UDK 528.335.1(497.13):519.2
Pregledni članak

TOČNOST DIJELA TRIANGULACIJE 2. REDA HRVATSKE

Brankica CIGROVSKI-DETELIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. U radu je, na temelju nesuglasica u zatvaranju trokuta, ocijenjena vanjska točnost za dio mreže 2. reda Hrvatske, primjenom metoda matematičke statistike. Promatrani uzorak je mreža od 53 trigonometrijske točke, pa se može smatrati da je točnost uzorka ujedno i dobar pokazatelj vanjske točnosti za cijelu mrežu 2. reda naše Republike. Primijenjeni kriteriji provjere suglasnosti niza nesuglasica s normalnom razdiobom pokazuju da su mjerenja, pored slučajnih, opterećena i preostalih sustavnim (sistematskim) pogreškama mjerenja.

1. UVOD

Rezultati geodetskih mjerenja mogu se smatrati slučajnim događajima, pa se pri njihovoj matematičkoj obradi u potpunosti mogu koristiti teorija vjerojatnosti i matematička statistika. Pod rezultatom mjerenja uvijek se razumijeva određeni broj kojemu se pridjeljuje još i jedinica mjere. Prava vrijednost mjerene veličine nije nikad poznata, ali se rezultati mjerenja nastoje približiti toj vrijednosti izvođenjem prekobrojnih mjerenja. Matematička nada mjerene veličine je aritmetička sredina iz svih mjerenja, kada broj mjerenja teži u beskonačnost. Kako je broj izvedenih geodetskih mjerenja uvijek konačan, to će se, pri primjeni matematičke statistike, svi zaključci donositi na temelju uzorka tj. konačnog broja mjerenja. Uzorak je, u ovom slučaju, dio triangulacijske mreže 2. reda Hrvatske, a želi se ocijeniti točnost za cijelu mrežu 2. reda naše Republike.

2. STATISTIČKA OBRADA NESUGLASICA U ZATVARANJU TROKUTA

Statističko ispitivanje niza nesuglasica u zatvaranju trokuta, koje znači prave pogreške, ima cilj: eliminiranje nesuglasica koje sadrže grube pogreške, zatim utvrđivanje postojanja konstantnih sustavnih pogrešaka, određivanje točnosti u zatvaranju pojedine figure, te provjeru suglasnosti niza nesuglasica s normalnom razdiobom.

Potpuno statističko ispitivanje niza nesuglasica ima smisla samo pri dostatno velikom broju »n«. U praksi se zadovoljavajućim smatra ako je n veće

* Mr. Brankica Cigrovski-Detelić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb

od 100, što je zadovoljeno u ispitivanju nesuglasica promatrane mreže, predočene na slici 1, koja sadrži 114 neovisnih figura (tablica 1).

