UDK 528.232.2
Pregledni članak

OSNOVNI GEODETSKI ZADACI UZDUŽ MERIDIJANA I UZDUŽ PARALELE NA ROTACIJSKOM ELIPSOIDU

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK. Navedeni su svi mogući osnovni geodetski zadaci uzduž meridijana i uzduž paralele, te dani algoritmi za njihovo praktično rješavanje.

1. UVOD

U geodetskoj literaturi se mogu naći neki osnovni geodetski zadaci uzduž meridijana i uzduž paralele, te klasične metode za njihovo rješavanje. U ovome radu istraženi su svi mogući takvi zadaci, te se pokazuje kako postoje tri osnovna geodetska zadatka uzduž meridijana i četiri osnovna geodetska zadatka uzduž paralele.

Osnovni zadaci uzduž meridijana rješavaju se primjenom klasičnih razvoja u redove, ali sada transformiranih u pogodniji djelotvorniji oblik.

Svi osnovni zadaci uzduž paralela mogu se riješiti egzaktno.

2. GEOGRAFSKA PARAMETRIZACIJA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA

Rotacijski elipsoid u $\mathbb{R}^3$ s poluosima a i b sa središtem u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava je skup

$$\mathscr{E} = \left\{ (X, Y, Z) : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Neka je $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $R : \Omega \to \mathscr{E}$, $R(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama:

$$X = N \cos\varphi \cos\lambda, \qquad Y = N \cos\varphi \sin\lambda, \qquad Z = \frac{b^2}{a^2} N \sin\varphi, \tag{2.2}$$

gdje je N polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu:

$$N = N(\varphi) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} \tag{2.3}$$

* Mr. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 41000 Zagreb.

geografska parametrizacija rotacijskog elipsoida $\mathscr{E}$. Za tu je parametrizaciju prva diferencijalna forma:

$$dS^2 = M^2\, d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi\, d\lambda^2, \tag{2.4}$$

gdje je M polumjer zakrivljenosti meridijana:

$$M = M(\varphi) = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3}}. \tag{2.5}$$

Iz (2.4) se može izravno zaključiti da je diferencijal duljine luka meridijana

$$ds_m = M d\varphi, \tag{2.6}$$

dok je diferencijal duljine luka paralele

$$ds_p = N\cos\varphi\, d\lambda. \tag{2.7}$$

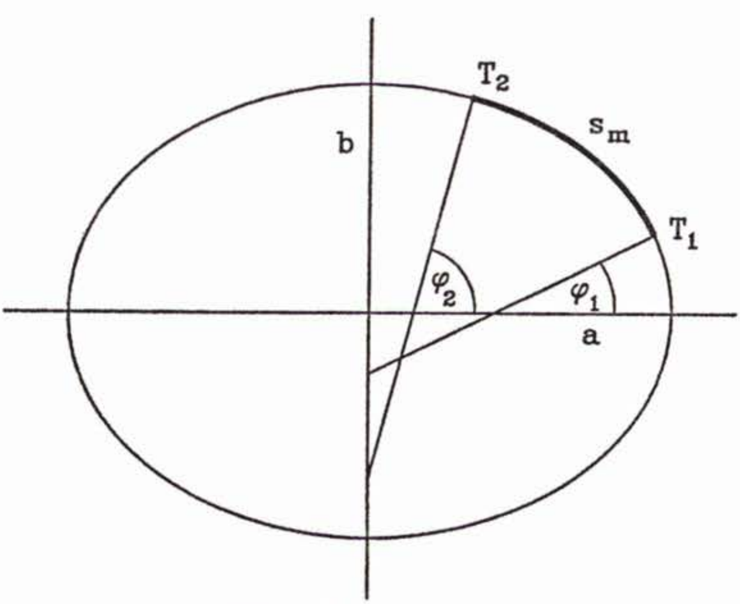
3. OSNOVNI ZADACI UZDUŽ MERIDIJANA

Uočimo na meridijanu dvije točke: T_1 s geografskom širinom φ_1 i T_2 s geografskom širinom φ_2 (slika 1). Označimo duljinu luka meridijana između točaka T_1 i T_2 sa s_m. Moguća su slijedeća tri zadatka:

1° zadano φ_1 i φ_2, traži se s_m;

2° zadano φ_1 i s_m, traži se φ_2;

3° zadano φ_2 i s_m, traži se φ_1.



