UDK 528.91:528.235
Originalni znanstveni članak

IZOMETRIJSKA ŠIRINA I LOKSODROMA

Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK. Razmatraju se uobičajena geografska parametrizacija i izometrijska parametrizacija sfere. Zatim se uočava veza između loksodrome i izometrijske širine na sferi, te se dobiva nova, vrlo jednostavna definicija izometrijske širine.

1. UVOD

Pri razmatranjima u matematičkoj kartografiji najčešće se primjenjuje parametrizacija sfere kojom se na sferu uvodi koordinatni sustav s pomoću geografske širine i duljine. Lako se može vidjeti da se ta standardna parametrizacija može shvatiti kao inverzno preslikavanje kvadratne (uspravne ekvidistantne cilindrične) projekcije.

Međutim, ponekad će biti spretnije uporabiti neku drugu parametrizaciju. Stoga ćemo se pri istraživanju loksodrome na sferi poslužiti parametrizacijom induciranom Mercatorovom (uspravnom konformnom cilindričnom) projekcijom.

Nakon što se uoči veza između loksodrome i izometrijske širine, bit će moguće dati jednu novu, vrlo jednostavnu definiciju izometrijske širine na sferi.

2. GEOGRAFSKA PARAMETRIZACIJA SFERE

Sfera u $\mathbb{R}^3$ polumjera $R>0$ sa središtem u ishodištu je skup

$$\mathscr{S} = \{(X, Y, Z) : X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2\}.$$

Neka je $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $R : \Omega \to \mathscr{S}$, $R(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda, \quad Y = R\cos\varphi\sin\lambda, \quad Z = R\sin\varphi. \tag{2.1}$$

Tada je

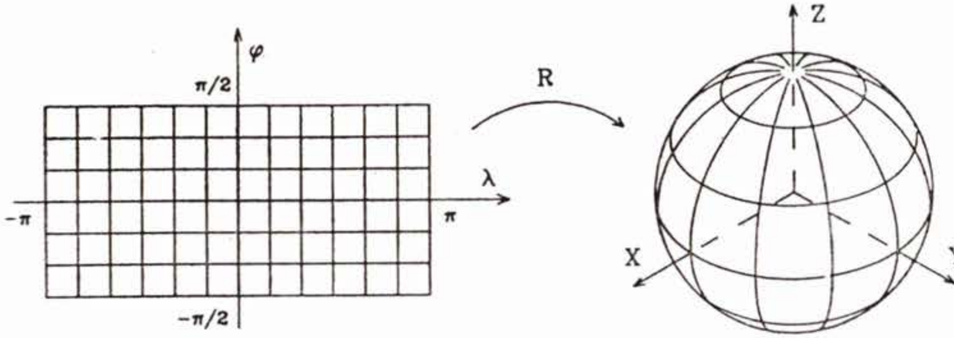
$$X_\varphi = -R\sin\varphi\cos\lambda, \quad Y_\varphi = -R\sin\varphi\sin\lambda, \quad Z_\varphi = R\cos\varphi$$

* Mr. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

$$X_\lambda = -R\cos\varphi\sin\lambda,\quad Y_\lambda = R\cos\varphi\cos\lambda,\quad Z_\lambda = 0$$

$$E = R^2,\quad F = 0,\quad G = R^2\cos^2\varphi,\quad dS^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\lambda^2). \tag{2.2}$$

Parametri φ i λ nazivaju se geografskom širinom, odnosno duljinom. Parametarske φ-krivulje nazivaju se meridijanima, a λ-krivulje paralelama (vidi sliku 1). Takva parametrizacija sfere $\mathscr{S}$ s pomoću mreže meridijana i paralela



Slika 1. Geografska parametrizacija sfere

najčešće se primjenjuje u kartografiji i geodeziji, a mogla bi se nazvati *geografskom parametrizacijom,* jer se s pomoću nje točkama sfere pridružuju *geografske koordinate* φ i λ.