Tablica 1. Pregled nesuglasica w

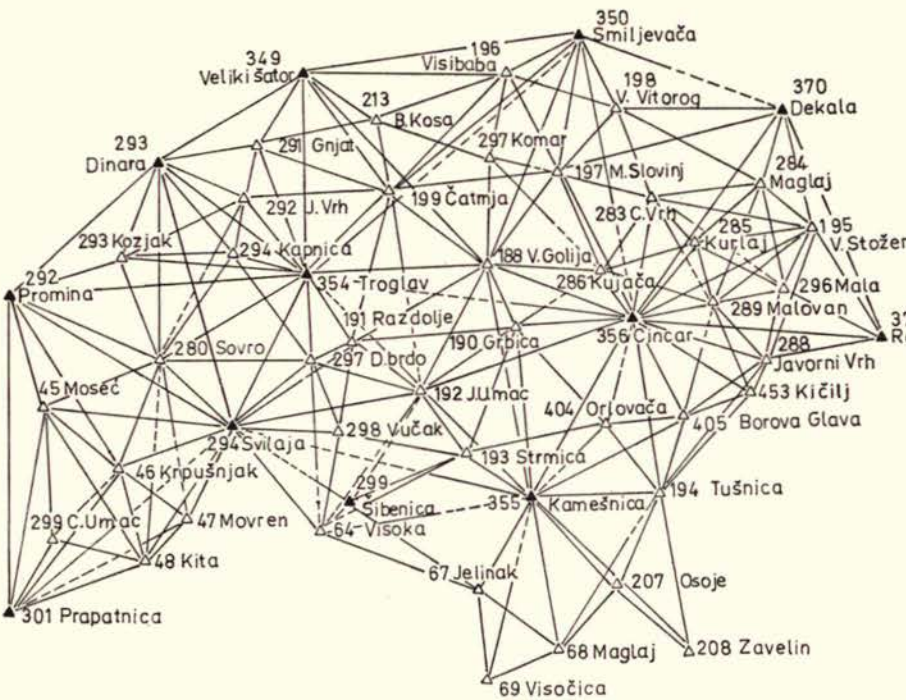
Redni broj	w (″)	Redni broj	w (″)	Redni broj	w (″)
1.	−3.673	39.	0.761	77.	5.382
2.	1.231	40.	−0.857	78.	−1.297
3.	0.111	41.	1.426	79.	−0.520
4.	−2.962	42.	−0.316	80.	1.374
5.	0.471	43.	−3.127	81.	0.635
6.	1.058	44.	−1.637	82.	6.238
7.	2.154	45.	−0.098	83.	0.494
8.	1.575	46.	−6.245	84.	1.411
9.	−0.193	47.	5.569	85.	−1.411
10.	−1.340	48.	2.083	86.	−1.805
11.	3.384	49.	0.444	87.	−8.261
12.	−1.507	50.	−0.846	88.	−0.281
13.	−2.427	51.	−1.847	89.	4.004
14.	1.360	52.	2.221	90.	3.708
15.	3.563	53.	−2.155	91.	2.189
16.	1.672	54.	1.902	92.	7.237
17.	1.760	55.	−0.487	93.	3.194
18.	0.768	56.	−4.226	94.	3.490
19.	−1.586	57.	4.400	95.	5.503
20.	2.140	58.	−1.789	96.	3.495
21.	−4.981	59.	−0.822	97.	7.592
22.	1.309	60.	0.407	98.	5.610
23.	5.570	61.	−1.462	99.	−4.527
24.	4.361	62.	−1.208	100.	−2.230
25.	4.490	63.	4.142	101.	3.901
26.	−4.073	64	−6.352	102	−1.021
27	4.935	65	0.563	103	−3.897
28	1.562	66	−8.815	104	−6.307
29	−4.986	67	−0.873	105	1.056
30	−1.587	68.	−0.861	106.	1.741
31.	−0.628	69.	−1.590	107.	−6.107
32.	0.422	70.	2.538	108.	−4.645
33.	3.547	71.	−0.799	109.	5.893
34.	3.596	72.	2.918	110	3 295
35.	−3.017	73.	−0.414	111.	−0.778
36.	0.075	74.	−2.257	112.	0.255
37.	1.250	75.	−3.874	113.	3.730
38.	−0.742	76.	−0.487	114.	2.187

2.1. *Ispitivanje postojanja grubih pogrešaka*

Za utvrđivanje postojanja grubih pogrešaka u promatranom nizu nesuglasica koristi se kriterij za određivanje granične pogreške W_g, koja se za prave pogreške, prema Haimovu (1963.) računa po formuli:

$$W_g = t_p \, m. \tag{1}$$

U formuli (1) m označuje srednju kvadratnu pogrešku (standardno odstupanje), a za vjerojatnost p najčešće se uzimaju vrijednosti: p = 0.95 i



Slika 1. Skica trigonometrijske mreže

p = 0.99, rjeđe p = 0.999 (9973). Veličine t_p određene su iz tablice Studentove razdiobe, uz f (f = n — 2) stupnjeva slobode. Ako je zadovoljena nejednakost

$$|\Delta w| \leq t_p \, m, \tag{2}$$

može se s vjerojatnošću p tvrditi da rezultat w_n ne sadrži grubu pogrešku. U formuli (2) označuje:

$$\Delta w_i = w_n - \bar{w} \tag{3}$$

Tablica 2. Dopuštena odstupanja (granične pogreške)

W_g	Broj figura	%	$\bar{w} = 0.''25$ $m = 3.''31$
$W_{g0.95} = 6.''54$	110	96.5	$t_{0.95} = 1.98$ (2m)
$W_{g0.99} = 8.''64$	3	2.6	$t_{0.99} = 2.62$ (2.5m)
$W_{g0.999} = 11.''15$	1	0.9	$t_{0.999} = 3.38$ (3m)
	0	0	
Ukupno	114	100	

$$\bar{w} = \frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \dots w_n) \tag{4}$$

pričem je n broj nesuglasica, a w_n vrijednost nesuglasice koja se ispituje. Rezultati ispitivanja niza nesuglasica na postojanje grubih pogrešaka pokazani su u tablici 2.

