UDK 528.91:528.235
Pregledni članak

EKVIVALENTNO PRESLIKAVANJE ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU I OBRATNO PRIMJENOM TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

Miljenko LAPAINE, Blanka ŽARINAC-FRANČULA, Nedjeljko FRANČULA
i Damjan JOVIČIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. U radu se istražuje primjena trigonometrijskih redova za određivanje geografske širine pri ekvivalentnom preslikavanju sfere na rotacijski elipsoid i rotacijskog elipsoida na sferu. Umjesto uobičajene primjene redova trigonometrijske funkcije sinus višestrukih kutova predlažu se odgovarajući redovi potencija funkcije kosinus dvostrukoga kuta.

1. UVOD

U kompjutorski podržanim postupcima izradbe karata često je potrebno rješavati obrnuti kartografski zadatak, tj. računati geografske koordinate iz projekcijskih koordinata na osnovi inverznih jednadžbi kartografskih projekcija.

Za većinu projekcija Zemljine sfere (kugle) inverzne jednadžbe kartografskih projekcija mogu se egzaktno izvesti iz osnovnih jednadžbi (Frančula i dr. 1984). To, međutim, nije moguće za mnoge projekcije Zemljinog elipsoida. Za te projekcije moguće je s pomoću inverznih jednadžbi iz projekcijskih koordinata izračunati geografske koordinate, φ, λ na sferi, a zatim preslikavanjem sfere na rotacijski elipsoid dobiti geografske koordinate Φ, Λ na elipsoidu.

U mnogim dosadašnjim udžbenicima o kartografskim projekcijama, npr. (Borčić 1955, Jovanović 1983) nisu dane inverzne jednadžbe kartografskih projekcija, niti je obrađeno preslikavanje sfere na elipsoid.

Preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu primjenom trigonometrijskih redova dano je u navedena dva udžbenika s nedostatnim brojem članova za mnoge praktične potrebe. Stoga smo u jednom prethodnom radu (Frančula i dr. 1992) dali trigonometrijske redove s većim brojem članova i u obliku prikladnom za kompjutorsko računanje za konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno. U ovom radu obradili smo na analogan način ekvivalentno preslikavanje.

* Mr. Miljenko Lapaine, mr. Blanka Žarinac-Frančula, prof. dr. Nedjeljko Frančula, mr. Damjan Jovičić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 41000 Zagreb.

2. EKVIVALENTNO PRESLIKAVANJE IZMEĐU ROTACIJSKOG ELIPSOIDA I SFERE

Neka je $\omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $r : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama:

$$X = R \cos\varphi \cos\lambda, \quad Y = R \cos\varphi \sin\lambda, \quad Z = R \sin\varphi. \tag{2.1}$$

To preslikavanje je geografska parametrizacija sfere $\mathscr{S}$ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjerom R. Prva diferencijalna forma tog preslikavanja je (Frančula i dr. 1992)

$$ds^2 = R^2 (d\varphi^2 + \cos^2\varphi \, d\lambda^2). \tag{2.2}$$

Neka je $\Omega = \omega$ i $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R(\Phi, \Lambda) = (X, Y, Z)$ preslikavanje zadano s:

$$X = N \cos\Phi \cos\Lambda, \quad Y = N \cos\varphi \sin\Lambda, \quad Z = \frac{b^2}{a^2} N \sin\Phi, \tag{2.3}$$

gdje je N polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2\Phi + b^2 \sin^2\Phi}}. \tag{2.4}$$

To preslikavanje je geografska parametrizacija rotacijskog elipsoida $\mathscr{E}$ sa središtem u ishodištu i poluosima a i b. Prva diferencijalna forma tog preslikavanja je (Frančula i dr. 1992)

$$dS^2 = M^2 d\Phi^2 + N^2 \cos^2\Phi \, d\Lambda^2, \tag{2.5}$$

gdje je M polumjer zakrivljenosti meridijana

$$M = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 \cos^2\Phi + b^2 \sin^2\Phi)^3}}. \tag{2.6}$$