Diferencijal preslikavanja R je

$$dR = R_\varphi\, d\varphi + R_\lambda\, d\lambda. \tag{2.3}$$

odnosno prema Lapaineu (1991) u tangencijalnoj ravnini na sferu u ortonormiranoj bazi $(R_\varphi/\sqrt{E}, R_\lambda/\sqrt{G})$:

$$dR = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Uz oznaku

$$dr = \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

iz relacije (2.4) slijedi

$$dR = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos\varphi \end{bmatrix} dr, \tag{2.6}$$

odakle se može pročitati da je pri geografskoj parametrizaciji sfere lokalno linearno mjerilo uzduž meridijana jednako R i prema tomu konstantno. Dakle, geografska parametrizacija sfere je ekvidistantno preslikavanje (uzduž meridijana) područja Ω na sferu. Lokalno linearno mjerilo uzduž paralela pri tom preslikavanje jednako je $R\cos\varphi$.

Za inverzno preslikavanje geografske parametrizacije može se na temelju izraza (2.6) napisati

$$dr = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos\varphi \end{bmatrix}^{-1} dR = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R\cos\varphi} \end{bmatrix} dR, \tag{2.7}$$

te pročitati da je pri inverznom preslikavanju geografske parametrizacije sfere lokalno linearno mjerilo uzduž meridijana jednako 1/R i prema tomu konstantno. Dakle, inverzno preslikavanje geografske parametrizacije sfere također je ekvidistantno uzduž meridijana. Lokalno linearno mjerilo uzduž paralela pri tom preslikavanju jednako je $1/R\cos\varphi$.

Inverznom preslikavanju geografske parametrizacije sfere u kartografiji odgovara *kvadratna (ekvidistantna uspravna cilindrična) projekcija*. Naime, jednadžbe te kartografske projekcije za sferu polumjera jedan glase (Borčić, 1955):

$$x = \varphi, \quad y = \lambda, \quad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \lambda \in (-\pi, \pi). \tag{2.8}$$

Prema tomu, može se također reći da je geografska parametrizacija inducirana kvadratnom (ekvidistantnom uspravnom cilindričnom) projekcijom sfere polumjera jedan.

3. LOKSODROMA

Neka je Ω područje u $\mathbb{R}^2$ i neka je $R:\Omega\to\mathbb{R}^3$ preslikavanje zadano s

$$R(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \tag{3.1}$$

injeptivno i regularno. Tada se kaže da je $R(\Omega)$ glatka ploha, a preslikavanje R njena regularna parametrizacija. Primjerice, geografska parametrizacija (2.1) regularna je parametrizacija sfere $\mathscr{S}$ bez polova i jednog meridijana. Označimo kao što je uobičajeno

$$E = R_u^2, \quad F = R_u R_v, \quad G = R_v^2, \quad H^2 = EG - F^2$$

$$dS^2 = Edu^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2. \tag{3.2}$$

Za diferencijal duljine luka bilo koje krivulje na plohi u zadanoj točki R(u, v) može se napisati

$$dR = R_u\,du + R_v\,dv, \quad |dR| = dS. \tag{3.3}$$

Specijalno, za diferencijal duljine luka parametarske u-krivulje dR_u imamo

$$dR_u = R_u\,du, \quad |dR_u| = \sqrt{E}\,du. \tag{3.4}$$

Kut $\alpha \in [0, 2\pi]$ između proizvoljne krivulje na plohi i parametarske u-krivulje naziva se *azimutom krivulje na plohi*. Iz (3.3) i (3.4) lako se dobije

$$\cos\alpha\,ds = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}}, \quad \sin\alpha\,dS = \frac{H\,dv}{\sqrt{E}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{H\,dv}{E\,du + F\,dv}. \tag{3.5}$$

Ako parametrizacija ima svojstvo da je $F=0$, tada se izrazi (3.5) pojednostavnjuju i glase:

$$\cos\alpha \, ds S = \sqrt{E} du, \quad \sin\alpha \, dS = \sqrt{G} \, dv, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}. \tag{3.6}$$

Krivulja na plohi koja sa svim u-krivuljama zatvara isti azimut $\alpha \neq k\pi$, $k \in \{0, 1, 2\}$, naziva se *loksodromom*.

Pretpostavimo da je sfera parametrizirana geografskom parametrizacijom (2.1). Tada, u specijalnom slučaju, kad je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ili $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ iz prve formule u (3.6) slijedi da je loksodroma parametarska λ-krivulja, tj. paralela. Općenito, ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ tada se može pokazati da je loksodroma na sferi spirala koja siječe sve meridijane pod istim kutom α. Na slici 2 predočena je loksodroma na sferi u općoj perspektivnoj projekciji.