Iz tablice 2. vidljivo je da mjerenja u mreži ne sadrže grube pogreške uz vjerojatnost $p = 0.9973$ ($p = 0.999$), što približno odgovara dopuštenom odstupanju od 3m koje je propisano Pravilnikom za državni premjer (1951.), članak 86.

2.2. *Ispitivanje niza nesuglasica na postojanje konstantnih sustavnih pogrešaka*

Niz nesuglasica w_i je niz pravih pogrešaka raspoređenih po normalnoj razdiobi. Kriterij zanemarivanja konstantnih sustavnih pogrešaka za promatrani niz nesuglasica je, prema Peroviću (1984.), definiran izrazom:

$$|w| < t_p(f)\, m_w/\sqrt{n}, \quad (f = n - 1). \tag{5}$$

U (5) m_w označuje srednju kvadratnu pogrešku pojedine nesuglasice.

$$m_w = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})^2}. \tag{6}$$

Ako je uvjet (5) zadovoljen, onda se s vjerojatnošću p može tvrditi da u promatranom nizu nesuglasica (uzorku) nema konstantnih sustavnih pogrešaka. Rezultati ispitivanja postojanja konstantnih sustavnih pogrešaka pokazani su u tablici 3.

Tablica 3. Ispitivanje postojanja sustavnih pogrešaka

n	m_w	$t_p(f)_{0.95}$	$t_p(f)\, m_w / \sqrt{n}$	$\lvert\bar{w}\rvert$
114	3.″31	1.98	0.62	0.25

S vjerojatnošću $p = 0.95$ može se tvrditi da u promatranom nizu nesuglasica nema konstantnih sustavnih pogrešaka, jer je u svim slučajevima

$$t_p(f)\, m_w/\sqrt{n} > |w|, \quad \text{uz } t_p(f) = 0.95; \quad (\alpha = 0.05).$$

2.3. *Određivanje točnosti zatvaranja figura*

Ocjena točnosti u geodeziji, prema Čubraniću (1979.), najčešće se određuje srednjom kvadratnom pogreškom m

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w\,w}{n}}, \tag{7}$$

pričem su w prave pogreške, a n njihov broj. Za mjeru točnosti koriste se još i prosječna pogreška t

$$t = \frac{\Sigma |w|}{n} \tag{8}$$

te vjerojatna pogreška r

$$r = \left(\frac{\Sigma \sqrt{|w|}}{n}\right)^2 \tag{9}$$

koja se često koristi u astronomiji te pri ocjeni točnosti preciznog nivelmana i nivelmana visoke točnosti. Kako je već istaknuto, niz nesuglasica bi trebao biti raspoređen po normalnoj razdiobi, pa povezivanje ocjena točnosti m, t i r s parametrom točnosti normalne razdiobe daje sljedeći omjer srednje, prosječne i vjerojatne pogreške:

$$m : t : r = 1 : 1.25 : 1.48. \tag{10}$$

U tablici 4. pokazane su vrijednosti m, t i r, kao i ostali pokazatelji točnosti, koji su, za taj dio mreže,određeni u ranijim radovima (Cigrovski-Detelić, 1989., 1992.).

Tablica 4. Ocjena točnosti

m	t	r	M = 0.″70 $M\sqrt{6}$	m_F = 1.″34 $m_F\sqrt{6}$
3.″28	2.″60	2.″20	1.″71	3.″28

U tablici 4. M označuje prosječnu vrijednost srednje pogreške izjednačenog pravca, izračunanu iz stajališnih izjednačenja (53 točke). Ta je veličina preuzeta iz (Cigrovski-Detelić, 1989.), a m_F je srednja pogreška određena po Ferrerovoj formuli, preuzeta iz (Cigrovski-Detelić, 1992.).

2.4. *Provjera suglasnosti niza nesuglasica s normalnom razdiobom*

Može se ispitati još i to je li skup nesuglasica mreže 2. reda, iz koje je izabran uzorak, normalno distribuiran. Stoga provjera suglasnosti provodi se testom normalne razdiobe i koristi se za n > 100. Za manje uzorke dostatno je provesti samo približnu provjeru suglasnosti s normalnom razdiobom. Za promatranu mrežu provedena je i stroga i približna provjera.

