Osječki matematički list 22 (2022), 171–183

# Nekoliko povijesnih dokaza Pitagorinog poučka

Franka Miriam Brückler*

**Sažetak**

U ovom članku nakon kratkog pregleda prvih pojava Pitagorinog poučka u starim civilizacijama dajemo detaljan opis osam povijesnih dokaza Pitagorinog poučka: Euklidov i Ptolemejev dokaz, tri dokaza Tābita ibn Kure, navodni dokaz Leonarda da Vincija, dokaz američkog predsjednika James A. Garfielda te dokaza kojeg je kao dječak otkrio Albert Einstein.

**Ključne riječi**: *Pitagorin poučak, pitagorejci, Euklid Aleksandrijski, Klaudije Ptolemej, Tābit ibn Kura, Leonardo da Vinci, James A. Garfield, Albert Einstein, povijest geometrije*

# A Few Historical Proofs of the Pythagorean Theorem

**Abstract**

In this paper, after a brief survey of the discovery of the Pythagorean theorem in ancient civilisations, we present eight historical proofs of this theorem in detail: the proofs of Euclid and Ptolemy, three proofs by Thabit ibn Qurra, the proof attributed to Leonardo da Vinci, U.S. president James A. Garfield's proof, and Albert Einstein's boyhood proof.

**Keywords**: *Pythagorean theorem, Pythagoreans, Euclid of Alexandria, Claudius Ptolemy, Thabit ibn Qurra, Leonardo da Vinci, James A. Garfield, Albert Einstein, history of geometry*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

# 1 Uvod

Pitagorin poučak je vjerojatno širem pučanstvu najpoznatiji matematički teorem, bar po nazivu. Dok sam naziv sugerira da ga je otkrio i dokazao znameniti **Pitagora iz Samosa** (6. st. pr. Kr.), istina je donekle drugačija, a svakako kompliciranija. Pitagora zasigurno nije bio prvi koji je poznavao sadržaj tog poučka. Dok su stari Egipćani u doba tzv. srednjeg carstva, početkom drugog tisućljeća pr. Kr., poznavali samo specijalni slučaj Pitagorinog poučka, za trokute čije su stranice u omjeru $3 : 4 : 5$, Babilonci su u otprilike isto doba poznavali i opći slučaj te se čini da je starobabilonsko carstvo iz doba otprilike 1900.–1600. pr. Kr. najstarija civilizacija koja je poznavala iskaz Pitagorinog poučka, tj. da za pravokutne trokute vrijedi da je zbroj kvadrata kraćih stranica (kateta) jednak kvadratu najdulje stranice (hipotenuze) [2, 8]. Neovisno o „zapadnim" znanjima, u tzv. doba sulvasutri (otprilike 8.–5. st. pr. Kr.) iskaz Pitagorinog poučka bio je poznat i u Indiji, a oko prijelaza era iskaz je bio poznat i u Kini, kako smo opisali u prethodnom broju [4].

