

MATEMATIČKI MODEL VERTIKALNIH POMAKA KRČKOG MOSTA

Miljenko LAPAINE, Zdravko KAPOVIĆ — Zagreb*

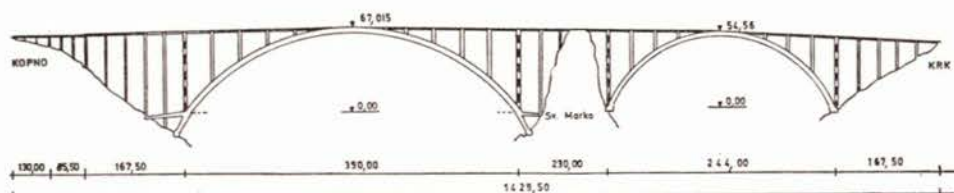
SAZETAK. Na temelju dugogodišnjih mjerenja pomaka i deformacija građevina moguće je zaključiti o znatnim utjecajima temperature na veličinu pomaka. U ovome se radu definira matematički model vertikalnih pomaka Krčkog mosta kao posljedica utjecaja temperature.

1. UVOD

Geodetska mjerenja deformacija u širem smislu uključuju sva mjerenja za određivanje promjena oblika objekta ili tla pod utjecajem vanjskih ili unutarnjih sila. Objekt ispitivanja idealizira se određenim brojem točaka koje se oslanjaju na geodetsku kontrolnu mrežu izvan područja mogućih deformacija (Pelzer 1985, Welsch 1987, Bilajbegović 1985). Može se pretpostaviti da se točke na objektu pomiču, a da su točke osnovne mreže nepomične (Janjčević 1980, Milev 1978, Boljšakov i Levčuk 1980).

U geodeziji se, za sve radove gdje se traži visoka točnost, obavljaju višestruka mjerenja jedne te iste veličine. Duljine se mjere barem obostrano, kutovi u više girusa (ponavljanja), a niveliranje se obavlja u dva smjera. Uzimajući sredine iz višestrukih mjerenja, povećava se točnost rezultata.

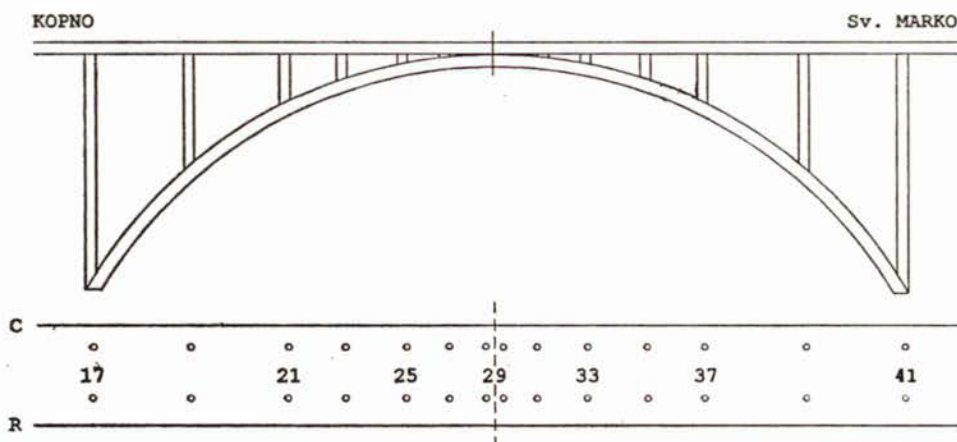
Krčki most koji spaja kopno s otokom Krkom čine dva armiranobetonska luka (sl. 1). Prvi, raspona 390 metara, najveći je armiranobetonski luk na svijetu, a manji (244 metra) također spada u sam svjetski vrh. Analizirajmo samo veliki luk.