Želimo definirati ekvivalentno preslikavanje k sa sfere $\mathscr{S}$ na elipsoid $\mathscr{E}$. Da bi preslikavanje k bilo ekvivalentno, nužno je i dostatno da produkt lokalnoga linearnog mjerila uzduž meridijana

$$m = \frac{ds}{dS} = \frac{R \, d\varphi}{M \, d\Phi}, \tag{2.7}$$

i linearnog mjerila uzduž paralela

$$n = \frac{ds}{dS} = \frac{R \cos\varphi \, d\lambda}{N \cos\Phi \, d\Lambda} \tag{2.8}$$

bude jednak jedan, tj. da vrijedi

$$mn = 1. \tag{2.9}$$

Pretpostavimo li da preslikavanje k: $\mathscr{S} \rightarrow \mathscr{E}$ ima svojstvo

$$\lambda = \Lambda, \tag{2.10}$$

tada se na temelju relacija (2.7) — (2.10) može napisati izraz:

$$R^2 \cos\varphi \, d\varphi = MN \cos\Phi \, d\Phi, \tag{2.11}$$

koji daje vezu između geografskih širina φ i Φ pri ekvivalentnom preslikavanju sfere na elipsoid. Ako u relaciju (2.11) uvrstimo vrijednosti funkcija M i N definiranih s (2.4) i (2.6) dobijemo

$$R^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{a^4 b^2 \cos\Phi \, d\Phi}{(a^2 \cos^2\Phi + b^2 \sin^2\Phi)^2}. \tag{2.12}$$

Uz uobičajenu oznaku

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2, \tag{2.13}$$

relacija (2.12) može se transformirati u

$$R^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{b^2 \cos\Phi \, d\Phi}{(1 - e^2 \sin^2\Phi)^2}, \tag{2.14}$$

što nakon integriranja daje

$$R^2 \sin\varphi = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin\Phi}{1 - e^2 \sin^2\Phi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e\sin\Phi}{1 - e\sin\Phi}\right) + C. \tag{2.15}$$

Integral lijeve strane u (2.14) je tablični integral, a integral s desne strane u (2.14) pojavljuje se i pri računanju površine elipsoidnog trapeza (Lapaine i Lapaine 1991).

Postavimo li dodatni uvjet da se ekvator elipsoida preslika u ekvator sfere, tj.

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0, \tag{2.16}$$

proizlazi da integracijska konstanta C mora biti jednaka nuli. Uz taj uvjet, izraz (2.15) prelazi u

$$R^2 \sin\varphi = \frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin\Phi}{1 - e^2 \sin^2\Phi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e\sin\Phi}{1 - e\sin\Phi}\right). \tag{2.17}$$

Pri konformnom preslikavanju rotacijskog elipsoida na sferu nebitan je odnos između polumjera sfere i poluosi, odnosno veličine elipsoida (Frančula i dr. 1992). Međutim, pri ekvivalentnom preslikavanju nije tako. Postavimo li na primjer dodatni zahtjev da površine rotacijskog elipsoida i sfere moraju biti međusobno jednake, tada možemo naći vezu između polumjera sfere i poluosi elipsoida. Zaista, površina sfere iznosi

$$P_{sfere} = 4 R^2 \pi \tag{2.18}$$

dok je površina elipsoida (Lapaine i Lapaine 1991):

$$P_{elipsoida} = b^2 \pi \left(\frac{\sin\Phi}{1 - e^2 \sin^2\Phi} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e\sin\Phi}{1 - e\sin\Phi}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 2 b^2 \pi \left(\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e}\right). \tag{2.19}$$

Iz jednakosti površina (2.18) i (2.19) proizlazi

$$R^2 = \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1-e^2}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right). \quad (2.20)$$

Do istog izraza mogli smo doći i uz uvjet da se pol sfere preslika u pol elipsoida, tj.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Phi = \frac{\pi}{2}. \quad (2.21)$$

Tada se do formule (2.20) dolazi neposredno iz formule (2.17). Zanimljivo je da je Mollweide (1807) proučavao upravo takvo preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu. Umjesto izraza (2.20) u to je doba bilo uobičajeno razvijanje u redove:

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2\left(1 - \frac{1}{1\cdot 3}e^2 - \frac{1}{3\cdot 5}e^4 - \frac{1}{5\cdot 7}e^6 - \frac{1}{7\cdot 9}e^8 \ldots\right), \\ R &= a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \frac{23123}{1814400}e^8 - \ldots\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. EKVIVALENTNO PRESLIKAVANJE ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU

Za poznatu geografsku širinu Φ na elipsoidu, geografska širina φ na sferi može se izračunati izravno iz izraza koji se jednostavno dobije iz (2.17):

$$\varphi = \arcsin\left[\frac{b^2}{2R^2}\left(\frac{\sin\Phi}{1-e^2\sin\Phi} + \frac{1}{2e}\ln\frac{1+e\sin\Phi}{1-e\sin\Phi}\right)\right]. \quad (3.1)$$

Da bi se pojednostavilo računanje umjesto formule (3.1) napisat ćemo izraz oblika

$$\varphi = \Phi + b_2\sin 2\Phi + b_4\sin 4\Phi + b_6\sin 6\Phi + b_8\sin 8\Phi + \ldots \quad (3.2)$$

gdje koeficijenti b_2, b_4, b_6, ... ovise o uporabljenom elipsoidu. Takav se oblik formule sreće i pri drugim preslikavanjima između elipsoida i sfere, a za ekvivalentno preslikavanje može se naći u literaturi (Adams 1921, Kavrajskij 1958, Snyder 1982, 1987). Međutim, Kavrajskij (1958) izvodi izraze samo za prva dva koeficijenta b_2 i b_4, te upućuje na Adamsa (1921) za treći b_6. Snyder (1982 i 1987) ima prva tri koeficijenta. Daljnji se koeficijenti u literaturi ne navode.

U ovome se radu izvode izrazi za koeficijente b_2, b_4, b_6 i b_8. Postupak je teorijski moguće nastaviti, no mi ćemo se zadovoljiti točnošću koju daju prva četiri člana reda. Ta će točnost biti jednaka točnosti odgovarajućih formula za konformno preslikavanje (Frančula i dr. 1992).

Primjenom izraza (2.13), te razvojem funkcija u zagradi s desne strane u relaciji (2.17) u red potencija po e^2, (2.17) se može napisati u obliku

$$R^2 \sin\varphi = a^2(1-e^2)\sin\Phi\left(1+\frac{2}{3}e^2\sin^2\Phi+\frac{3}{5}e^4\sin^4\Phi+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{7}e^6\sin^6\Phi+\dots\right). \tag{3.3}$$

Uzevši u obzir (2.22), možemo izračunati

$$\frac{R^2}{a^2(1-e^2)} = 1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\dots \tag{3.4}$$

i zatim (3.3) transformirati u

$$\sin\varphi = x+\Delta x, \tag{3.5}$$

gdje smo označili

$$x = \sin\Phi, \tag{3.6}$$

$$\Delta x = -\cos^2\Phi\sin\Phi\left[\frac{2}{3}e^2+\left(\frac{7}{45}+\frac{3}{5}\sin^2\Phi\right)e^4+\left(\frac{64}{945}+\frac{6}{35}\sin^2\Phi+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4}{7}\sin^4\Phi\right)e^6+\left(\frac{512}{14175}+\frac{128}{1575}\sin^2\Phi+\frac{11}{63}\sin^4\Phi+\frac{5}{9}\sin^6\Phi\right)e^8+\dots\right]. \tag{3.7}$$

Napišimo Taylorov red za funkciju arcsin u standardnom obliku:

$$\arcsin(x+\Delta x) = \arcsin x+(\arcsin x)'\Delta x+(\arcsin x)''\frac{\Delta x^2}{2!}+\dots \tag{3.8}$$

te uočimo da uz (3.5) — (3.7) red (3.8) prelazi u

$$\varphi = \Phi+\frac{d\Phi}{dx}\Delta x+\frac{d^2\Phi}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2!}+\frac{d^3\Phi}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{3!}+\frac{d^4\Phi}{dx^4}\frac{\Delta x^4}{4!}+\dots \tag{3.9}$$

Derivacije od Φ po x lako odredimo na temelju (3.6):

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{1}{\cos\Phi}, \qquad \frac{d^2\Phi}{dx^2}=\frac{\sin\Phi}{\cos^3\Phi},$$
$$\frac{d^3\Phi}{dx^3}=\frac{1+2\sin^2\Phi}{\cos^5\Phi}, \qquad \frac{d^4\Phi}{dx^4}=\frac{9+6\sin^2\Phi}{\cos^7\Phi}\sin\Phi. \tag{3.10}$$

