

## PRIMJENA METODE KONAČNIH ELEMENATA U ODREĐIVANJU POMAKA I DEFORMACIJA GRAĐEVINSKIH OBJEKATA

Zdravko KAPOVIĆ, Zvonimir NAROBÉ\*

*SAŽETAK. Poznato je da u geodetskim zadacima vezanim uz mjerenje pomaka i deformacija građevinskih objekata, za razliku od drugih geodetskih oblasti, nema naputaka ili unificiranih pravilnika o metodama i točnosti mjerenja. Uočavajući taj nedostatak, u ovom će radu biti izložen postupak definiranja optimalne točnosti mjerenja pomaka primjenjujući metodu konačnih elemenata.*

### 1. UVOD

Mjerenje pomaka i deformacija prisutno je kod gotovo svih većih građevinskih objekata, a vrijednosti vertikalnih pomaka, najmjerodavniji su pokazatelji izdržljivosti i sigurnosti objekata. Iako su se opažanjima pomaka te analizom deformacija bavili mnogi autori (Pelzer 1985, Welsh 1987, Bilajbegović 1982, Sabbagh 1981, Niemeier 1985, Fawaz 1981, Pavliv 1980, Mikelev 1977), ipak je relativno malo publiciranih radova koji pokrivaju područje točnosti mjerenja pomaka i deformacija (Boljšakov 1980, Pavliv 1980, Narobe 1983).

Nije rijetkost da se za određivanje vrijednosti pomaka postavljaju nerearno visoki zahtjevi u pogledu točnosti mjerenja. Uočavaju se i dosta površni, pa i nestručno definirani kriteriji točnosti određivanja pomaka i deformacija. Prema nekima, pomake treba mjeriti s maksimalno mogućom točnošću. Drugi pak, stupanj točnosti poistovjećuju s dozvoljenim odstupanjima pomaka od njihove teorijske (očekivane) vrijednosti. Međutim, realno bi bilo postaviti zahtjev na osnovi kriterija tzv. značajnih utjecaja: »pogreške mjerenja trebaju biti zanemarivo male u odnosu na vrijednost pomaka« (Kapović 1993).

Pri ovim razmatranjima ne smije se gubiti iz vida da je veća točnost ujedno povezana sa složenijim i skupljim metodama rada, dok s druge strane, nedovoljna točnost može toliko obezvrijediti rezultate mjerenja da su oni praktično neupotrebljivi za iole kvalitetniju pomnu razradu (analizu).

S kojom, dakle, točnošću mjeriti pomake građevinskih objekata?

\* Dr. Zdravko Kapović, prof. dr. Zvonimir Narobe, Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

Prema granicama (Kapović 1993):

$$\frac{1}{20} < \frac{\sigma_f}{f} < \frac{1}{10}, \quad (1)$$

gdje su:

$\sigma_f$  — standardno odstupanje

$f$  — veličina pomaka,

definirana je optimalna odnosno rentabilna točnost mjerenja pomaka.

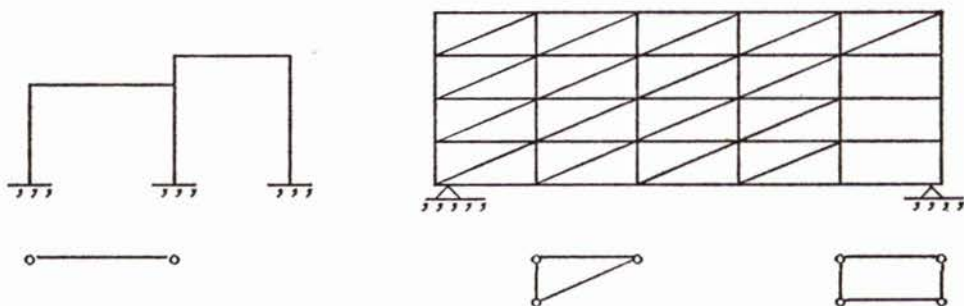
Izraz (1) može se interpretirati na ovaj način: »pomake treba mjeriti s točnošću 5–10% od očekivane (teorijske) vrijednosti pomaka ( $f$ )«.

Dakle, ukoliko je poznata teorijska vrijednost pomaka, tada se može definirati točnost, mogu se planirati metode mjerenja, potreban instrumentarij te način izjednačenja i interpretacije rezultata mjerenja.

Teorijske veličine pomaka mogu se izračunati metodom konačnih elemenata.

