

## UTJECAJ SILE TRENJA PRI MJERENJU DULJINA VRPCOM PO TERENU

Miljenko SOLARIĆ i Asim BILAJBEGOVIĆ — Zagreb\*

*SAŽETAK. U radu se analizira utjecaj sile trenja klizanja na rezultat mjerenja duljina vrpcom položenom po terenu. Zaključuje se da se zbog utjecaja trenja između vrpce i terena računanje istezanja vrpce mora obavljati sa silom koja je jednaka aritmetičkoj sredini očitavanja na dinamometrima na početku i na kraju mjerene duljine. To nije u skladu s postojećim Pravilnikom za državni premjer II-A (1956) bivše Jugoslavije. Geodeti će se i u budućnosti koristiti vrpčama pri mjerenju duljina i pored mjerenja duljina elektrooptičkim daljinomjerima, jer vrpce posebno kod kraćih duljina daju pouzdanije podatke.*

### 1. UVOD

Danas geodeti najčešće mjere duljine dužina elektroničkim daljinomjerima. Međutim, odlučili smo i pored toga objaviti ovaj rad jer se još uvijek geodeti koriste vrpčama pri mjerenju duljina, a i u bližoj budućnosti će to tako biti iz dva razloga.

U prvom redu zbog praktičnosti osobito pri mjerenju duljina kratkih dužina, kao na primjer u inženjerskoj geodeziji u tvorničkim halama.

U drugom redu, jer pri mjerenju duljina klasičnim (običnim) elektroničkim daljinomjerima posebno velike razlike (pogreške) potječu od promjenjivosti adicijske konstante, te pri njihovoj upotrebi posebno kod montažnih elemenata čeličnih konstrukcija mogu nastupiti teškoće. U tim slučajevima bolje je (sigurnije) mjeriti duljine vrpcom nego običnim geodetskim elektroničkim daljinomjerima. Uostalom ni precizni elektronički daljinomjer Mekometar 5000 normalno ne može mjeriti duljine manje od 20 m.

U mehanici, tj. statici (Mišić 1968, Andrejev 1969. ili Muftić 1983) proučava se ravnotežno stanje tijela kad se u račun uzima i sila trenja klizanja.

Pri mjerenju vrpcom položenom po terenu na dodirnim plohama pojavljuje se sila trenja klizanja, koja svojim djelovanjem mijenja silu zatezanja vrpce između njenih pojedinih točaka. Upravo s toga razloga i istezanje vrpce na njenim raznim mjestima bit će različito, te ako se pretpostavi da je konstantna sila zatezanja u vrpci, tada će se učiniti stanovita pogreška. U ovom

\* Prof. dr. Miljenko Solarić i prof. dr. Asim Bilajbegović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 41000 Zagreb, Kačićeva 26.

se radu želi upravo ispitati utjecaj sile trenja na njeno produljenje, kad se mjeri vrpcom položenom po horizontalnom, koso položenom i malo ispuščenom terenu. Naime, u Pravilniku za državni premjer II-A (1956) bivše Jugoslavije napisano je da se sila zatezanja vrpce mora nominalno povećati za iznos sile trenja koja se prethodno izmjeri. To, kao što će se vidjeti iz daljnje analize, nije točno. Svi izvodi učinjeni su uz pretpostavku da je koeficijent trenja klizanja između vrpce i podloge jednak po čitavoj duljini vrpce.

## 2. UTJECAJ SILE TRENJA NA REZULTAT IZMJERENE DULJINE VRPCOM POLOŽENOM NA HORIZONTALNU HRAPAVU PODLOGU

Razlika mjerene duljine vrpcom položenom na hrapavu horizontalnu podlogu i na idealno glatku horizontalnu podlogu pojavljuje se zbog toga što:

- na idealno glatkoj podlozi sila zatezanja vrpce u svim njenim točkama je konstantna, a
- na hrapavoj podlozi sila zatezanja vrpce u njenim raznim točkama bit će različita.