2.4.1. *Test normalne razdiobe (Pearsonov test)*

Testom normalne razdiobe ispituje se hipoteza kojom se tvrdi da skup iz kojeg je izdvojen promatrani uzorak ima funkciju razdiobe oblika (Vranić, 1965; Pavlić, 1970.):

$$\Phi(x, \bar{x}, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} dx, \tag{11}$$

tj. test-hipoteza, prema Peroviću (1984.) glasi:

$$H_0 : f(x) = \Phi_0 (x, \bar{x}, \sigma^2). \tag{12}$$

Veličina za testiranje prema Klaku (1979.)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(h_i - n p_i)^2}{n p_i} \tag{13}$$

ima približno χ^2 razdiobu s $f = r-3$ stupnja slobode. U formulama (11) — (13) označuje se s Φ — vjerojatnost, h — empirijska apsolutna frekvencija, n — broj svih trokuta, P — teorijska vjerojatnost pojedinog razreda, np_i — teorijska apsolutna frekvencija, te i — redni broj razreda.

Test-odluka glasi:

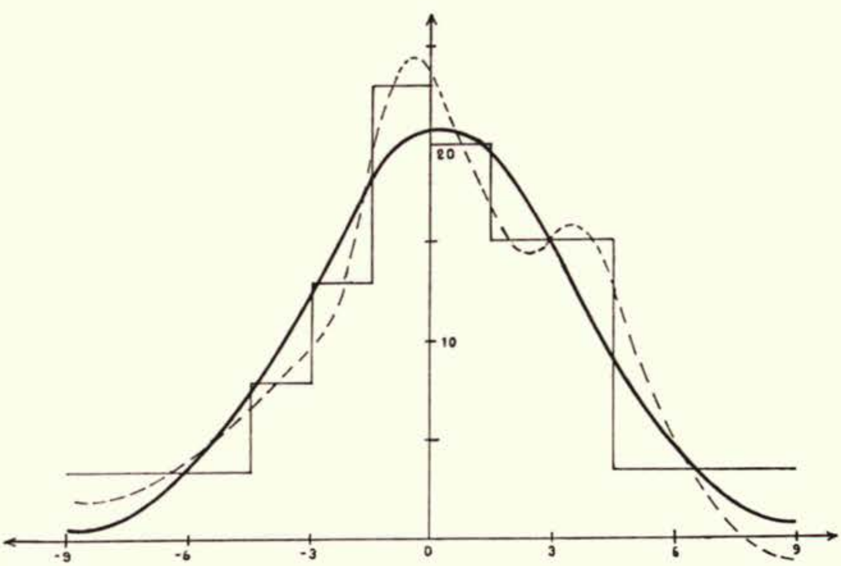
$\chi^2 \leq \chi^2$ (f) — hipoteza (12) se prihvaća

$\chi^2 > \chi^2$ (f) — hipoteza (12) se odbija

Veličina χ^2_p (f) određuje se iz tablice χ^2 razdiobe uz $f = r-3$ stupnja slobode.

Prosječna širina razreda Δ_x, prema Haimovu (1963.) određuje se iz relacije:

$$\Delta_x = \frac{W_n}{r}, \tag{14}$$



Slika 2. Krivulja normalne razdiobe

Kazalo:

——— — granična krivulja histograma nesuglasica

-------- — krivulja (poligon) frekvencija (dijelovi parabola)

____ — teorijska krivulja normalne razdiobe gdje je W_n raspon mjerenja, tj. razlika između najveće negativne i najveće pozitivne vrijednosti nesuglasice, a r je broj razreda:

$$r \leq 5 \log n. \tag{15}$$

Za promatranu mrežu $\Delta_x = 1.''5$, a optimalan broj razreda r = 10. Rezultati provjere hipoteze o normalnoj razdiobi nesuglasica pokazani su u tablici 5. i ilustrirani slikom 2. Rubni razredi u kojima je teorijska apsolutna frekvencija bila manja od pet ($np_i < 5$) spojeni su u jedan razred.

