaraju predavanjima. Pri tome, svaki razred r_i i nastavnik n_j povezani su s onoliko bridova koliko je zadano da mora biti predavanja koja ih uključuju. Metoda se sastoji u pronalaženju nizova skupova bridova koji nemaju zajedničkih vrhova, na taj način tražimo najveći broj predavanja koji se mogu održavati u isto vrijeme. Pronalaskom najvećeg niza dolazimo do rasporeda, a kako na raspolaganju imamo p termina potrebno je pronaći p takvih skupova. Primjer bipartitivnog multigrafa možemo vidjeti na slici 2.



Slika 2. Primjer bipartitivnog multigrafa

Naposljetku, zadnja navedena metoda je metoda bojanja grafova. Ponovno vrhovi predstavljaju nastavnike i razrede, a bridovi predavanja. Na raspolaganju moramo imati p boja, gdje svaka boja predstavlja jedan termin. Za dva brida kažemo da su susjedna ako imaju zajednički vrh. Bridove grafa bojamo na način da niti jedan susjedan brid nije obojan istom bojom, a bridovi obojani istom bojom označavaju da se ta predavanja mogu održavati u isto vrijeme.

Na kraju, vratimo se primjeru s početka i riješimo ga metodom bojanja grafova. Rješenje je dano na slici 3, gdje smo išli redom po bridovima i bojali ih s pet različitih boja na način da niti jedan par susjednih bridova nije obojan jednakom bojom. Rješenje se može pročitati i zapisati u obliku tablice 2, a ona predstavlja raspored za jedan radni dan u tjednu. Ako bismo algoritam ponovili pet puta, dobili bismo potpun raspored za cijeli tjedan i onda bismo mogli razdvojiti raspored za svaki razred zasebno.



Slika 3. Obojani graf

Vidimo da niti jednom od promatranih metoda nije lako doći do rasporeda i to čak niti u vrlo pojednostavljenom slučaju. Štoviše, navedene metode su heuristike, što znači da niti ne možemo sa sigurnošću tvrditi da će doći do rješenja. Danas postoje brojne aplikacije koje škole koriste za izradu gotovih rasporeda, kao primjerice aSc rasporedi, RAS Timetable, EMS Classroom Scheduling te brojne druge koje se baziraju na nekoj od matematičkih metoda za rješavanje problema rasporeda.

Literatura

[1] D. De Werra, *An introduction to timetabling*, European Journal of Operational Research, **19** (1985), 151–162.

[2] A. Schaerf, *A Survey of Automated Timetabling*, Artificial Intelligence Review, **13** (1999), 87–127.

[3] S. Even, A. Itai, S. Shamir, *On the complexity of timetable and multi-commodity flow problems*, technical report, 1974.

[4] A. K. Bincy, *Graph Coloring and its Real Time Applications an Overveiw*, International Journal of Mathematics And its Applications 5 (2017), 845–849.

[5] R. P. Badoni, D. K-Gupta, *A graph edge colouring approach for school timetabling problems* , Int. J. Mathematics in Operational Research, 6(2014), 123–138.

[6] S. Pribil, *Algoritmi evolucijskog računanja primijenjeni na problem izrade školskog rasporeda sati*, diplomski rad, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2012.