Slika 1. Shematski prikaz Krčkog mosta

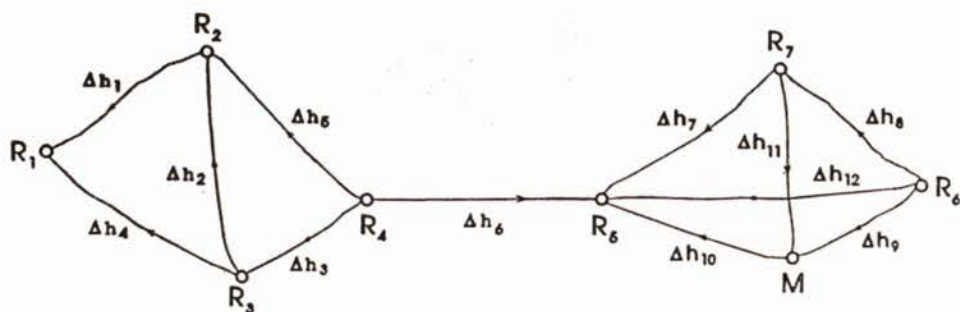
* Mr. Miljenko Lapaine, dr. Zdravko Kapović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.

Mrežu točaka na mostu čine dva reda mjernih mjesta po rubnjacima kolovozne konstrukcije (C i R — strane prema Crikvenici i Rijeci, sl. 2).



Slika 2. Veliki luk Krčkog mosta s raspodjelom mjernih mjesta

Osnovnu nivelmansku mrežu velikog luka čini osam repera: četiri na kopnu i četiri na otočiću Sv. Marko (slika 3).



Slika 3. Osnovna nivelmanska mreža velikog luka

Niveliranje od repera osnovne mreže na kopnu do repera na Sv. Marku, a u cilju određivanja visinskih razlika (visina) točaka po rubnjacima kolovozne konstrukcije, traje oko dva sata. Kako pravila za precizni nivelman nalažu, isti postupak niveliranja treba ponoviti, ali sada u drugom smjeru (znači ukupno trajanje niveliranja iznosi oko 4 sata).

Dugogodišnjim periodijskim mjerenjima utvrđena je vrlo visoka korelacija između vertikalnih pomaka i temperature (Kapović 1993), pa ukoliko za vrijeme niveliranja dođe do promjene temperature, doći će i do izdizanja ili spuštanja luka odnosno kolovozne konstrukcije. U tom slučaju može se reći da se ne radi o *višestrukom mjerenju iste veličine*.

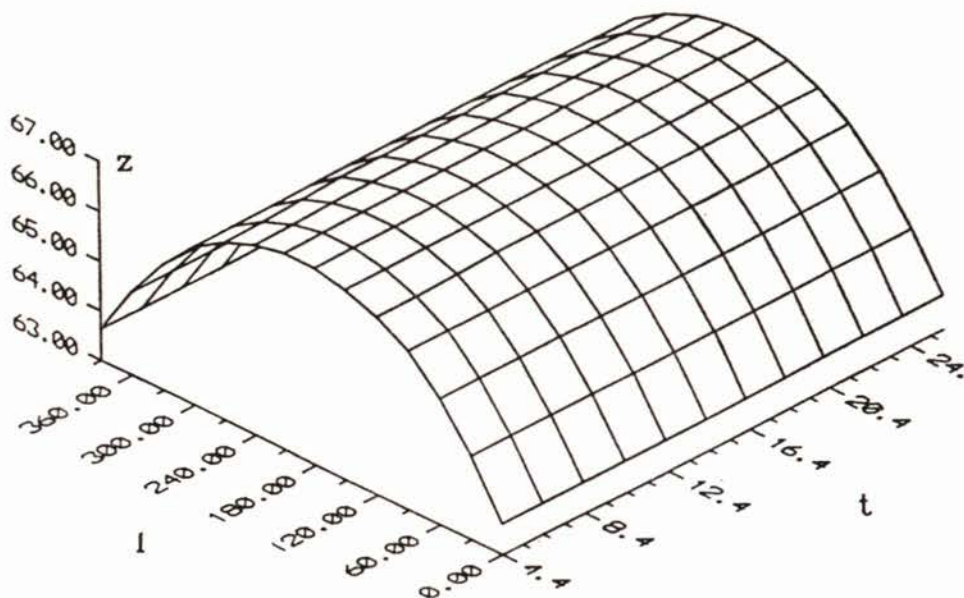
Što nam je činiti? Postoje dvije mogućnosti:

- mjeriti brzo i točno odnosno skratiti vrijeme niveliranja (kako bi utjecaj temperature bio neznatan) ili
- poznavati veličine pomaka uslijed temperaturnih utjecaja kako bi ih se moglo ukloniti iz rezultata mjerenja.