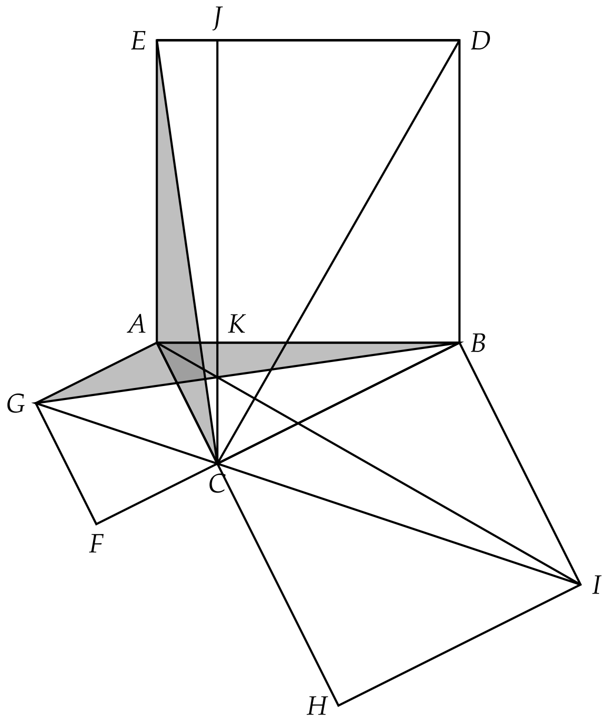
S druge strane, prilično je pouzdano da prvi dokaz ovog poučka možemo povezati s Pitagorom. Doduše, ne možemo sa sigurnošću reći da ga je baš on dokazao. Pitagora je naime osnovao zajednicu, školu, pitagorejaca koja je u njegovo doba svoje rezultate čuvala tajnim, a pripisivala ih njemu. No, sigurno je da je od nekog pitagorejca, bio to Pitagora osobno ili ne, potekao prvi od danas više stotina poznatih dokaza ovog teorema. Izvorni dokaz nije sačuvan, no nagađa se da je koristio sličnost trokuta. S druge strane, budući da se sadržaj prve knjige Euklidovih *Elemenata* uglavnom pripisuje pitagorejcima, moguće je i da je Euklidov dokaz 47. propozicije u I. knjizi *Elemenata* zapravo izvorni pitagorejski [1, 2]. U ovom članku ćemo uz taj najstariji poznati dokaz Pitagorinog poučka predstaviti i još sedam drugih povijesnih dokaza istog poučka.

# 2 Euklid i Ptolemej

Krenimo od najstarijeg sačuvanog dokaza Pitagorinog poučka, kojeg je oko 300. pr. Kr. zapisao **Euklid Aleksandrijski**. Dokaz je dan u stilu starogrčke geometrijske algebre: identitete koje danas interpretiramo (i dokazujemo) algebarski, antički Grci gledali su i dokazivali čisto geometrijski, kao jednakosti duljina, površina ili volumena. Kad se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao npr. ovdje o jednakosti jednog kvadrata sa zbrojem druga dva, misli se na jednakost mjere (ovdje površine), a ne na sukladnost. Tako Euklid u 47. propoziciji I. knjige *Elemenata* Pitagorin poučak iskazuje i dokazuje na sljedeći način [5]:

U pravokutnim trokutima kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta jednak je zbroju kvadrata nad stranicama koje zatvaraju pravi kut.

Euklidov dokaz, minimalno moderniziran, je sljedeći. Neka je dan pravokutni trokut $ABC$ s pravim kutom pri vrhu $C$ (slika 1). Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati $ACFG$, $BCHI$ i $ABDE$.




Slika 1. Euklidov dokaz Pitagorinog poučka.

Nadalje, ucrtana je i okomica $\overline{CJ}$ na hipotenuzu, od vrha $C$ do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika $AKJE$ i $BKJD$. Dokazujemo da je jedan od njih, recimo $AKJE$, jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom (u odabranom slučaju to je $ACFG$). Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Ucrtajmo trokute $ACE$ i $ABG$. Ta dva trokuta imaju dvije stranice jednakih duljina ($|AB| = |AE|$ i $|AC| = |AG|$), a i kutovi među tim dvjema stranicama su jednaki ($\angle EAC$ je pravi kut uvećan za kut $\angle BAC$, a takav je i $\angle GAB$). Po SKS-teoremu[1] ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i sukladna. Budući da $\triangle ACE$ ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik $AKJE$ (stranica $\overline{AE}$ je zajednička, a visina je $\overline{KA}$), slijedi da je taj trokut (po površini) jednak pola pravokutnika $AKJE$.[2] S druge strane $\triangle AGB$ ima s kvadratom $ACFG$ zajedničku stranicu $\overline{AG}$ i visinu $\overline{AC}$, dakle je taj trokut (po površini) jednak pola tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki (sukladni), slijedi da je kvadrat $ACFG$ (po površini) jednak pravokutniku $AKJE$, što je i trebalo dokazati.