Tablica 5. Elementi krivulje normalne razdiobe

i	x_i	t = u	$\Phi_{(u)}$	P_i	np_i	h_i	$h_i - np_i$	$\frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}$
	−∞		0.0000					
1				0.0735	8.38	10	+1.62	0.31
	−4.5	−1.45	0.0735					
2				0.0870	9.92	8	−1.92	0.37
	−3.0	−0.99	0.1605					
3				0.1360	15.50	13	−2.50	0.40
	−1.5	−0.53	0.2965					
4				0.1730	19.72	23	+3.28	0.55
	+0.0	−0.08	0.4695					
5				0.1790	20.41	20	−0.41	0.01
	+1.5	+0.38	0.6485					
6				0.1508	17.19	15	−2.19	0.28
	+3.0	+0.84	0.7993					
7				0.1034	11.79	15	+3.21	0.78
	+4.5	+1.30	0.9027					
8				0.0973	11.09	10	−1.09	0.11
	+∞		1.0000					
			Σ	1.0000	114.00	114	0.00	2.91
$\chi^2_{0.95}(5) = 11.07$; $\chi^2_{0.29}(5) = 2.91$								

U tablici 5. x_i označuje granicu razreda, t = u — normiranu granicu razreda, a ostale oznake su identične već ranije objašnjenim.

2.4.2. *Ostali kriteriji provjere razdiobe nesulsasica u zatvaranju trokuta s normalnom razdiobom*

Jedan od kriterija za približnu provjeru normalnosti razdiobe je taj da srednja (m), prosječna (t) i vjerojatna (r) pogreška zadovolje kritreij (10). Iz tablice 4. je vidljivo da za mrežu postoji gotovo idealno slaganje s teorijskim omjerom i iznosi:

$$m : t : r = 1 : 1.26 : 1.50.$$

Ostali pokazatelji s pomoću kojih se može približno provjeriti normalnost razdiobe niza nesuglasica jesu asimetrija i eksces. Asimetrija Sk je, prema Haimovu (1963.), definirana s pomoću trećeg momenta μ_3 krivulje normalne razdiobe i jednaka je

$$S_k = \frac{\mu_3}{m^2} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \tag{16}$$

pričem je:

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (w_i - \overline{w})^3 \tag{17}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (w_i - \overline{w})^2 \tag{18}$$

$$m = \sqrt{\mu_2} \text{ — standardno odstupanje}$$

Za simetričnu je krivulju razdiobe $Sk = 0$. Asimetrija, pri razmatranju geodetskih mjerenja, upućuje na zaključak da su mjerenja opterećena sustavnim pogreškama. Dopušteno odstupanje za vrijednost asimetrije određuje se po izrazu:

$$|S_k| \leq m_{S_k} \quad (p = 0.95), \tag{19}$$

gdje je m_{sk} srednja kvadratna pogreška asimetrije, prema Haimovu (1963.)

$$m_{S_k} \cong \sqrt{\frac{6}{n}}. \tag{20}$$

U mnogim se analizama smatra da se empirijska razdioba podudara s teorijskom ako je zadovoljen uvjet (19). Iz tablice 6. je vidljivo da je za promatranu mrežu izraz (19) zadovoljen, što znači da u mjerenjima nema znatnijih sustavnih pogrešaka, pa se može ustvrditi da postoji mala asimetričnost krivulje s obzirom na w (mali sustavni utjecaji), što je zorno ilustrirano slikom 2.

S pomoću trećeg momenta krivulje normalne razdiobe definira se, prema Haimovu (1963.), još jedna veličina koja definira asimetriju

$$\beta_1 = \left(\frac{\mu_3}{m^3}\right)^2, \tag{21}$$

a znači mjeru »nagnutosti« empirijske krivulje normalne razdiobe. Dopušteno odstupanje se za β_1 uz $p = 0.95$ određuje po izrazu:

$$\beta_1 \leq 2\, m_{\beta_1}, \tag{22}$$

gdje je:

$$m_{\beta_1} = 2\, S_k\, m_{S_k} = S_k\, m_E, \tag{23}$$

pričem su m_{sk} i m_E empirijske srednje pogreške asimetrije i ekscesa određene prema formulama (20) i (28).

Iz tablice 6. je vidljivo da su sve vrijednosti β_1 bliske nuli, pa se može smatrati da promatrani niz nesuglasica sadrži male sustavne utjecaje.