Budući da brzina i točnost teško idu zajedno, priklonili smo se drugoj spomenutoj mogućnosti — poznavati utjecaj temperature na veličinu pomaka.

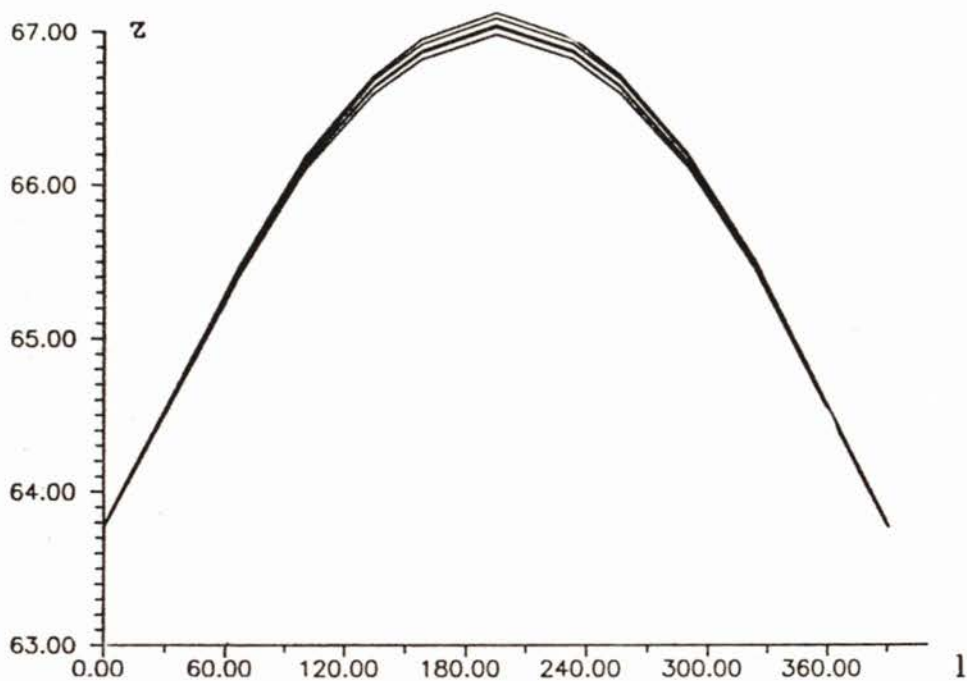
Razmotrit ćemo samo mjerenja na jednoj strani (strana R) velikog luka. Raspoložemo s 12 serija mjerenja izvršenih u razdoblju od rujna 1990. do rujna 1991. pri različitim temperaturama konstrukcije. Temperatura konstrukcije mjerena je digitalnim termometrom sa senzorima postavljenim u tjemenu velikog luka. Rasponi temperature konstrukcije kreću se od 4.4°C do 26.0°C. U svakoj seriji određivane su visine za 14 točaka odnosno na stacionažama 0, 33.5, 67.0, 100.5, 134.0, 157.5, 194.0, 196.0, 232.5, 256.0, 289.5, 323.0, 356.5 i 390.0 metara. Ukupno imamo $12 \times 14 = 168$ mjerenja.

Sva ova mjerenja moguće je prikazati grafički u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu l, t, z , gdje smo s l označili duljinu (stacionažu), s t temperaturu konstrukcije i sa z visinu točke na mostu (slika 4).