Jedan od prvih novih dokaza Pitagorinog poučka nakon Euklida pripisuje se znamenitom postklasičnom helenističkom astronomu i matematičaru **Kladiju Ptolemeju** (2. st. n. e.). Ptolemej je poznat po svom teoremu o tetivnim četverokutima, kojeg je dokazao u svom najznamenitijem djelu $M\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\eta' \ \Sigma\upsilon'\nu\tau\alpha\xi\iota\zeta$ („Matematike sintaksis“), poznatijem pod arapskim nazivom المجسطي, latiniziranim kao *Almagest*, jer je to djelo u srednjem vijeku Europljanima ponovno postalo poznato preko arapskog prijevoda. Svoj teorem Ptolemej je naveo u stilu starogrčke geometrijske algebre, interpretirajući umnoške duljina kao površine odgovarajućih pravokutnikâ, a mi ga danas iskazujemo ovako: U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dvaju parova nasuprotnih stranica [3]. S obzirom na to da ako je tetivni četverokut pravokutnik sa stranicama duljina $a$ i $b$ te dijagonalom duljine $c$, Ptolemejev teorem poprima oblik $c^2 = a \cdot a + b \cdot b$, tj. Pitagorin poučak je specijalni slučaj Ptolemejevog teorema [1].

## 3 Tābit ibn Kura

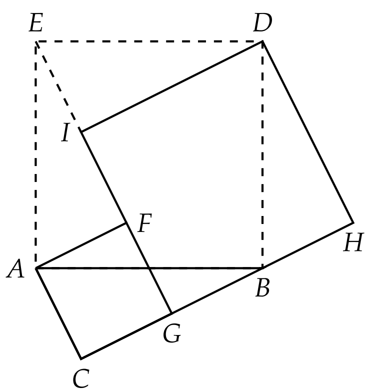
Potencijalno najzanimljiviji pojedinac u povijesti matematike (osim Pitagore, naravno) vezan za našu temu je jedan od najvećih matematičara i općenito znanstvenika tzv. zlatnog doba arapske matematike: **Tābit ibn Kura** (826./836.–901.). Tābit je najpoznatiji po svojim doprinosima teoriji prijateljskih brojeva (o kojima više u sljedećem broju). Rođen je u mezopotamskom gradu Harranu (slike 2) u današnjoj Turskoj (blizu granice sa Sirijom), gradu u kojem je postojalo prvo sveučilište (osnovano 717., aktivno do 12. stoljeća) i koji je u Tābitovo doba uz Bagdad bio najznačajniji znanstveni centar ne samo arapskog kalifata. Tābit je dao čak tri nova dokaza Pitagorinog poučka [10, 11].

[1] Ako je Euklidov dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi *Elemenata* (kao 4. propozicija), to je lako moguće.

[2] To je Euklid dokazao u 41. propoziciji I. knjige *Elemenata*.

Slika 2. Tābitov rodni Harran danas (slike ©FMB2022)

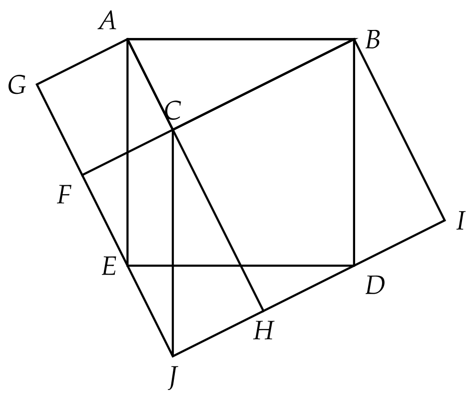
Prvi od Tābitovih dokaza Pitagorinog poučka spada u grupu tzv. disekcijskih dokaza u kojima se geometrijski likovi razrezuju i preslaguju. Ovaj dokaz nađen je u jednom rukopisu koji se čuva u knjižnici Aje Sofije u İstanbulu i koji sadrži više Tābitovih tekstova, a nalazi se i pripisan Tābitu u komentarima Euklidovih *Elemenata* koje je napisao Tābitov suvremenik Al-Nairizi, te se može s visokom pouzdanošću reći da je sigurno Tābitov [10].