Slika 2. Loksodroma u općoj perspektivnoj projekciji

Na temelju izraza (2.2) i (3.6) možemo napisati

$$\cos\alpha \, dS = R \, d\varphi, \quad \sin\alpha \, dS = R \cos\varphi \, d\lambda, \quad d\lambda = \operatorname{tg}\alpha \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \tag{3.7}$$

odakle nakon integriranja imamo:

$$1^\circ \text{ ako je } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ili } \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$$\varphi = \varphi_1, \quad S - S_1 = R \cos \varphi_1 (\lambda - \lambda_1); \tag{3.8}$$

$$2^\circ \text{ ako je } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ i } \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$R(\varphi - \varphi_1) = (S - S_1) \cos \alpha,$$

$$\lambda - \lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right), \tag{3.9}$$

gdje su φ_1, λ_1, S_1 integracijske konstante. Jednadžba loksodrome na sferi dobije se uvrštavanjem odgovarajućeg izraza (3.8) ili (3.9) u (2.1).

Uočimo još da je za proizvoljni $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, λ određen prema (3.9) realan broj koji općenito ne mora biti iz intervala $(-\pi, \pi)$, te nema značenje geografske duljine u uobičajenom smislu (vidi sliku 2a). Stoga bi λ određen relacijom (3.9) mogli nazvati *geografskom duljinom u širem smislu.* Odgovarajuću vrijednost geografske duljine λ' iz intervala $(-\pi, \pi)$ dobit ćemo kao ostatak pri dijeljenju s 2π, odnosno točnije primjenom formule:

$$\lambda' = \lambda - 2\pi \, \mathrm{SGN}(\lambda) \, \mathrm{INT}\left(\frac{|\lambda| + \pi}{2\pi}\right), \tag{3.10}$$

gdje je

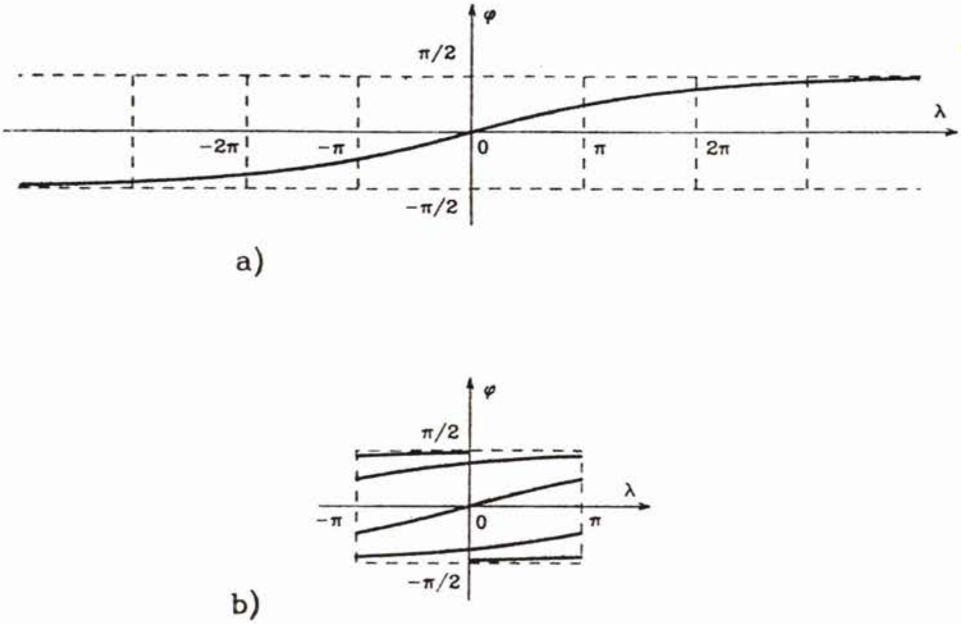
$$\mathrm{SGN}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \lambda > 0 \\ 0 & \lambda = 0, \\ -1 & \lambda > 0 \end{cases}$$

dok je INT(x) najveći cijeli broj koji je manji ili jednak x. Ako je $\lambda \in (-\pi, \pi)$, tj. $|\lambda| < \pi$, tada se geografska duljina λ u širem smislu podudara s uobičajenom geografskom duljinom ($\lambda' = \lambda$). Dok je na slici 3a prikazana loksodroma u koordinatnom sustavu φ, λ, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ geografska širina u širem smislu, na slici 3b prikazana je ta ista loksodroma nakon transformacije (3.10). Prikaz loksodrome na slici 3b identičan je crtežu loksodrome u kvadratnoj (uspravnoj ekvidistantnoj cilindričnoj) projekciji sfere polumjera jedan.