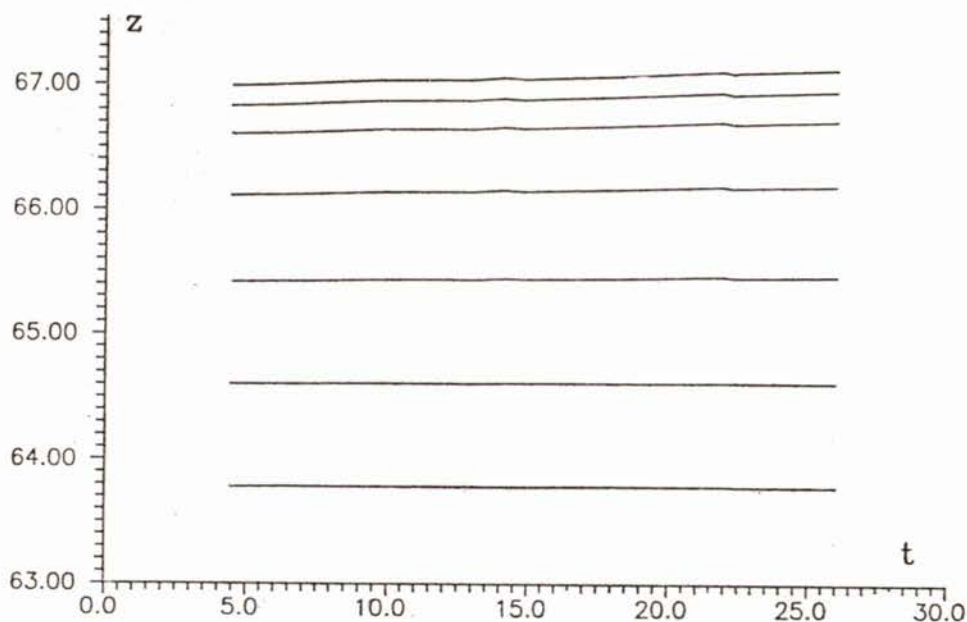


Slika 4. Trodimenzionalni model velikog luka Krčkog mosta

Poprečni presjeci tog trodimenzionalnog modela prikazani su za $t=4.4^\circ$, 9.5° , 14.8° , 22.3° , i 26.0°C na slici 5, a uzdužni presjeci za $l=0, 33.5, 67.0, 100.5, 134.0, 157.5$ i 194 m na slici 6.



Slika 5. Ovisnost visine z velikog luka o stacionaži l za različite vrijednosti temperature



Slika 6. Ovisnost visine z velikog luka o temperaturi t za različite vrijednosti stacionaže

2. DEFINIRANJE MATEMATIČKOG MODELA POMAKA

Zadatak je odrediti funkcionalnu vezu oblika

$$z = z(l, t) \quad (1)$$

kojom bi se za zadanu stacionažu i temperaturu mogla izračunati visina točke. S obzirom na slike 1–3, pretpostavit ćemo da je funkcija oblika

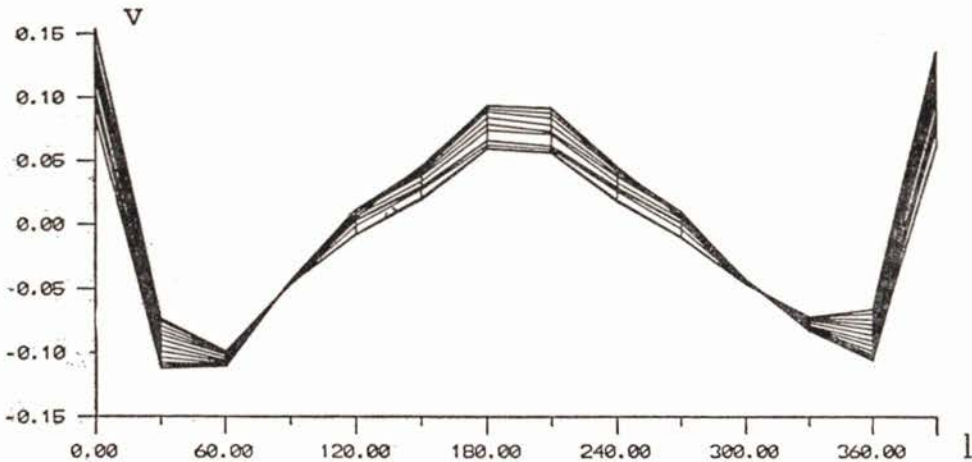
$$z = a_{00} + a_{10}t + a_{01}l + a_{11}tl + a_{20}t^2 + a_{02}l^2, \quad (2)$$

tj. polinom drugog stupnja od dvije varijable t i l . Primjenom metode najmanjih kvadrata tražimo prilagodbu mjerenih podataka modelu (2). Pri tome pretpostavljamo da su mjerenja nekorelirana i međusobno jednake točnosti. Kao rezultat dobivamo koeficijente polinoma (tablica 1) i prilagođene vrijednosti (Kapović 1993).