Eksces E je definiran izrazom, prema Haimovu (1963.):

$$E = \frac{\mu_3}{m^4} - 3, \tag{24}$$

Tablica 6. Kriteriji provjere s normalnom razdiobom

n	$\bar{w}$	m_w	S_k	m_{Sk}	β_1	$m_{\beta 1}$	E	m_E
114	0.″25	0.″31	−0.22	0.23	0.05	0.10	−0.04	0.46

pričem je:

$$\mu^4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})^4 \tag{25}$$

četvrti moment krivulje normalne razdiobe, koja ima spljoštenost

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{m^4} = 3. \tag{26}$$

Pri normalnoj razdiobi pogrešaka, uz dostatno velik broj mjerenja n ($n \rightarrow \infty$), eksces E jednak je nuli. Međutim, pri ograničenom broju geodetskih mjerenja, za

$$|E| \leq 2\, m_E \tag{27}$$

smatra se da uz vjerojatnost p = 0.95, postoji podudarnost empirijske i normalne razdiobe, pričem je prema Haimovu (1963.):

$$m_E \cong \sqrt{\frac{24}{n}} \tag{28}$$

empirijska (standardna) pogreška ekscesa E. Za spljoštenu krivulju eksces je negativan ($E<0$), što znači da veći broj elemenata skupa ima veće pogreške (manju točnost). Za $E>0$ krivulja je izdužena, odnosno u skupu prevladavaju manje pogreške (točnija mjerenja). Uvjet (27) je zadovoljen pa se prihvaća pretpostavka o normalnoj razdiobi nesuglasica u promatranoj mreži.

Mreža ima mali negativni eksces (E = —0.04) tj. spljoštenu krivulju, što znači da neznatno prevladavaju veće pogreške.

3. ZAKLJUČAK

Kriteriji provjere niza nesuglasica s normalnom razdiobom ukazuju na postojanje malih sustavnih utjecaja. Podudarnost empirijskih i teorijskih krivulja normalne razdiobe vrlo je dobra, usprkos tomu što su nesuglasice određene iz nehomogenih mjerenja, što je pokazano u radu (Cigrovski-Detelić, 1991.), primjenom Barteletovog testa. To upućuje na zaključak da su uzroci nehomogenosti mjerenja za cijelu mrežu poprimili slučajni karakter. Tek se usporedbom unutarnje (M = 0.″70) i vanjske (m_F = 1.″34) točnosti može ukazati na postojanje znatnijih sustavnih pogrešaka u promatranim mjerenjima. Glavni su uzroci sustavnih pogrešaka u mreži 2. reda Hrvatske — mjerenja u različitim epohama (1946. do 1949. godine), primjena različitih tipova instrumenata (Wild T2, Wild T3, Zeiss Th II), kojima su mjerili opažači s različitim osobnim pogreškama, promjenjivi vanjski utjecaji i sl.

4. LITERATURA

Cigrovski-Detelić, B. (1989): Analiza točnosti mjerenja u dijelu trigonometrijske mreže II reda Republike Hrvatske. Magistarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Cigrovski-Detelić, B. (1991): Kritički osvrt na ocjenu točnosti mjerenja u triangulaciji 2. reda Jugoslavije. Geodetski list, 1991, 1—3, 55—13.

Cigrovski-Detelić, B. (1992): Ispitivanje primjene Ferrerove formule za ocjenu vanjske točnosti mreže u kojoj su mjereni pravci girusnom metodom. Geodetski list, 1992, 2, 171—179.

Čubranić, N. (1979): Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Tehnička knjiga, Zagreb.

Haimov, Z. S. (1963): O sheme analiza triangulacii po nevjazkam treugol'nikov. Geodezija i aerofotos'emka, Vypusk 6, Moskva.

Klak, S. (1982): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Pavlić, I. (1970): Statistička teorija i primjena Tehnička knjiga, Zagreb.

Perović, G. (1984): Račun izravnanja I, Teorija grešaka mjerenja, Beograd.

Perović, G. (1984): Račun izravnanja I, Teorija grešaka mjerenja, Beograd.

SGU: (1951): Pravilnik za državni premer, I deo, Triangulacija, Beograd.

Vranić, V. (1965): Vjerojatnost i statistika. Tehnička knjiga, Zagreb.

ACCURACY OF A PART OF THE 2. ORDER TRIANGULATION IN CROATIA

On the basis of some discrepancies with regard to the closing of triangle this paper presents the estimation of the exterior accuracy for a part of 2. order network in Croatia whereby the method of mathematical statistics has been used The observed sample is the network containing 53 trigonometric points, so the accuracy of this sample can be at the same time regarded as an indicator of the exterior accuracy for the whole 2. order network of Croatia. The applied criteria for the verification of accordance among many miscrepancies with normal distribution show that the measurements are burdened with the rest of the systematic measurement errors, beside the accidental ones.

Primljeno: 1992-12-20