## 2. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Za proračun naponskih stanja u konstrukciji, razvila se metoda konačnih elemenata (Bathe 1990, Dvornik 1980, Bičanić 1980). Prema ovoj metodi, u mehanici čvrstog deformabilnog tijela, stvarnu konstrukciju raščlanjujemo na manje dijelove odnosno područja, tj. na tzv. konačne elemente, koji su simbolički povezani samo u čvorovima. Svaki takav element ima konačne dimenzije i značajke te jednostavan oblik bez obzira na kompleksnost konstrukcije. Najčešći oblici konačnih elemenata su: štapni, kvadratni, pravokutni i trokutni (sl. 1).



Slika 1. Prikaz konstrukcija s konačnim elementima u obliku: štapa (a), trokuta (b), pravokutnika (c)

Upravo ovi jednostavni oblici elemenata čine ovu metodu pristupačnijom u odnosu na klasičnu metodu teorije elastičnosti. Raščlanjivanje konstrukcije dovodi do toga da se čitav problem svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi u kojima su nepoznanice pomaci čvorova (Uhrig 1986). Pomake ostalih točaka unutar elementa aproksimiramo (interpoliramo) funkcijom zavisnom od pomaka čvorova tog elementa. Možemo reći da će se izračun obaviti za

umjetno stvoren model koji aproksimira pravu konstrukciju (Šimić 1977, Pičuga 1985).

Modeliranje, odnosno shematiziranje konstrukcije (podjela konstrukcije na elemente), čini bitni i vrlo značajni dio razmatrane metode. Neadekvatno odabrani element može dati loše rezultate. Drugim riječima, rezultat izračuna je izravno vezan uz dobru ili lošu aproksimaciju problema.

### 3. GLAVNE ZNAČAJKE METODE KONAČNIH ELEMENATA

Ako na neko elastično tijelo djeluje sustav sila  $\{P\}$ , doći će do pomaka  $\{\delta\}$  tog elastičnog tijela. Kako su pomaci u funkciji sile odnosno

$$\delta = f(P), \quad (2)$$

bit će (Šimić 1977):

$$\{\delta\} = [F] \cdot \{P\}, \quad (3)$$

gdje je:

$F$  — matrica fleksibilnosti, tj. matrica utjecajnih koeficijenata elastičnosti. Ona predstavlja podatljivost elementa s obzirom na djelovanje sile. To je kvadratna, simetrična matrica.

Isto se tako odnos između vektora sila i vektora pomaka može iskazati izrazom (Šimić 1977):

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \cdot \{P\}, \quad (4)$$

gdje je

$K$  — matrica krutosti koja je također kvadratna i simetrična. Definirana je geometrijom elemenata i karakteristikama materijala.

Na osnovi predočenog, uočljivo je da se odnos između deformacije i opterećenja može izraziti na dva načina:

a) pomoću matrice fleksibilnosti (metodom sila)

$$\{\delta\} = [F] \cdot \{P\}. \quad (5)$$

b) pomoću matrice krutosti (metodom deformacija)

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \cdot \{P\}, \quad (6)$$

Ove dvije matrice, fleksibilnosti i krutosti, obrnuto su razmjerne odnosno inverzne:

$$[F] = [K]^{-1}. \quad (7)$$

Metoda deformacija, u metodi konačnih elemenata, mnogo se više primjenjuje.

Kad su definirani konačni elementi, primjenom teorije elastičnosti, utvrđuje se veza između pomaka unutar elementa i pomaka čvora. To će predstavljati osnovnu jednadžbu konačnog elementa u kojoj su nepoznanice pomaci čvorova. Skup svih osnovnih jednadžbi elemenata čini jednadžbu konstrukcije. Na taj način se dobije sustav linearnih jednadžbi iz kojih se,



na osnovi rubnih uvjeta i opterećenja, računaju pomaci čvorova. Konstrukcija je, dakle, sustav elemenata u kojoj su zadovoljeni uvjeti ravnoteže i kompatibilnosti.

### 3.1. Kratki sažetak proračuna po metodi konačnih elemenata

- a) Konstrukciju raščlaniti na veći broj elemenata:
  - iscrtati model konstrukcije.
- b) Odrediti koordinate čvorova na jedan od slijedećih načina:
  - numerički
  - grafički } iz projekta,
  - mehanički (kordinatografom).
- c) Formirati matrice krutosti za svaki element te izračunati matricu krutosti konstrukcije, tj.

$$[K] = \sum [k]_i, \quad (8)$$

- d) Definirati vektor vanjskih sila  $\{P\}$ , koji je jednak zbroju vanjskih sila po elementima, tj.

$$\{P\} = \sum \{p\}_i. \quad (9)$$

- e) Izjednačiti rad unutarnjih i vanjskih sila:

$$[K] \cdot \{\delta\} - \{P\} - \{R\} = 0, \quad (10)$$

gdje su:

- $\{\delta\}$  — vektor pomaka čvorova,
- $\{R\}$  — vektor unutarnjih sila.