4. IZOMETRIJSKA PARAMETRAZACIJA SFERE

U drugom poglavlju razmatrana je geografska parametrizacija sfere i ustanovljeno je da je ona ekvidistantno preslikavanje uzduž meridijana. Tu parametrizaciju želimo sada promijeniti kako bismo dobili konformno preslikavanje. Pritom ćemo zadržati geografsku duljinu λ kao parametar, a uvesti novi parametar q uz pretpostavku da se taj novi parametar može izraziti kao bijektivna i diferencijabilna funkcija samo geografske širine φ

$$q = q(\varphi), \tag{4.1}$$



Slika 3. a) loksodroma u koordinatnom sustavu φ, λ, (λ geografska širina u širem smislu)
b) loksodroma u kvadratnoj projekciji

te da je

$$q(0) = 0. \tag{4.2}$$

Označimo se r preslikavanje $\Omega \rightarrow \mathbb{R}x(-\pi, \pi)$

$$r(\varphi, \lambda) = (q, \lambda), \quad q = q(\varphi), \quad \lambda = \lambda. \tag{4.3}$$

Za diferencijal preslikavanja r, na osnovi učinjenih pretpostavki možemo napisati

$$dr = \begin{bmatrix} dq \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Neka je $K: \mathbb{R}\, x(\pi, \pi) \rightarrow \mathscr{S}$ nova parametrizacija sfere definirana kao kompozicija inverznog preslikavanja preslikavanja r i geografske parametrizacije R:

$$K = R \circ r^{-1}. \tag{4.5}$$

Za diferencijal preslikavanja K na temelju (4.4) i (2.4) možemo napisati

$$dK = T \begin{bmatrix} dq \\ d\lambda \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

gdje smo označili

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R/q' & 0 \\ 0 & R\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Da bi nova parametrizacija K bila konformno preslikavanje matrica T mora biti dijagonalnog oblika

$$T = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Iz (4.7) i (4.8) proizlazi

$$\mu = R \cos \varphi = \frac{R}{q'}, \tag{4.9}$$

i odatle diferencijalna jednadžba

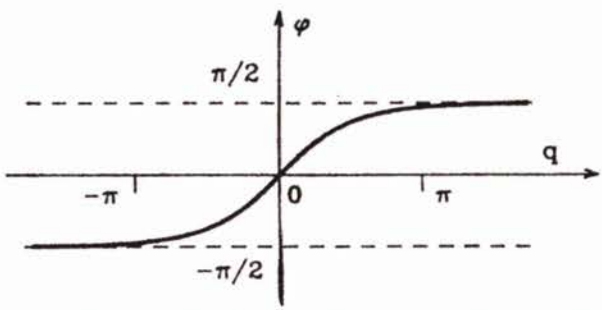
$$dq = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \tag{4.10}$$

Rješenje te jednadžbe uz početni uvjet (4.2) glasi

$$q = \operatorname{lntg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{Arth}(\sin \varphi). \tag{4.11}$$

U formuli (4.11) novi parametar q, koji se naziva *izometrijskom širinom*, izražen je s pomoću geografske širine φ na sferi. Obratno,

$$\varphi = \arcsin(\operatorname{th} q) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\exp(q)) - \frac{\pi}{2}. \tag{4.12}$$



Slika 4. Odnos između geografske i izometrijske širine

Grafički prikaz međusobne ovisnosti geografske i izometrijske širine dan je na slici 4. Nadalje, iz (4.11) lako se vidi da vrijedi

$$\sin \varphi = \operatorname{th} q, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} q}, \tag{4.13}$$

i geografska prelazi u novu parametrizaciju sfere $K: \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to \mathcal{S}, K(q, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadanu formulama

$$X = R \frac{\cos \lambda}{\operatorname{ch} q}, \quad Y = R \frac{\sin \lambda}{\operatorname{ch} q}, \quad Z = R \operatorname{th} q. \tag{4.14}$$