Slika 3. Tābitov „disekcijski“ dokaz Pitagorinog poučka

Za dani pravokutni trokut $ABC$ prvo se konstruira kvadrat $ACGF$ (slika 3). Na pravcu $BC$ odredi se točka $H$ takva da je $|GH| = |BC|$. Nad $\overline{GH}$ se također konstruira kvadrat $GHDE$. Dužina $\overline{FI}$ se produlji do točke $E$ takve da je $|GI| = |FE|$. Sad se još $E$ spoji s $A$ i $D$ te $D$ s $B$, čime je dijagram sa slike 3 gotov. Na njemu uočavamo četiri trokuta: $\triangle ABC$, $\triangle BDH$, $\triangle DEI$ i $\triangle AEF$. Za njih po konstrukciji vrijedi $|AC| = |BH| = |EI| = |AF|$ i $|BC| = |DH| = |ID| = |EF|$. Također, po konstrukciji su sva četiri kuta $\angle ACB$, $\angle BHD$, $\angle EID$ i $\angle AFE$ prava. Po SKS-teoremu o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti $\triangle ABC$, $\triangle BDH$, $\triangle DEI$ i $\triangle AEF$ sukladni pravokutni trokuti, iz čega slijedi da je $ABDE$ kvadrat. Ako na dijagramu 3 izrežemo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle BDH$, možemo ih poklopiti s trokutima $\triangle DEI$ i $\triangle AEF$, dakle je površina oba kvadrata nad katetama (crtani punom linijom) jednaka površini kvadrata nad hipotenuzom (nacrtan crtkano), odnosno vrijedi Pitagorin poučak.

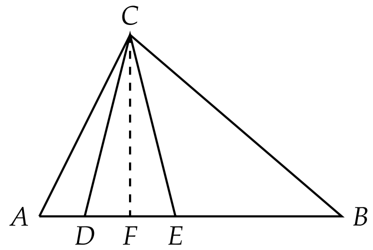
Drugi Tābitu pripisani dokaz Pitagorinog poučka temelji se na dijagramu sa slike 4.




Slika 4. Drugi Tābitov dokaz Pitagorinog poučka

Nad stranicama pravokutnog trokuta $ABC$ nacrtani su kvadrati $ACFG$, $BCHI$ i $ABDE$. Pravci $FG$ i $HI$ sijeku se u točki $J$. Pravokutni trokuti $\triangle CJF$ i $\triangle JCH$ su očito sukladni. No, njihove katete su očigledno jednako duge kao i kod polaznog trokuta $\triangle ABC$ kao i $\triangle EDJ$, pa su i oni njima sukladni. Naposljetku uočimo da su iz istog razloga tim četirima trokutima sukladni i $\triangle DBI$ te $\triangle AEG$. Pogledajmo sad cjelokupni peterokut $ABIJG$. Njegova površina je s jedne strane jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama trokuta $ABC$ te površina triju sukladnih trokuta ($\triangle ABC$, $\triangle CJF$ i $\triangle JCH$), a s druge strane površini kvadrata nad hipotenuzom trokuta $ABC$ te zbroju površina drugih triju (prethodnim trima) sukladnih trokuta ($\triangle DBI$, $\triangle EDJ$ i $\triangle AEG$). Stoga je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom, tj. vrijedi Pitagorin poučak [10].

Treći Tābitov dokaz vezan je za njegov rad na generalizaciji Pitagorinog poučka na opće trokute koju opisuje u jednom pismu prijatelju [11, 10]. Tābit tu daje dijagram kao na slici 5: Neka je dan proizvoljni $\triangle ABC$. Na stranici (pravcu) $AB$ odrede se točke $D$ i $E$ takve da je $\angle ACB = \angle CDE = \angle CED$.