- f) Rješenjem jednadžbe (10) dobiju se pomaci čvorova, tj. nepoznanice, čime je zadatak riješen.

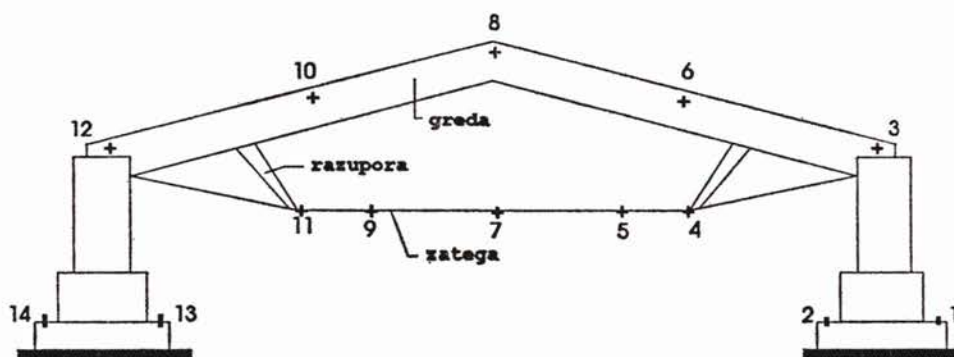
Za praktičnu ilustraciju izložene metode, bit će predložena njena primjena u pripremi i analizi geodetskih mjerenja jedne relativno jednostavne građevinske konstrukcije.

## 4. PRIMJENA METODE KONACNIH ELEMENATA U OBRADI KROVNOG NOSAČA WN 30

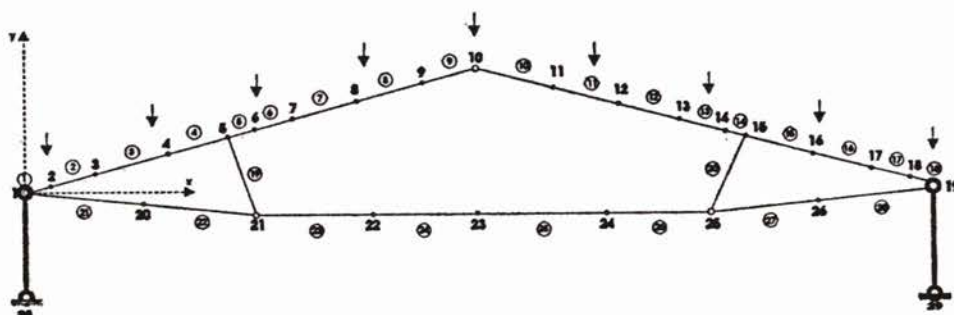
Nosač WN 30 (slika 2) čini dio krovne konstrukcije hale GH-6, GIP Gradis, Maribor.

Greda i razupore nosača su od armiranog betona, a zatega od visoko kvalitetnog čelika. Programom ispitivanja predviđeno je postupno opterećivanje konstrukcije (od 7,32 t do 146 tona), te istovremeno mjerenje horizontalnih i vertikalnih pomaka na značajnim mjestima nosača (slika 2), kako bi se ispitala njegova (nosačeva) svojstva.

Računski model (slika 3) poslužio je za proračun nosača metodom konačnih elemenata, programom SAP-A. Kako se vidi na slici 3, konstrukcija je rastavljena na 30 štapnih elemenata odnosno 29 čvorova. Čvor 1 uzet je za ishodište koordinatnog sustava.



Slika 2. Krovni nosač VN 30 s obilježenim mjernim mjestima



Slika 3. Računski model nosača WN 30

Programom SAP-A dobivene su teorijske (očekivane) veličine pomaka. Na temelju tih veličina i na osnovi izraza (1), razrađen je plan, program i točnost mjerenja. Vertikalni pomaci opažani su metodom geometrijskog nivelmana visoke točnosti, a horizontalni posredno, opažanjem paralaktičkih kutova.

Usporedimo izmjerene ( $f_i$ ) i računске ( $f_r$ ) vrijednosti pomaka za neke točke i neke faze opterećivanja konstrukcije.