Slika 1. Luk meridijana

3.1. Zadano je φ_1 i φ_2.

Integriranjem izraza (2.6) dobijemo:

$$s_m = s_m(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = s_m(\varphi_2) - s_m(\varphi_1), \tag{3.1}$$

gdje je:

$$s_m(\varphi) = \int_0^{\varphi} M d\varphi, \tag{3.2}$$

i to je duljina luka meridijana od ekvatora do točke s geografskom širinom φ. Integral (3.2) je eliptički integral koji nije moguće neposredno integrirati, nego se za njegovo izračunavanje može, na primjer, primijeniti razvoj u red. Jedan od prvih radova, u kojem se ispituje učinkovitost različitih razvoja u red, je članak Lamberta (1772) »Rektifikacija eliptičkog luka s pomoću beskonačnih redova«. Kasnije su se tim problemom bavili mnogi znanstvenici, a mi ćemo izabrati slijedeći razvoj prema Helmertu (1880), Krügeru (1912), te Königu i Weiseu (1951):

$$s_m(\varphi) = A(\varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + b_{10} \sin 10\varphi + \ldots), \tag{3.3}$$

gdje je konstanta A polumjer rektificirajuće sfere, tj. sfere čiji su meridijani jednake duljine kao meridijani na elipsoidu (Helmert 1880):

$$A = a(1 - n)(1 - n^2)\left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \ldots\right). \tag{3.4}$$

U izrazu (3.4) n je treća spljoštenost koja se definira s pomoću poluosi a i b rotacijskog elipsoida na poznati način:

$$n = \frac{a - b}{a + b}. \tag{3.5}$$

Konstante b_i dane su izrazima (König i Weise 1951):

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{3}{2}n + \frac{9}{16}n^3 - \frac{3}{32}n^5 + \ldots \\
b_4 &= \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{32}n^4 + \ldots \\
b_6 &= -\frac{35}{48}n^3 + \frac{105}{256}n^5 + \ldots \\
b_8 &= \frac{315}{512}n^4 + \ldots \\
b_{10} &= -\frac{693}{1280}n^5 + \ldots.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Primjena linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova, kao što je npr. izraz (3.3), imala je nekada prednost pred drugačijim zapisima. Pri primjeni računala za računanje izraza (3.3), treba primijeniti metodu Clenshawa (Tscherning i Poder 1982) ili, ako se računanja vrše na jednom te istom elipsoidu, treba postupiti prema Lapaineu (1991), tj. primijeniti identitet:

$$\begin{aligned} & b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + b_{10} \sin 10\varphi = \\ & = \sin 2\varphi\,(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi), \end{aligned} \tag{3.7}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_6 + b_{10} = -\frac{3}{2}n + \frac{31}{24}n^3 - \frac{669}{640}n^5 \\ c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{15}{8}n^2 - \frac{435}{128}n^4 \\ c_3 &= 4b_6 - 12b_{10} = -\frac{35}{12}n^3 + \frac{651}{80}n^5 \\ c_4 &= 8b_8 = \frac{315}{64}n^4 \\ c_5 &= 16b_{10} = -\frac{693}{80}n^5. \end{aligned} \tag{3.8}$$

U formulama (3.8) nisu napisani članovi s potencijama većim od n^5. Napomenimo da su sljedeće formule (3.9) i (3.10):

$$s_m(\varphi) = A\,[\varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + b_{10} \sin 10\varphi] \tag{3.9}$$

$$s_m(\varphi) = A\,[\varphi + \sin 2\varphi\,(c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi)] \tag{3.10}$$

potpuno iste točnosti. Kako je $n^6 \approx 2 \cdot 10^{-17}$, to uvođenje daljnih članova nema smisla u aritmetici sa 16 znamenaka. S druge strane, pitanje je možemo li i s manjim brojem članova dobiti zadovoljavajuću točnost, te kako točnost geografske širine φ utječe na točnost izračunate duljine luka meridijana. Odgovori na ova pitanja mogu se naći u radu Lapainea (1990). S obzirom na učinkovitost, bolje je koristiti formulu (3.10) u kojoj je izbjegnuto peterostruko pozivanje trigonometrijske funkcije sinus, čime je ubrzano izvođenje, odnosno računanje.