Tablica 1. Koeficijenti polinoma drugog stupnja

a_{00}	= 63.60622164237387
a_{10}	= 0.0036208248400751
a_{01}	= 0.033994850336465
a_{11}	= 0.000000856150700
a_{20}	= -0.000008292599249
a_{02}	= -0.000087141917605

Prosječno odstupanje nakon prilagođivanja polinoma drugog stupnja od dvije varijable iznosi 0.065 m, a srednje kvadratno odstupanje 0.075 m. Ova odstupanja prikazana su i grafički na slici 7.



Slika 7. Grafički prikaz odstupanja od polinoma 2. stupnja

Grafički prikaz upućuje na zaključak da odstupanja nisu slučajna, već da je preostao sistematski dio koji nije obuhvaćen formulom (2). Radi toga proširujemo izraz (2) do polinoma četvrtog stupnja od dvije varijable:

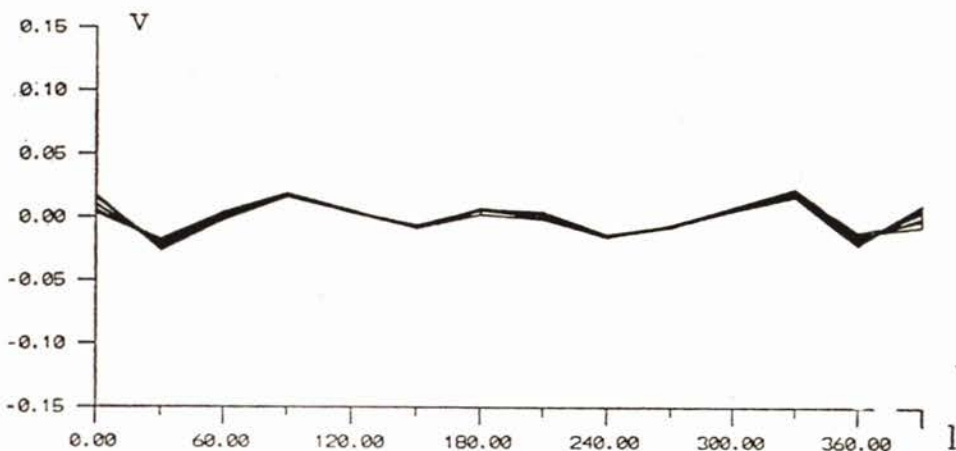
$$z = a_{00} + a_{10} t + a_{01} l + a_{11} t l + a_{20} t^2 + a_{02} l^2 + a_{21} t^2 l + a_{12} t l^2 + a_{30} t^3 + a_{03} l^3 + a_{31} t^3 l + a_{22} t^2 l^2 + a_{13} t l^3 + a_{40} t^4 + a_{04} l^4. \quad (3)$$

Primjenom metode najmanjih kvadrata tražimo prilagodbu mjerenih podataka modelu (3). Kao rezultat dobivamo nove koeficijente polinoma (tablica 2) i nove prilagođene vrijednosti (Kapović 1993).

Tablica 2. Koeficijenti polinoma četvrtg stupnja

$a_{00} =$	63.73926619426427	$a_{12} =$	-0.000000138852606
$a_{10} =$	0.012637787868139	$a_{30} =$	0.000062581475581
$a_{01} =$	0.024669389537546	$a_{03} =$	-0.000000413335203
$a_{11} =$	0.000057965861120	$a_{31} =$	-0.000000000553536
$a_{20} =$	-0.001428185886160	$a_{22} =$	-0.000000000093721
$a_{02} =$	0.000017854979941	$a_{13} =$	-0.000000000038996
$a_{21} =$	0.000000133465508	$a_{40} =$	-0.000000963746342
		$a_{04} =$	0.000000000526442

Prosječno odstupanje nakon prilagođivanja polinoma četvrtog stupnja od dvije varijable iznosi 0.011 m, a srednje kvadratno odstupanje 0.013 m. Ova odstupanja također su prikazana i grafički na slici 8. Prikaz nas upućuje na zaključak da preostala odstupanja, iako relativno mala, nisu slučajnog karaktera.