Slika 5. Tābitova generalizacija Pitagorinog poučka

Zatim Tābit bez dokaza kaže: Zbroj kvadrata nad stranicama $AC$ i $BC$ jednak je pravokutniku sa stranicama $AB$ i $AE + DB$. Tu naravno, u starogrčkoj tradiciji, Tābit poistovjećuje stranice s njihovim duljinama, a likove s njihovim površinama. Iako nije naveo dokaz svoje tvrdnje, Tābit kaže da se dokaz može lako dobiti iz Euklidovih *Elemenata* te analizira razne specijalne slučajeve, uključivo slučaj kad je $\angle ACB$ pravi kut pa ovaj teorem poprima oblik Pitagorinog poučka. S obzirom na referencu na *Elemente* i činjenicu da je ondje Euklid kao propozicije 12 i 13 u II. knjizi dao rezultate koje danas interpretiramo kao kosinusov poučak za tupokutne i šiljastokutne trokute i iz kojih se može izvesti Tābitova generalizacija, vjerojatno je da je Tābit mislio upravo na korištenje tih propozicija. Moderni autori [9, 10, 11] rekonstruirali su takav dokaz kako slijedi (pri tom koristimo modernu notaciju). Označimo: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $\gamma = \angle ACB = \angle CDE = \angle DEC$. Neka je $\overline{CE}$ visina našeg trokuta. Želimo dokazati da vrijedi

$$a^2 + b^2 = c \cdot (|AE| + |DB|).$$

Euklidove spomenute propozicije u modernoj notaciji imaju oblik $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a\,|AE|$ ($+$ ako je $\gamma$ tup, a $-$ ako je $\gamma$ šiljast). Pritom je $|AE| = \mp b \cos\gamma$, ako koristimo modernu trigonometriju, pa Euklidove propozicije danas imaju oblik $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Stoga je

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma = c^2 + ab(\cos\angle CDE + \cos\angle CED) =$$

$$= c^2 + ab\left(\frac{|DF|}{|CD|} + \frac{|EF|}{|CE|}\right) = c^2 + 2ab\frac{|DF|}{|CE|}, \tag{1}$$

gdje posljednja jednakost vrijedi jer je $\triangle DEC$ jednakokračan. Po KK-poučku, $\triangle ABC$ i $\triangle ACE$ su slični pa je

$$|CE| : a = b : c,$$

što možemo uvrstiti u formulu 1 i tako dobijemo

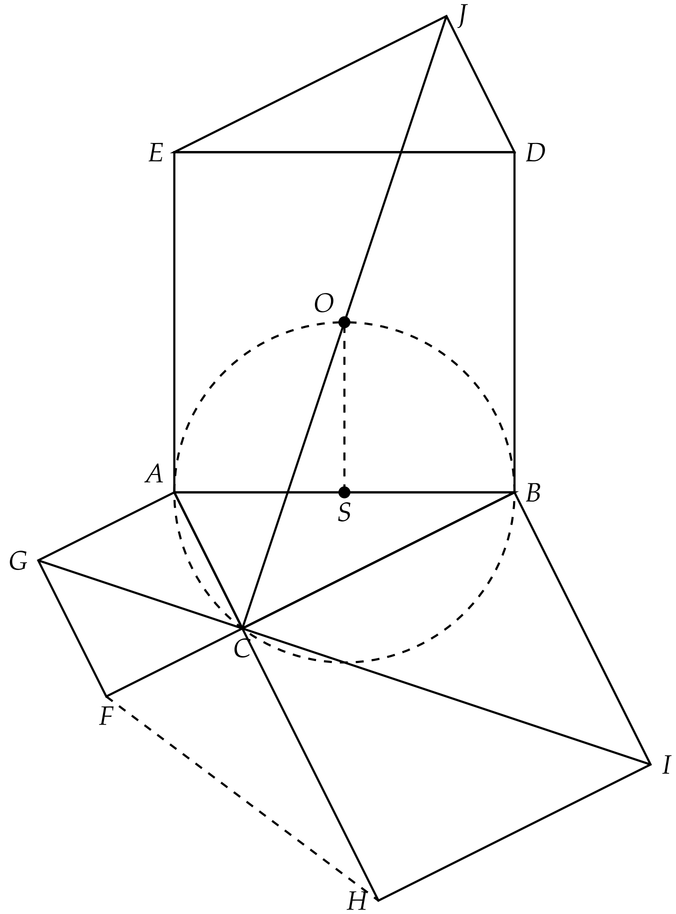
$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\frac{c|DF|}{ab} = c\left(c + 2|DF|\right) =$$

$$= c\left(\left(|AF| + |FB|\right) + \left(|DF| + |FE|\right)\right) = c(|AE| + |DB|),$$

što je i trebalo dokazati. Naravno, ako je $\gamma$ pravi kut, onda je $|AE| + |DB| = c$, pa imamo Pitagorin poučak.