Tablica 1. Veličine horizontalnih pomaka

Faza opt.	Izmjereni pomak (mm)	Računski pomak (mm)	Neslaganje (odstupanje) %
7	9.7	10.2	5
12	18.1	19.2	6
17	32.8	33.4	2

Tablica 2. Prikaz vertikalnih pomaka

Mjerno mjesto	Čvor	Izmjereni pomak $f_i$ (mm)	Računski pomak $f_r$ (mm)	Neslaganje (odstupanje) %
f a z a 7				
6	13	33.1	43.0	23
8	10	28.9	42.3	32
10	7	33.4	43.0	22
f a z a 12				
6	13	70.1	79.7	12
8	10	57.5	78.9	27
10	7	69.8	79.7	12
f a z a 17				
6	13	139.0	156.2	11
8	10	118.6	137.3	14
10	7	137.3	156.2	12

Što se iz tablica 1. i 2. može vidjeti? Izmjereni horizontalni pomaci (korigirani za pomake nastale uslijed rotacije temeljnog bloka) se gotovo potpuno podudaraju s računskim veličinama. Izmjereni vertikalni pomaci su manji od računskih za cca 18%, što ukazuje da nosač posjeduje veću krutost od projektnom pretpostavljene. Isto tako, može se konstatirati da su geodetska mjerenja dobro planirana, pripremljena i izvedena s optimalnom točnošću.

## ZAKLJUČAK

U nedostatku normativa i pravilnika za geodetska opažanja pomaka i deformacija građevinskih objekata, primijenjen je novi postupak u »a priori« definiranju optimalne točnosti mjerenja, koristeći se spoznajama iz teorije elastičnosti odnosno njenom dijelu — metodi konačnih elemenata. Teorijska razmatranja popraćena su praktičnim primjerom kod opažanja pomaka na armiranobetonskom nosaču WN 30. Komparativnom pomnom razradom izmjerenih i teorijskih veličina pomaka utvrđena je njihova vrlo visoka korelacija. To nam daje za pravo tvrditi da su geodetska mjerenja dobro planirana i izvedena s optimalnom točnošću.

## LITERATURA

- Bathe, K. J. (1990): Finite-Elemente — Methoden, Berlin.  
 Bičanić, N. (1980): Proračun kompleksnih konstrukcija, Zagreb.  
 Bilajbegović, A., Feil, L. Klak, S. (1985): Deformacijska analiza, Zbornik radova: Geodezija u hidrogradnji, hidrografiji i hidrologiji, Split, 383–393.



- Boljšakov, V. D., Levčuk, G. P. (1980): Spravočnoe rukovodstvo po inženernogeodezičeskim rabotama, Moskva.
- Dvornik, J. (1980): Prikaz nekih metoda teorije konstrukcija, skripta, Zagreb.
- Fawaz, E. (1981): Beurteilung von Nivellementsnetzen auf der Grundlage der Theorie der stochastischen Prozesse, Dissertation, Hanover.
- Kapović, Z. (1993): Prilog određivanju i analizi pomaka i deformacija mostova s posebnim osvrtom na temperaturne utjecaje, doktorska disertacija, Geodetski fakultet, Zagreb.
- Narobe Z., Kapović, Z. (1983): Točnost mjerenja pomaka i deformacija građevina, Geodetski list 10–12, 216–222.
- Niemeier, W. (1985): Deformationsanalyse, Pelzer, H.: Geodetische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II.
- Mikelev, D. Š., Runov, I. V., Golubcov A. I. (1977): Geodezičeskie izmerenija pri izučenii deformacij krupnih inženernih sooruzenij, Moskva.
- Pavliv, P. V. (1980): Problemi visokotočnojo nivelirovanja, Ljvov.
- Pelzer, H. (1985): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Pičuga, A. (1985): Uvod u metod konačnih elemenata, Svjetlost, Sarajevo.
- Sabbagh, A. (1981): Instrumentelle Weiterentwicklung des geodätischen Alignements zur Erfassung von Deformationsvorgängen, Dissertationen, Hannover.
- Šimić, V. (1977): Uvod u metodu konačnih elemenata, (predavanje III. stupanj Građevinskog fakulteta), Zagreb.
- Uhrig, W. (1986): Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen und Stoffgesetze aus der Sicht der Kontinuumsmechanik.
- Welsch, W. (1987): Lecture Notes in Earth Sciences, Geneva.

#### APPLICATION OF THE METHOD OF FINAL ELEMENTS IN DETERMINING SHIFTS AND DEFORMATIONS OF STRUCTURES

It is well known that there are no instructions or unified regulations about measuring methods and accuracy within the scope of geodetic tasks connected with the measurements of deflection and deformations in structures, as compared to the other geodetic fields. The presence of this deficiency has led to the presentation of the procedure by which the optimal accuracy of deflection measuring, applying the method of final elements, has been defined.

Primljeno: 1993-10-01