Izraze za Δx^2, Δx^3 i Δx^4 izračunamo na temelju izraza (3.7) za Δx, zanemarujući pritom članove s potencijama većim od e^8. Na taj način može se dobiti:

$$\Delta x^2 = \cos^4\Phi \sin^2\Phi \left[\frac{4}{9} e^4 + \left(\frac{28}{135} + \frac{4}{5}\sin^2\Phi\right) e^6 + \left(\frac{541}{4725} + \frac{218}{525}\sin^2\Phi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{589}{525}\sin^4\Phi\right) e^8\right]$$

$$\Delta x^3 = -\cos^6\Phi \sin^3\Phi \left[\frac{8}{27} e^6 + \left(\frac{56}{45} + \frac{8}{15}\sin^2\Phi\right) e^8\right] \tag{3.11}$$

$$\Delta x^4 = \cos^8\Phi \sin^4\Phi \frac{16}{81} e^8.$$

Preostaje uvrštavanje izraza (3.10) i (3.11) u (3.9), te jedno veliko sređivanje. Nakon odgovarajućeg rada može se doći do željenog izraza (3.2) gdje su koeficijenti b_i određeni prema:

$$b^2 = -\left(\frac{1}{3} e^2 + \frac{31}{180} e^4 + \frac{59}{560} e^6 + \frac{28811}{604800} e^8 + \ldots\right)$$

$$b_4 = \frac{17}{360} e^4 + \frac{61}{1260} e^6 + \frac{4601}{201600} e^8 + \ldots$$

$$b_6 = -\left(\frac{383}{45360} e^6 + \frac{5161}{777600} e^8 + \ldots\right) \tag{3.12}$$

$$b_7 = \frac{3487}{3628800} e^8 + \ldots$$

U doba logaritamskih tablica primjena izraza u obliku linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija sinusa višestrukih kutova (3.2) imala je prednost pred drugačijim zapisima. Danas se, međutim, pri radu s računalom prednost daje zapisu u obliku polinoma:

$$b_2 \sin 2\Phi + b_4 \sin 4\Phi + b_6 \sin 6\Phi + b_8 \sin 8\Phi =$$

$$= \sin 2\Phi\,(c_1 + c_2 \cos 2\Phi + c_3 \cos^2 2\Phi + c_4 \cos^3 2\Phi), \tag{3.13}$$

gdje se novi koeficijenti c_i mogu izraziti s pomoću b_i na isti način kao što je to urađeno u radu Frančule i dr. (1992):

$$c_1 = b_2 - b_6 = -\left(\frac{1}{3} e^2 + \frac{31}{180} e^4 + \frac{157}{1620} e^6 + \frac{55793}{1360800} e^8 + \ldots\right)$$

$$c_2 = 2\,b_4 - 4\,b_8 = \frac{17}{180} e^4 + \frac{61}{630} e^6 + \frac{18961}{453600} e^8 + \ldots$$

$$c_3 = 4\,b_6 = -\left(\frac{383}{11340} e^6 + \frac{5161}{194400} e^8 + \ldots\right) \tag{3.14}$$

$$c_4 = 8\,b_8 = \frac{3487}{453600} e^8 + \ldots$$

Naposljetku, izraz (3.13) treba modificirati na poznati način, tako da se potenciranja zamijene množenjima te je konačno:

$$\varphi = \Phi + \sin 2\,\Phi\,(c_1 + (c_2 + (c_3 + c_4 \cos 2\,\Phi) \cos 2\,\Phi) \cos 2\,\Phi) + \ldots \qquad (3.15)$$

Na taj se način izbjegava višestruko pozivanje trigonometrijskih funkcija i time ubrzava izvođenje, odnosno skraćuje vrijeme računanja.