# 4 Leonardo, Garfield i Einstein

Jedan poznati dokaz Pitagorinog poučka koristi dijagram na slici 6: Nad stranicama pravokutnog trokuta $ABC$ konstruirani su kvadrati $ACFG$, $BCHI$ i $ABDE$. Dodatno, nad dužinom $\overline{ED}$ konstruiran je pravokutni trokut $EDJ$ sukladan trokutu $ABC$, ali njemu centralno simetričan s obzirom na središte $O$ kvadrata $ABDE$. Budući da je $\triangle ABC$ pravokutan, $O$ leži na njemu opisanoj kružnici (isprekidano označena na slici 6). Njeno središte $S$ je polovište hipotenuze $\overline{AB}$ pa je $\angle ACO$ obodni kut kojem odgovara središnji pravi kut $\angle ASO$, iz čega slijedi da je $\angle ACO = 45°$. Zbog centralne simetrije je i $\angle DJO = 45°$ pa slijedi da su četverokuti $ACJE$ i $DJCB$ sukladni. Očito su i četverokuti $AGIB$ i $FGIH$ međusobno sukladni, no oni su sukladni i četverokutima $ACJE$ i $DJCB$ jer s njima imaju jednako duge stranice, dijagonalu i kut $45°$ dijagonale prema stranicama. Posljedično je zbroj površina četverokuta $ACJE$ i $DJCB$ jednak zbroju površina četverokuta $AGIB$ i $FGIH$. Svaki od tih dvaju zbrojeva sadrži po dvije površine pravokutnog trokuta $ABC$ te ako njih oduzmemo iz zbrojeva, od prvog zbroja preostaje površina kvadrata $ABDE$, a od druge zbroj površina kvadrata $ACFG$ i $BCHI$, dakle je dokazan Pitagorin poučak.




Slika 6. „Leonardov“ dokaz Pitagorinog poučka

Ovaj dokaz mnogi izvori pripisuju znamenitom renesansnom umjetniku, znanstveniku i inženjeru **Leonardu da Vinciju** (1452.–1519.). Ipak, to nipošto nije sigurno. Štoviše, čini se da je tradicija navođenja Leonarda kao autora ovog dokaza počela tek 1906. godine, kad je dokaz kao Leonardov spomenuo njemački učitelj i povjesničar matematike Maximilian Simon (1844.–1918.). Prema [7], čini se da je prvi put ovaj dokaz 1772. zapisao njemački fizičar **Johann Tobias Mayer** (1752.–1830.), poznat kao sin znamenitog astronoma Tobiasa Mayera (posebno poznat po proučavanju Mjeseca) te po svojim udžbenicima matematike i prirodnih znanosti.

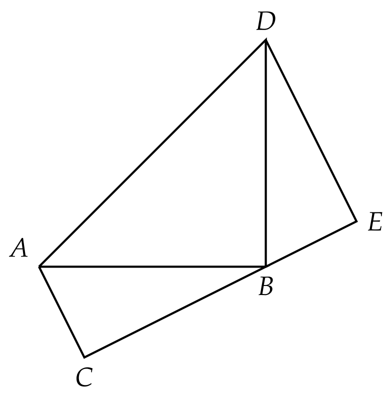
Iako od političara uglavnom ne očekujemo znatnije „umne“, ponajmanje matematičke, doprinose, povijest nam nudi i nekoliko iznimki. Među njima je za našu temu bitan dvadeseti predsjednik SAD-a, **James Abram Garfield** (1831.–1881.). On je 1876., kad je bio član Kongresa SAD, otkrio vlastiti, novi dokaz Pitagorinog poučka i objavio ga u časopisu *New-England Journal of Education* [6]. Njegov dokaz je posebno jednostavan i elegantan: Nad hipotenuzom pravokutnog trokuta $ABC$ nacrta de pola kvadrata, tj. jednakokračni pravokutni trokut $ABC$ (slika 7). Dodatno se ucrta visina $\overline{DE}$ na stranicu (pravac) $BC$. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BED$ su sad sukladni. Uočimo trapez $CEDA$. Njegova površina je s jedne strane jednaka