Lako se može vidjeti da su parametarske q-krivulje meridijani, a λ-krivulje paralele na sferi. Iz relacija (4.14) dobijemo

$$X_q = -R\frac{\cos\lambda \operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^2 q}, \quad Y_q = -R\frac{\sin\lambda \operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^2 q}, \quad Z_q = \frac{R}{\operatorname{ch}^2 q},$$

$$X_\lambda = -R\frac{\sin\lambda}{\operatorname{ch} q}, \quad Y_\lambda = -R\frac{\cos\lambda}{\operatorname{ch} q}, \quad Z_\lambda = 0,$$

$$E = G = \frac{R^2}{\operatorname{ch}^2 q}, \quad F = 0, \quad dS^2 = \frac{R^2}{\operatorname{ch}^2 q}(dq^2 + d\lambda^2). \tag{4.15}$$

Posljednja relacija opravdava naziv izometrijske koordinate za parametre q i λ, a parametrizacija (4.14) mogla bi se nazvati *konformnom ili izometrijskom parametrizacijom* sfere. Lokalno linearno mjerilo μ toga preslikavanja u svim je smjerovima jednako, a prema (4.9) iznosi

$$\mu = R\cos\varphi = \frac{R}{\operatorname{ch} q}. \tag{4.16}$$

Inverzno preslikavanje izometrijske parametrizacije sfere također je konformno, a u kartografiji mu odgovara *Mercatorova (uspravna konformna cilindrična) projekcija* sfere. Naime, jednadžbe te projekcije za sferu polumjera jedan glase (Borčić, 1955):

$$x = q = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad y = \lambda, \quad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \lambda \in (-\pi, \pi). \tag{4.17}$$

Prema tomu, može se reći da je izometrijska parametrizacija sfere dana formulama (4.14) inducirana Mercatorovom (uspravnom konformnom cilindričnom) projekcijom sfere polumjera jedan.

5. LOKSODROMA I IZOMETRIJSKA ŠIRINA

U trećem poglavlju vidjeli smo da za $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ i $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ jednadžba loksodrome u koordinatnom sustavu (φ, λ) glasi:

$$\lambda - \lambda_1 = \operatorname{tg}\alpha \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg}\alpha \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \tag{3.9}$$

gdje su φ_1 i λ_1 integracijske konstante. Ako geografsku širinu φ izrazimo s pomoću izometrijske širine q (4.11), jednadžba (3.9) prelazi u linearnu vezu:

$$\lambda - \lambda_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(q - q_1). \tag{5.1}$$

odakle primjenom formula (4.17) neposredno proizlazi poznato svojstvo Mercatorove projekcije u kojoj su slike loksodroma dijelovi paralelnih pravaca oblika:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_1). \tag{5.2}$$

Da su slike loksodroma dijelovi pravaca proizlazi iz toga što je λ u izrazu (5.1) geografska duljina u širem smislu, te je pri primjeni jednadžbi Mercatorove projekcije treba svesti na interval $(-\pi, \pi)$ (vidi formulu (3.10)). Kako je Mercatorova projekcija konformna, kut između slika meridijana i slike loksodrome ostat će jednak odgovarajućem kutu α između meridijana i loksodrome na sferi.

Dobro je poznato da se geografska širina i duljina mogu definirati s pomoću odgovarajućih kutova na sferi. Podsjetimo se kako se to radi. Sfera $\mathcal{S}$ u $\mathbb{R}^3$ polumjera $R>0$ sa središtem u ishodištu jedan je od uobičajenih modela Zemlje.