Određivanje numeričkih vrijednosti s velikim brojem znamenaka parametara Besselova elipsoida zadanog s:

$$\log a = 6.80464\,34637$$

$$\log b = 6.80318\,92839$$

opisano je u radu (Lapaine i dr. 1992), odakle možemo preuzeti s odgovarajućom točnošću:

$$a = 6\,377\,397.155\,076\,049 \text{ m}$$

$$b = 6\,356\,078.962\,897\,785 \text{ m}$$

$$n = 0.001\,674\,184\,800\,815\,973.$$

Numeričke vrijednosti koeficijenata potrebnih za računanja duljine luka meridijana iznose:

$$
\begin{aligned}
A &= 6\,366\,742.520\,311\,864 \text{ m} \\[1ex]
b_2 &= -0.0025\,1127\,4561\,6581 \\
b_4 &= 0.0000\,0262\,7710\,1430 \\
b_6 &= -0.0000\,0000\,3421\,6557 \\
b_8 &= 0.0000\,0000\,0004\,8334 \\
b_{10} &= -0.0000\,0000\,0000\,0071 \\[1ex]
c_1 &= -0.0025\,1127\,1140\,0095 \\
c_2 &= 0.0000\,0525\,5400\,9523 \\
c_3 &= -0.0000\,0001\,3686\,5373 \\
c_4 &= 0.0000\,0000\,0038\,6673 \\
c_5 &= -0.0000\,0000\,0000\,1139
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

3.2. Zadano je φ_1 i s_m (φ_1, φ_2).

Prema radovima (Helmert 1880, Krüger 1912, König i Weise 1951), inverzna funkcija funkcije (3.3) može se napisati u obliku:

$$\varphi(s_m) = \psi + b_2 \sin 2\psi + b_4 \sin 4\psi + b_6 \sin 6\psi + b_8 \sin 8\psi + b_{10} \sin 10\psi + \ldots, \tag{3.12}$$

gdje je kraće označeno:

$$\psi = \frac{s_m}{A}. \tag{3.13}$$

U formuli (3.13) s_m je duljina luka meridijana od ekvatora do točke s geografskom širinom φ. Konstanta A je polumjer rektificirajuće sfere dan izrazom (3.4), a konstante b_i dane su izrazima (König i Weise 1951):

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{3}{2} n - \frac{27}{32} n^3 + \frac{269}{512} n^5 + \ldots \\
b_4 &= \frac{21}{16} n^2 - \frac{55}{32} n^5 + \ldots \\
b_6 &= \frac{151}{96} n^3 - \frac{417}{128} n^5 + \ldots \\
b_8 &= \frac{1097}{512} n^4 + \ldots \\
b_{10} &= \frac{8011}{2560} n^5 + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Da bi se mogla primijeniti formula (3.12), očito mora biti ispunjen uvjet:

$$\psi = \frac{s_m}{A} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.15}$$

Primjena linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova, kao što su npr. izrazi (3.3) ili (3.12), imala je nekada prednost pred drugačijim zapisima. Pri primjeni računala, treba primijeniti metodu Clenshawa (Tscherning i Poder 1982) ili, ako se računanja vrše na jednom te istom elipsoidu, treba postupiti kao u prethodnom zadatku, tj. primijeniti identitet (3.16):

$$\begin{aligned} & b_2 \sin 2\psi + b_4 \sin 4\psi + b_6 \sin 6\psi + b_8 \sin 8\psi + b_{10} \sin 10\psi = \\ & = \sin 2\psi (c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\psi) \cos 2\psi) \cos 2\psi) \cos 2\psi), \end{aligned} \tag{3.16}$$

gdje su sada:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_6 + b_{10} = \frac{3}{2} n - \frac{29}{12} n^3 + \frac{553}{80} n^5 \\ c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{21}{8} n^2 - \frac{1537}{128} n^4 \\ c_3 &= 4b_6 - 12b_{10} = \frac{151}{24} n^3 - \frac{32373}{640} n^5 \\ c_4 &= 8b_8 = \frac{1097}{64} n^4 \\ c_5 &= 16b_{10} = \frac{8011}{160} n^5. \end{aligned} \tag{3.17}$$

U formulama (3.17) nisu napisani članovi s potencijama većim od n^5. Napomenimo da su slijedeće formule (3.18) i (3.19):

$$\varphi(s_m) = \psi + b_2 \sin 2\psi + b_4 \sin 4\psi + b_6 \sin 6\psi + b_8 \sin 8\psi + b_{10} \sin 10\psi, \tag{3.18}$$

$$\varphi(s_m) = \psi + \sin 2\psi (c_1 + (c_2 + (c_3 + (c_4 + c_5 \cos 2\psi) \cos 2\psi) \cos 2\psi) \cos 2\psi), \tag{3.19}$$

potpuno iste točnosti. Kako je $n^6 \approx 2 \cdot 10^{-17}$, to uvođenje daljnih članova nema smisla u aritmetici sa 16 znamenaka. S druge strane, pitanje je možemo li i s manjim brojem članova dobiti zadovoljavajuću točnost, te kako točnost duljine luka meridijana utječe na točnost izračunate geografske širine φ. S obzirom na učinkovitost, bolje je koristiti formulu (3.19) u kojoj je izbjegnuto peterostruko pozivanje trigonometrijske funkcije sinus, čime je ubrzano izvođenje, odnosno računanje.