$$|CE| \cdot \frac{|AC| + |DE|}{2} = \frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}a^2 + a\,b + \frac{1}{2}b^2,$$

uz $a = |BC| = |DE|$ i $b = |AC| = |DE|$. S druge strane, ista ta površina jednaka je zbroju površina tri trokuta, koja je jednaka

$$2 \cdot \frac{a\,b}{2} + \frac{c^2}{2} = a\,b + \frac{1}{2}c^2,$$

uz $c = |AB|$. Stoga je $a\,b + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 + a\,b + \frac{1}{2}b^2$, odnosno $c^2 = a^2 + b^2$.




Slika 7. Garfieldov dokaz Pitagorinog poučka

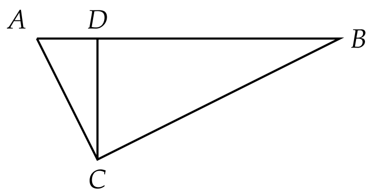
Za kraj ovog malog pregleda povijesnih dokaza Pitagorinog poučka odabrali smo dokaz **Alberta Einsteina** (1879.–1955.). On je 1949. objavio esej u kojem je opisao da je kao dječak „uz puno truda“ dokazao Pitagorin poučak „koristeći sličnost trokuta“. Nažalost, nije ostavio zapis svog dokaza, no biografi se većinom slažu da je mali Einstein samostalno otkrio jedan od standardnijih dokaza Pitagorinog poučka (kako smo rekli ranije, moguće je da je sadržajno isti bio čak i izvorni pitagorejski dokaz): U pravokutnom trokutu $ABC$ povuče se visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu (slika 8). Očito je sad površina $\triangle ABC$ jednaka zbroju površina $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$:

$$P(\triangle ACD) + P(\triangle BCD) = P(\triangle ABC). \tag{2}$$

Također, zbog jednakosti kutova, ta tri (pravokutna) trokuta su međusobno slična. Zbog toga je omjer površine svakog od tra tri trokuta prema površini kvadrata nad njegovom hipotenuzom isti:

$$P(\triangle ACD) : |AC|^2 = P(\triangle BCD) : |BC|^2 = P(\triangle ABC) : |AB|^2. \tag{3}$$

Kombinacija formula, tj. činjenica, 2 i 3 rezultira Pitagorinim poučkom.




Slika 8. „Einsteinov" dokaz Pitagorinog poučka

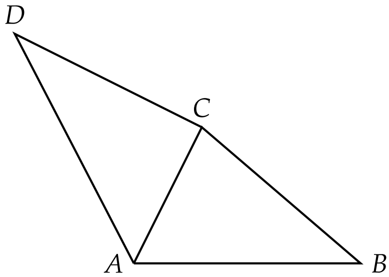
# 5 Zaključak

Kao što dobro znamo, ne samo da je Pitagorin poučak jedan od temeljnih teorema euklidske geometrije, nego vrijedi i njegov obrat: Ako je zbroj kvadrata kraćih stranica jednak kvadratu najdulje stranice, trokut je pravokutan. Da obrat vrijedi, znao je najkasnije Euklid.