Naime, iz otpornosti materijala (Alfirević 1989. ili Hlitičijev 1963.) poznat je *Hookeov zakon*\* o proporcionalnosti uzdužne deformacije i naprezanja koji se može izraziti jednadžbom:

$$\Delta l = \frac{F}{E \cdot A} \cdot l, \quad (1)$$

gdje je:  $\Delta l$  — produljenje vrpce pod djelovanjem sile  $F$

$l$  — ukupna duljina vrpce

$A$  — površina poprečnog presjeka vrpce

$E$  — modul elastičnosti vrpce ili Youngov modul, a može se izraziti jednadžbom  $E = p/\epsilon$

$\epsilon$  — uzdužna deformacija ( $\epsilon = \Delta l/l$ )

$p$  — naprezanje ( $p = F/A$ )

Budući da je sila zatezanja u vrpici položenoj na hrapavi horizontalni pod promjenljiva, produljenje vrpce u tom slučaju računat će se iz izraza:

$$\Delta l = \frac{1}{E \cdot A} \cdot \int_0^l F_x \cdot dx, \quad (2)$$

gdje je:

$F_x$  — sila zatezanja vrpce na udaljenosti  $x$  od početne točke  $A$

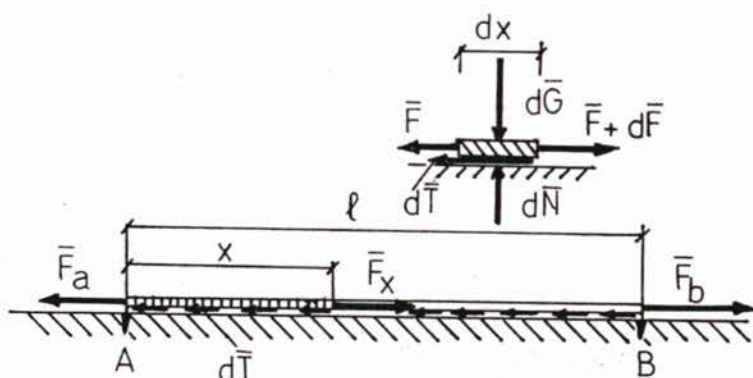
Iz uvjeta ravnoteže po osi  $x$  za dio vrpce  $x$  (sl. 1) slijedi:

$$F_x = F_a + \int_0^x dT, \quad (3)$$

gdje je:

$$\int_0^x dT = \frac{T}{l} \int_0^x dx = \frac{T}{l} \cdot x, \quad (4)$$

\* Robert Hooke, engleski fizičar, formulirao ga je 1678. godine.



Slika 1. Mjerenje duljine vrpcom položenom na horizontalnu hrapavu podlogu ( $F_a < F_b$ ) i izdvojeni elementarni dio vrpce u statičkoj ravnoteži ( $dT$  — diferencijal sile trenja,  $dG$  — diferencijal vlastite težine,  $dN$  — diferencijal normalne reakcije podloge i  $dF$  — diferencijal sile zatezanja).

a  $T$  — ukupna sila trenja na čitavoj duljini vrpce  $l$ , kad se pretpostavi da je sila trenja klizanja jednako raspoređena po čitavoj duljini vrpce.

Nakon uvrštenja izraza (4) u (3), integriranja u jednadžbi (2), te uvrštenja granica, bit će:

$$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \left( F_a \cdot l + \frac{T}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \right) = \frac{l}{E \cdot A} \left( \frac{2F_a + T}{2} \right). \quad (5)$$

Budući da je iz uvjeta ravnoteže za čitavu vrpcu:

$$F_b - F_a - T = 0, \quad (6)$$

bit će:

$$F_b = F_a + T. \quad (7)$$

Kad se izraz (7) uvrsti u jednadžbu (5), dobije se da je:

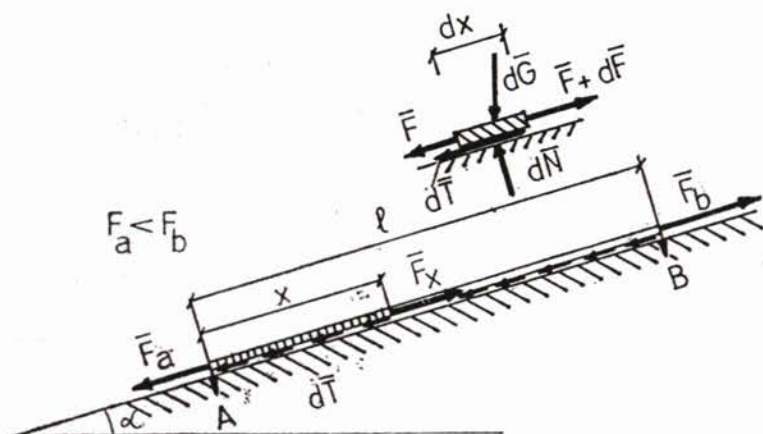
$$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \left( \frac{F_a + F_b}{2} \right). \quad (8)$$

Iz jednadžbe (8) slijedi da se *produljenje vrpce mora računati s aritmetičkom sredinom sile zatezanja na početku i na kraju vrpce kad se mjeri duljina na hrapavoj horizontalnoj podlozi.*

### 3. UTJECAJ SILE TRENJA NA REZULTAT IZMJERENE DULJINE VRPCOM POLOŽENOM NA HRAPAVU KOSINU

Iz uvjeta ravnoteže po osi  $x$  za dio vrpce  $x$  (sl. 2) slijedi da je sila zatezanja u vrpici na udaljenosti  $x$  izražena jednadžbom:

$$F_x = F_a + G_x \cdot \sin \alpha + \int_0^x dT, \quad (9)$$



Slika 2. Mjerenje duljine vrpcom položenom na hrapavu kosinu kad je sila  $F_b > F_a$  i izdvojeni elementarni dio vrpce u stanju ravnoteže.

gdje je:  $G_x$  — težina vrpce duljine  $x$ , tj.

$$G_x = q \cdot x, \quad (10)$$

a  $q$  — težina vrpce po dužnom metru vrpce.

Kad se izraz (10) uvrsti u (9), poslije toga to i izraz (4) u jednadžbu (2), integrira i uvrste granice, bit će:

$$\Delta l = \frac{1}{E \cdot A} \left( F_a \cdot l + (q \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{l^2}{2} + T \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{l}{E \cdot A} \cdot \left( \frac{2F_a + q \cdot l \sin \alpha + T}{2} \right). \quad (11)$$

Budući da je iz uvjeta ravnoteže za čitavu vrpцу:

$$F_b - F_a - G \cdot \sin \alpha - T = 0, \quad (12)$$

gdje je ukupna težina vrpce jednaka:

$$G = q \cdot l, \quad (13)$$

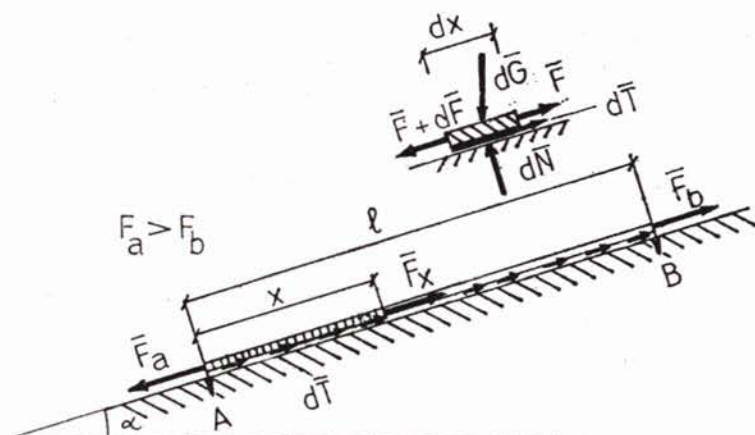
bit će:

$$F_b = F_a + q \cdot l \cdot \sin \alpha + T. \quad (14)$$

Kad se izraz (14) uvrsti u jednadžbu (11), dobije se da je:

$$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \cdot \left( \frac{F_a + F_b}{2} \right). \quad (15)$$