Slika 8. Prikaz odstupanja od polinoma 4. stupnja

Rezultati prilagođivanja mogu se i dalje poboljšavati povećanjem stupnja polinoma. No pitanje je koliko to ima smisla.

Zbog toga ćemo se radije vratiti na prirodu problema o kojemu je riječ, te ustanoviti da je raspon od 390 m, koji promatramo, projektiran od tri dijela: krajevi su pravolinijski (uspon, pad 2.7%), dok je srednji dio vertikalno zaobljen s radijusom od 5000 m. Točnije, točke sa stacionažama 0, 33.5,

356.5 i 390 metara leže na pravcima, a preostalih 10 su na krivulji. Sada imamo logično opravdanje za veća odstupanja (vidi sliku 7) na početnim i krajnjim točkama. Naime, radilo se o prilagođivanju zakrivljene plohe na točke koje leže (gotovo) u ravnini. S druge strane, kao što se to dobro vidi sa slika 5 i 6, na rubovima promatranog intervala se ionako ništa posebno ne događa. Uočljive i najveće promjene događaju se u srednjem dijelu mosta.

Iz prethodnih razmatranja proizlazi ideja da ćemo se pretpostavljenim matematičkim modelom približiti stvarnosti ako se mjerenja na prve dvije i posljednje dvije točke izostave iz postupka prilagođivanja. Kao rezultat za 120 mjerenja dobivamo nove koeficijente polinoma (tablica 3) i nove prilagođene vrijednosti (Kapović 1993).

Tablica 3. Koeficijenti polinoma četvrtog stupnja

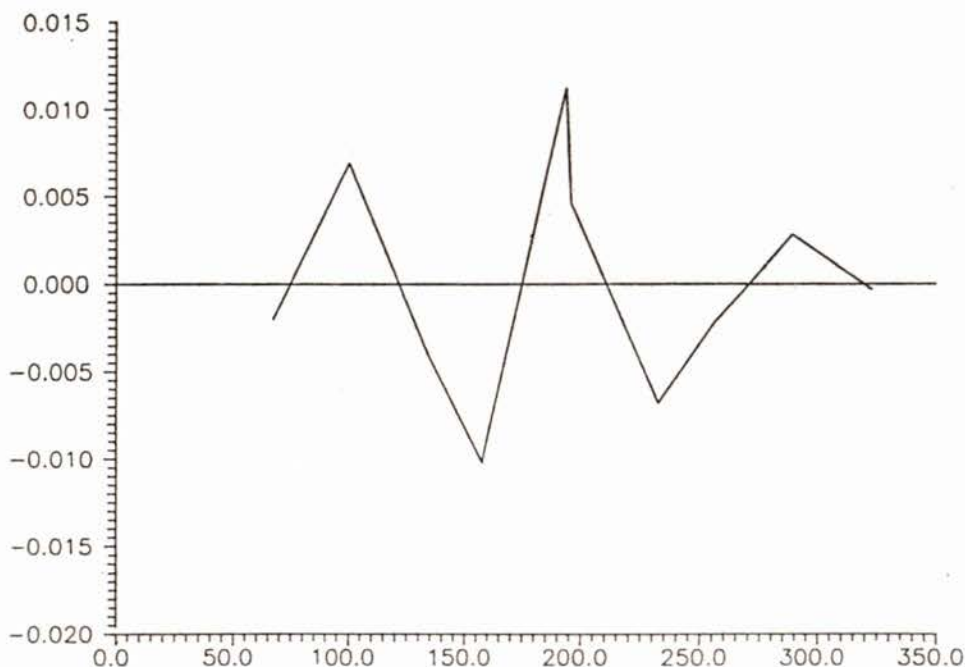
$a_{00} =$	63.67746351958866	$a_{12} =$	0.000000161912685
$a_{10} =$	0.014663667943919	$a_{30} =$	0.000077603137254
$a_{01} =$	0.026530695561448	$a_{03} =$	-0.000000360424790
$a_{11} =$	0.000073997042864	$a_{31} =$	0.000000000454743
$a_{20} =$	-0.001805293902351	$a_{22} =$	-0.000000000990303
$a_{02} =$	0.000000949510140	$a_{13} =$	-0.000000000066938
$a_{21} =$	0.000000237830372	$a_{40} =$	-0.000001186029351
		$a_{04} =$	0.000000000476602