U *Elementima* se kao 48. propozicija I. knjige nalazi sljedeći dokaz obrata [5]: Neka je u trokutu $ABC$ kvadrat nad stranicom $\overline{AB}$ jednak zbroju kvadrata nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.[3] Tvrdimo da je kut $\angle ACB$ pravi. Neka je $CD$ okomica na $AC$, pri čemu je $|CD| = |CB|$, vidi sliku 9. Spojimo $D$ i $A$. Budući da je $|CD| = |CB|$, kvadrat nad $\overline{CD}$ jednak je kvadratu nad $\overline{BC}$. Dodamo li tim kvadratima, svakom zasebno, kvadrat nad $\overline{AC}$, dobit ćemo jednake zbrojeve kvadrata. Budući da je $\triangle ADC$ pravokutan, kvadrat nad $\overline{AD}$ jednak je tim zbrojevima, a takav je po pretpostavci i kvadrat nad $\overline{AB}$.

[3] Podsjećamo da se kao i ranije, odnosno općenito u starogrčkoj geometrijskoj algebri, ovdje kvadrati poistovjećuju s njihovim površinama.

Dakle, kvadrati nad $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ su jednaki, pa su i te stranice jednake (jednako duge). S druge strane, u trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ stranica $\overline{AC}$ je zajednička, a stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ su iste duljine. Po SSS-poučku[4] slijedi da su $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ sukladni pa je $\angle ACB = \angle ACD$, što je pravi kut, dakle je $\triangle ABC$ pravokutan.




Slika 9. Euklidov dokaz obrata Pitagorinog poučka

Stigosmo tako do kraja ovog izleta u bogatu povijest Pitagorinog poučka. Naravno, izostavili smo većinu od danas poznatih navodno 371 dokaza [8], ali 118 od njih možete lako naći na stranici [1]. Moglo bi se tu još pričati i o mnogo toga drugoga, primjerice o povijesti pitagorejskih trojki koja seže u doba Egipta i Babilona, a koje su sustavni proučili i opisali pitagorejci i Euklid. Pitagorejske trojke su pak tipična tema teorije brojeva, s kojom ćemo se susresti u sljedećem broju, kad ćemo više reći o prijateljskim brojevima, čijoj ranoj povijesti su najviše doprinijeli glavni protagonisti ovog članka, pitagorejci i Tabit ibn Kura.

## Literatura

[1] A. Bogomolny, *Cut the Knot: Pythagorean Theorem*. `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/` (posjećeno 30. studenoga 2022.)

[2] F. M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*. Springer Spektrum, 2017.

[3] F. M. Brückler, *Skripta iz Povijesti matematike*. PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, `https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/povmat_a` (pristupljeno 2. prosinca 2022.)

[4] Dotični poučak je dokazan kao 8. propozicija u *Elementima*.

[4] F. M. Brückler, *Điudžang suanšu — Devet poglavlja umijeća računanja*. Osječki matematički list 22 (2022) 91–105

[5] D. E. Joyce, *Euclid's Elements*. , pristupljeno 14. 12. 2021.

[6] S. E. Kolpas, *Mathematical Treasure: James A. Garfield's Proof of the Pythagorean Theorem*. Convergence (2016), `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-james-a-garfields-proof-of-the-pythagorean-theorem` (pristupljeno 1. prosinca 2022.)

[7] F. Lemmermeyer, *Leonardo da Vincis Proof of the Pythagorean Theorem*. The College Mathematics Journal, 47 (2016) 361–364

[8] B. Ratner, *Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it* 1000 *years before him*. Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing 17 (2009) 229-242

[9] A. Sayili, *Thâbit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem*. Isis 51 (1960) 35–37

[10] R. Schloming, *Thabit ibn Qurra and the Pythagorean Theorem*. The Mathematics Teacher 63 (1970) 519–528

[11] K. H. Strick, *Thabit ibn Qurra* (836–901). `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/thabit.pdf` (pristupljeno 2. prosinca 2022.)

[12] S. Strogatz, *Einstein's First Proof*. The New Yorker (19. 11. 2015.), `https://www.newyorker.com/tech/annals-of-technology/einsteins-first-proof-pythagorean-theorem` (pristupljeno 1. prosinca 2022.)

[13] H. Wußing, 6000 *Jahre Mathematik*. Springer, 2008.