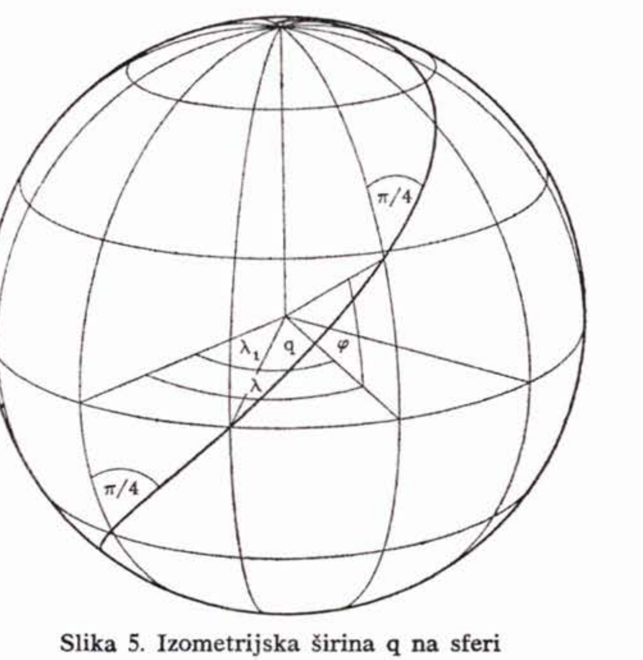
Točka s koordinatama (0, 0, R) naziva se sjevernim polom, a točka (0, 0, —R) južnim polom. Kružnica na sferi koja je jednako udaljena od polova naziva se ekvatorom ili polutarom. Koordinatna os z je pravac koji prolazi polovima sfere i naziva se osom sfere, a koordinatna ravnina xy u kojoj se nalazi ekvator — ravninom ekvatora.

Kut koji zatvara radijus-vektor proizvoljne točke na sferi s ravninom ekvatora naziva se geografskom širinom. Sve točke na sferi koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koja se naziva paralelom ili usporednicom.

Polukružnice na sferi koje spajaju sjeverni i južni pol nazivaju se meridijanima ili podnevnicima. Jedan među njima (najčešće onaj koji prolazi točkom (R, 0, 0)) naziva se nultim ili početnim meridijanom. Geografska duljina proizvoljne točke na sferi je kut između meridijana koji prolazi tom točkom i nultog meridijana. Prema tomu, sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Lako se vidi da su tako definirani pojmovi geografske širine i duljine u skladu s prije definiranom geografskom parametrizacijom sfere.

S obzirom na to da se pojmovi geografska širina i duljina mogu opisati s pomoću odgovarajućih kutova na sferi, postavlja se pitanje — može li se



Slika 5. Izometrijska širina q na sferi

na sličan način interpretirati izometrijska širina. U tu svrhu proizvoljnom točkom s geografskim koordinatama (φ, λ) na sferi $\mathcal{S}$ položimo loksodromu pod azimutom $\pi/4$ (slika 5).

Prema (5.1) jednadžba te loksodrome u koordinatnom sustavu q, λ glasi:

$$\lambda - \lambda_1 = q - q_1. \tag{5.3}$$

Za točku u kojoj loksodroma presijeca ekvator vrijedi

$$\varphi_1 = q_1 = 0. \tag{5.4}$$

i za tu je točku

$$\lambda_1 = \lambda - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \lambda - q. \tag{5.5}$$

Iz relacije (5.5) proizlazi

$$q = \lambda - \lambda_1. \tag{5.6}$$

ili riječima: izometrijska širina proizvoljne točke na sferi jednaka je razlici geografske guljine λ promatrane točke i geografske duljine (u širem smislu) λ_1 točke u kojoj loksodroma povučena kroz promatranu točku pod azimutom $\pi/4$ (45°) siječe ekvator.

Dakle, iako izometrijska širina u svome nazivu sadrži riječ »širina« i obično se na sferi formalno definira s pomoću geografske širine relacijom (4.11), upravo je objašnjeno kako se ona može vrlo jednostavno prikazati na sferi kao razlika dviju odgovarajućih geografskih duljina.

LITERATURA

Borčić, B. (1955) Matematička kartografija (Kartografske projekcije). Tehnička knjiga, Zagreb.

Lapaine, M. (1991) Suvremeni pristup kartografskim projekcijama. Magistarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

ISOMETRIC LATITUDE AND LOXODROME

The usual geographic parametric representation and the isometric parametric representation of a sphere are discussed Then, a new and very simple definition of the isometric latitude is established on the basis of the relation between the loxodrome and the isometric latitude on the sphere.

Primljeno: 1992-10-17