Prosječno odstupanje po apsolutnoj vrijednosti nakon provedenog prilagođivanja iznosi sada 0.007 m, a srednje kvadratno odstupanje 0.008 m. Time smo dobili jedan globalni model koji dosta dobro opisuje ponašanje mosta pod utjecajem temperature.

Pogledamo li odstupanja u rezultatima prilagođivanja, možemo uočiti da se ona ne ponašaju kao slučajne veličine, već da se za svaku pojedinu stacionažu (mjerno mjesto) grupiraju oko neke srednje vrijednosti i to gotovo potpuno neovisno o temperaturi. Te srednje vrijednosti prikazane su u tablici 4 i grafički na slici 9. Vidi se da među njima ne postoji neka jednostavna funkcionalna veza. Možemo pretpostaviti da te srednje vrijednosti predstavljaju odstupanja pojedinih repera od zamišljene teorijske krivulje koja geometrijski opisuje srednji dio mosta.

Tablica 4. Srednje vrijednosti odstupanja od polinoma četvrtog stupnja na pojedinim stacionažama

l m	sred. odst. m
67.0	-0.0020
100.5	0.0069
134.0	-0.0040
157.5	-0.0102
194.0	0.0112
196.0	0.0046
232.5	-0.0068
256.0	-0.0022
289.5	0.0028
323.0	-0.0003



Slika 9. Grafički prikaz srednjih vrijednosti odstupanja na pojedinim stacionažama

Eliminiramo li i uočena srednja odstupanja na pojedinim reperima iz rezultata mjerenja, preostaju konačna odstupanja koja unutar pojedine serije mjerenja variraju u opsegu od približno 3 mm. Ova numerička vrijednost predstavlja preciznost ili unutrašnju točnost provedenih opažanja. Sada preostala odstupanja po apsolutnoj vrijednosti imaju srednju vrijednost 0.005 m, dok je srednje kvadratno odstupanje 0.006 m.

3. ZAKLJUČAK

U ovome radu je opisano izvođenje jednog globalnog modela koji dobro opisuje ponašanje velikog luka Krčkog mosta pod utjecajem temperature.

Ako se iz veličina izmjerenih pomaka eliminiraju pomaci nastali uslijed djelovanja temperature, dobiju se veličine progiba koje bi trebalo pripisati reološkim utjecaja, tj. skupljanju i puzanju betona (Kapović 1993). Sigurno je da ovakav pristup razmatranoj problematici daje novu kvalitetu geodetskim mjerenjima, a iskustva s ovog objekta mogu poslužiti sagledavanju temperaturnih utjecaja na sličnim mosnim konstrukcijama.

LITERATURA

- Bilajbegović A., Feil L., Klak S. (1985): Deformacijska analiza, Zbornik radova: Geodezija u hidrogradnji, hidrografiji i hidrologiji, Split, 383—393.
 Boljšakov V. D., Levčuk G. P. (1980): Spravočnoe rukovodstvo po inženerno-geodezičeskim rabotama, Moskva.

- Janković M. (1980): Inženjerska geodezija III, Zagreb.
- Kapović Z. (1993): Prilog određivanju i analizi deformacija mostova s posebnim osvrtom na temperaturne utjecaje, disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
- Milev G. (1978): Suvremeni geodezički metodi za isledvane na deformacij, Sofia.
- Pelzer H. (1985): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Welsch W. (1987): Lecture Notes in Earth Sciences, Geneve.

MATHEMATICAL MODEL OF VERTICAL MOVEMENTS OF THE KRK BRIDGE

On the basis of measuring deformations of construction objects through many years, it is possible to make a conclusion about the considerable temperature influences onto the extent of movements. This paper determines the mathematical model of vertical displacements of the Krk Bridge being the result of temperature changes.

Primljeno: 1993-11-22