4. EKVIVALENTNO PRESLIKAVANJE SFERE NA ROTACIJSKI ELIPSOID

Za poznatu geografsku širinu φ na sferi, iz izraza (2.17) ne može se izravno izračunati odgovarajuća geografska širina Φ na elipsoidu. Invertiranjem trigonometrijskog reda (3.2) može se dobiti red istog oblika

$$\Phi = \varphi + b_2 \sin 2\,\varphi + b_4 \sin 4\,\varphi + b_6 \sin 6\,\varphi + b_8 \sin 8\,\varphi + \ldots \qquad (4.1)$$

s time da su koeficijenti b_i sada određeni na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{3} e^2 + \frac{31}{180} e^4 + \frac{517}{5040} e^6 + \frac{78389}{1814400} e^8 + \ldots \\
b_4 &= \frac{23}{360} e^4 + \frac{251}{3780} e^6 + \frac{45949}{604800} e^8 + \ldots \\
b_6 &= \frac{761}{45360} e^6 + \frac{108523}{5443200} e^8 + \ldots \\
b_8 &= \frac{6899}{1209600} e^8 + \ldots
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

U literaturi se mogu naći samo koeficijenti b_2, b_4 i b_6 i to do članova s e^6 (Adams 1921, Snyder 1982, 1987). Nadalje, kao što je već spomenuto, danas se pri radu s računalom prednost daje zapisu u obliku polinoma:

$$\begin{aligned}
&b_2 \sin 2\,\varphi + b_4 \sin 4\,\varphi + b_6 \sin 6\,\varphi + b_8 \sin 8\,\varphi = \\
&= \sin 2\varphi\,(c_1 + c_2 \cos 2\,\varphi + c_3 \cos^2 2\,\varphi + c_4 \cos^3 2\,\varphi).
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

gdje se novi koeficijenti c_i mogu izraziti s pomoću b_i na isti način kao što je to urađeno u radu Frančule i dr. (1992):

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = \frac{1}{3} e^2 + \frac{31}{180} e^4 + \frac{139}{1620} e^6 + \frac{4523}{194400} e^8 + \ldots \\
c_2 &= 2\,b_4 - 4b^8 = \frac{23}{180} e^4 + \frac{251}{1890} e^6 + \frac{781}{6048} e^8 + \ldots \\
c_3 &= 4\,b_6 = \frac{761}{11340} e^6 + \frac{108523}{1360800} e^8 + \ldots \\
c_4 &= 8\,b_8 = \frac{6899}{151200} e^8 + \ldots
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Za praktičnu primjenu s pomoću računala, izraz (4.3) treba još modificirati tako da se potenciranja zamijene množenjima, tj. konačna je formula oblika:

$$\Phi = \varphi + \sin 2\varphi\,(c_1 + (c_2 + (c_3 + c_4 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) \cos 2\varphi) + \dots \tag{4.5}$$

5. PRIKAZ KOEFICIJENATA U REDOVIMA S POMOĆU TREĆE SPLJOŠTENOSTI

U geodetskoj se literaturi vrlo često susreću redovi trigonometrijskih funkcija. Koeficijenti u tim redovima su beskonačni redovi potencija. Gotovo redovito ti se koeficijenti zapisuju u obliku beskonačnih redova potencija ekscentriciteta e ili e'. Međutim, prije više od stotinu godina Helmert (1880) je uočio da se isti koeficijenti mogu prikazati i u obliku beskonačnih redova potencija raznih drugih parametara, ovisno o kojima spomenuti redovi konvergiraju brže ili sporije.

Posebno prikladnom pokazala se primjena parametra n koji se naziva treća spljoštenost, a definira kao

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \tag{5.1}$$

gdje su a i b poluosi rotacijskog elipsoida. Polumjer R sfere, koji se pojavljuje u izrazu (2.17) pri ekvivalentnom preslikavanju rotacijskog elipsoida na sferu, može se s pomoću treće spljoštenosti n napisati u obliku

$$R = a\left(1 - \frac{2}{3}n + \frac{26}{45}n^2 - \frac{374}{945}n^3 + \frac{1722}{2025}n^4 + \dots\right). \tag{5.2}$$

Koeficijenti b_i koji se pojavljuju u izrazu (3.2) pri ekvivalentnom preslikavanju rotacijskog elipsoida na sferu prikazani s pomoću treće spljoštenosti n glase:

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{4}{3}n - \frac{4}{45}n^2 + \frac{88}{315}n^3 + \frac{28538}{4725}n^4 + \dots \\
b_4 &= \frac{34}{45}n^2 + \frac{8}{105}n^3 - \frac{2726}{525}n^4 + \dots \\
b_5 &= -\frac{1532}{2835}n^3 + \frac{65626}{42525}n^4 + \dots \\
b_8 &= \frac{3487}{14175}n^4 + \dots
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Kako smo već ranije primijetili, sa stajališta djelotvornosti primjene računala, od oblika (3.2) pogodniji je zapis (3.15) čiji se koeficijenti sada mogu izraziti na sljedeći način:

$$c_1 = b_2 - b_6 = -\frac{4}{3}n - \frac{4}{45}n^2 + \frac{332}{405}n^3 + \frac{191216}{42525}n^4 + \dots$$

$$
\begin{aligned}
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = && \frac{68}{45}n^2 + \frac{16}{105}n^3 - \frac{161152}{14175}n^4 + \dots \\
c_3 &= 4\,b_6 = && -\frac{6128}{2835}n^3 + \frac{262504}{42525}n^4 + \dots \\
c_4 &= 8\,b_8 = && \frac{27896}{14175}n^4.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Koeficijenti b_i, koji se pojavljuju u izrazu (4.1) pri ekvivalentnom preslikavanju sfere na rotacijski elipsoid, prikazani s pomoću treće spljoštenosti n, poprimaju oblik:

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{4}{3}n + \frac{4}{45}n^2 - \frac{16}{35}n^3 - \frac{86582}{14175}n^4 + \dots \\
b_4 &= \frac{46}{45}n^2 + \frac{152}{945}n^3 + \frac{19718}{4725}n^4 + \dots \\
b_6 &= \frac{3044}{2835}n^3 - \frac{56914}{42525}n^4 + \dots \\
b_8 &= \frac{6899}{4725}n^4 + \dots
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

S obzirom na to da je, sa stajališta učinkovitosti primjene računala, od oblika (4.1) pogodniji zapis (4.5), i njegove ćemo koeficijente sada izraziti s pomoću treće spljoštenosti n:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = \frac{4}{3}n + \frac{4}{45}n^2 - \frac{124}{81}n^3 - \frac{28976}{6075}n^4 + \dots \\
c_2 &= 2\,b_4 - 4\,b_8 = \frac{92}{45}n^2 + \frac{304}{945}n^3 + \frac{2368}{945}n^4 + \dots \\
c_3 &= 4\,b_6 = \frac{12176}{2835}n^3 - \frac{227656}{42525}n^4 + \dots \\
c_4 &= 8\,b_8 = \frac{55192}{4725}n^4 + \dots
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

LITERATURA

Adams, O. S. (1921): Latitude developments connected with geodesy and cartography with tables, including a table for Lambert Equal-Area Meridional projection. U. S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. №. 76.

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija (Kartografske projekcije), Tehnička knjiga, Zagreb.

Frančula, N., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B. (1984): Obrnuti kartografski zadatak, Geodetski list 1984, 10—12, 289—296.

Frančula, N., Jovičić, D., Žarinac-Frančula, B. i Lapaine, M. (1992): Konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu i obratno primjenom trigonometrijskih redova. Geodetski list 1992, 2, 181—189.
Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen, B. G. Teubner, Leipzig.
Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Vojnogeografski institut, Beograd.
Kavrajskij, V. V. (1958): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vypusk 1, Obščaja teorija kartografičeskih proekcij. Izdanie Upravlenija načal'nika Gidrografičeskoj služby VMF.
Lapaine, M. i Lapaine, M. (1991): Površina elipsoidnog trapeza. Geodetski list 1991, 10—12, 367—373.
Mollweide, C. (1807): Einige Projections — Arten der sphäroidischen Erde. Zach's Monatliche Correspondenz, Bd. XVI, 197—210.
Snyder, J. P. (1982): Map Projections Used by the U. S. Geological Survey. Geological Survey Bulletin 1532, U. S. Government Printing Office, Washington, D C.
Snyder, J. P. (1987): Map Projections — A Working Manual. U. S. Geological Survey Professional Paper 1395. U. S. Government Printing office, Washington.

EQUAL-AREA MAPPING OF THE ROTATIONAL ELLIPSOID ONTO A SPHERE AND VICE VERSA BY USING TRIGONOMETRIC SERIES

The paper investigates the application of trigonometric series in determination of geographic latitude in equal-area mapping of the rotational ellipsoid onto a sphere and vice versa. In place of the usual application of sines of multiple angles, the application of series in powers of double angle cosines is proposed.

Primljeno: 1993-04-10