Ako je zadano φ_1 i s_m, tada na temelju izraza (3.1) možemo napisati:

$$s_m(\varphi_2) = s_m(\varphi_1) + s_m \tag{3.20}$$

Da bismo mogli izračunati geografsku širinu φ_2, treba dakle najprije pomoću formule (3.9) izračunati $s_m(\varphi_1)$, zatim prema (3.20) $s_m(\varphi_2)$, te konačno φ_2 prema (3.18), stavljajući:

$$\psi = \frac{s_m(\varphi_2)}{A}. \tag{3.21}$$

Zadatak ima smisla ukoliko je zadovoljen uvjet (3.15), koji se sada može napisati u obliku:

$$|s_m(\varphi_1) + s_m| \leq A \frac{\pi}{2}.$$

Za Besselov elipsoid imamo slijedeće numeričke vrijednosti:

$$\begin{aligned}
b_2 &= 0.0025\,1127\,3241\,8802 \\
b_4 &= 0.0000\,0367\,8785\,8529 \\
b_6 &= 0.0000\,0000\,7380\,9689 \\
b_8 &= 0.0000\,0000\,0016\,8326 \\
b_{10} &= 0{\cdot}0000\,0000\,0000\,0412 \\
c_1 &= 0.0025\,1126\,5860\,9524 \\
c_2 &= 0.0000\,0735\,7504\,3756 \\
b_3 &= 0.0000\,0002\,9523\,3818 \\
c_4 &= 0.0000\,0000\,0134\,6605 \\
c_5 &= 0.0000\,0000\,0000\,6585
\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3. Zadano je φ_2 i s_m.

Na temelju izraza (3.1), možemo napisati:

$$s_m(\varphi_1) = s_m(\varphi_2) - s_m. \tag{3.23}$$

Da bismo mogli izračunati geografsku širinu φ_1, postupimo analogno prethodnom zadatku. Treba dakle najprije pomoću formule (3.10) izračunati $s_m(\varphi_2)$, zatim prema (3.23) $s_m(\varphi_1)$, te konačno φ_1 prema (3.19), stavljajući:

$$\psi = \frac{s_m(\varphi_1)}{A} \tag{3.24}$$

Zadatak ima smisla ukoliko je zadovoljen uvjet (3.15), koji se sada može napisati u obliku:

$$|s_m(\varphi_2) - s_m| \leq A \frac{\pi}{2}.$$

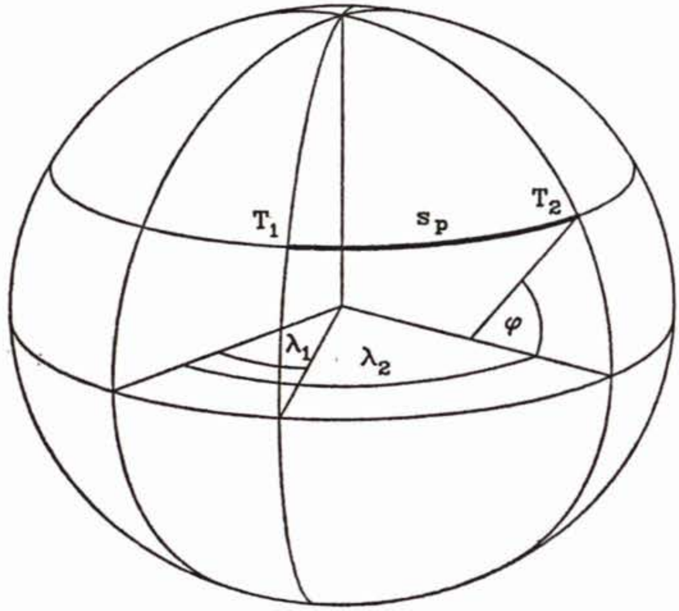
3.4. Numerički primjer

Svaki od tri prethodna zadatka uzduž paralele zadovoljavaju na Besselovom elipsoidu vrijednosti:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = 45^\circ, \qquad \varphi_2 = 46^\circ, \\
&s_m(45^\circ) = 4\,984\,439.265\,530\,249 \text{ m}, \\
&s_m(46^\circ) = 5\,095\,568.457\,845\,362 \text{ m}, \\
&s_m(45^\circ, 46^\circ) = 111\,129.192\,315\,113 \text{ m}.
\end{aligned}$$

4. OSNOVNI ZADACI UZDUŽ PARALELE

Uočimo na paraleli, kojoj pripada geografska širina φ, dvije točke: T_1 s geografskom duljinom λ_1 i T_2 s geografskom duljinom λ_2 (slika 2). Označimo



Slika 2. Luk paralele

duljinu luka paralele između točaka T_1 i T_2 sa s_p. Moguća su slijedeća četiri zadatka:

1° zadano φ, λ_1 i λ_2, traži se s_p;

2° zadano φ, λ_1 i s_p, traži se λ_2;

3° zadano φ, λ_2 i s_p, traži se λ_1;

4° zadano λ_1, λ_2 i s_p, traži se φ.

4.1. Zadano je φ, λ_1 i λ_2.

Integriranjem izraza (2.7) dobijemo:

$$s_p = (\lambda_2 - \lambda_1) N \cos\varphi. \tag{4.1}$$

4.2. Zadano je φ, λ_1 i s_p.

Iz formule (4.1) izravno se izvede:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{s_p}{N \cos\varphi}. \tag{4.2}$$

4.3. Zadano je φ, λ_2 i s_p.

Iz formule (4.2) izravno se izvede:

$$\lambda_1 = \lambda_2 - \frac{s_p}{N\cos\varphi}. \tag{4.3}$$

4.4. Zadano je λ_1, λ_2 i s_p.

Izraz (4.1) napišemo u obliku:

$$N\cos\varphi = \frac{s_p}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{4.4}$$

To je nelinearna jednadžba s nepoznatom veličinom φ. Uočimo najprije da je $N\cos\varphi$ parna funkcija od φ. To znači da se nepoznata geografska širina paralele φ može odrediti do na predznak, tj. ako je φ rješenje jednadžbe, onda je i $-\varphi$ također rješenje. Nadalje, kako je za $\varphi \in [0, \pi/2)$, $N\cos\varphi \in (0, a]$, to $s_p \in (0, 2a\pi]$ i $\lambda_1 - \lambda_2 \in (0, 2\pi]$ moraju biti tako zadani da vrijedi:

$$0 < \frac{s_p}{\lambda_2 - \lambda_1} \leq a. \tag{4.5}$$

Iako je jednadžba (4.4) nelinearna, ipak se može egzaktno riješiti po $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{b\,|s_p|}{\sqrt{a^4(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - (a^2 - b^2)s_p^2}}. \tag{4.6}$$

te transformirati u još jednostavniji oblik:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2}{s_p^2}(\lambda_2 - \lambda_1)^2 - 1}. \tag{4.7}$$

4.5. Numerički primjer

Svaki od četiri zadatka uzduž paralele na Besselovom elipsoidu zadovoljavaju slijedeći numerički podaci:

$$\varphi = 45°, \quad \lambda_1 = 15°, \quad \lambda_2 = 16°,$$

$$s_p = 78\,837.293\,432\,820\,01 \text{ m}.$$

LITERATURA

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen. B. G. Teubner, Leipzig.

König, R. i Weise, K. H. (1951): Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, Erster Band. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. Potsdam: Veröffentlichung des Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge № 52, B. G. Teubner, Leipzig.

Lambert, J. H. (1772): Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Dritter Theil, im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin.
Lapaine, M. (1990): Duljina luka meridijana, Geodetski list 1990, 4—6, 97—108.
Lapaine, M. (1991): Transformiranje linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova, Geodetski list 1991, 10—12, 387—396.
Lapaine, M., Lapaine, M., Frančula, N. i Vučetić, N. (1992): Numerical Values of Geodetic Constants of Bessel's Elipsoid. Proceedings 37th International Annual Gathering KoREMA, 14th Symposium on Measurement, Part 1, Faculty of Electrical Engineering, University of Zagreb, 273—277.
Tscherning, C. C. and Poder, K. (1982): Some Geodetic Applications of Clenshaw Summation. Bollettino di geodesia e scienze affini 1982, 4, 349—375.

MAIN GEODETIC PROBLEMS ALONG A MERIDIAN AND ALONG A PARALLEL ON THE ROTATIONAL ELLIPSOID

All possible main geodetic problems along a meridian and along a parallel are specifyed. The algorithms for their numerical solution are given.

Primljeno: 1993-01-27