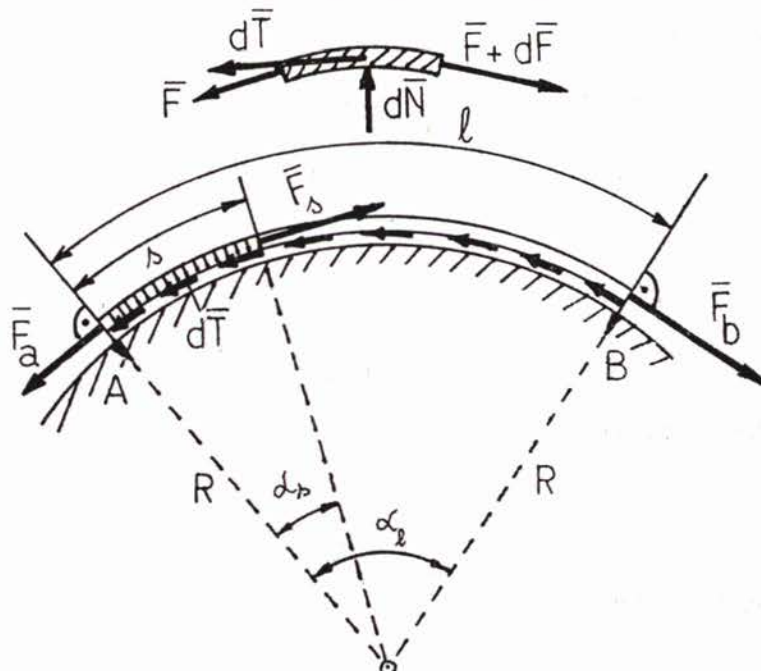
U slučaju kad je  $F_a > F_b$  (sl. 3), nakon kraćeg izvoda, dobije se također isti izraz (15). Dakle, iz jednadžbe (15) slijedi da se produljenje vrpce mora računati s aritmetičkom sredinom sila zatezanja na početku i kraju vrpce kad se mjeri po hrapavoj kosini bez obzira na to je li  $F_b > F_a$  ili  $F_a > F_b$ .



Slika 3. Mjerenje duljine vrpcom položenom na hrapavu kosinu kad je sila  $F_a > F_b$  i izdvojeni elementarni dio vrpce u statičkoj ravnoteži.

#### 4. UTJECAJ SILE TRENJA NA REZULTAT IZMJERENE DULJINE VRPCOM POLOŽENOM NA HRAPAVU MALO IZBOČENU PODLOGU

Mala zakrivljenost podloge teško se može primijetiti. Primjerice, sve ceste imaju zaobljene nivelete, te se takvi slučajevi — da je hrapava podloga na koju se postavlja mjerna vrpca ispuščena mogu dogoditi.



Slika 4. Mjerenje duljine vrpcom položenom po malo ispuščenoj podlozi kad je sila  $F_b > F_a$  i izdvojeni elementarni dio vrpce u statičkoj ravnoteži i ako je zanemarena njena vlastita težina.

U statici se (Mišić, 1968. ili Muftić, 1983) proučilo tzv. užetno trenje, tj. kad se uzela u obzir i sila trenja klizanja između užeta i nepomične cilindrične plohe polumjera  $R$ . Dobilo se da je sila u užetu na proizvoljnom mjestu određena izrazom:

$$F_s = F_a \cdot e^{f \cdot \alpha_s} = F_a \cdot e^{\frac{f}{R} \cdot s}, \quad (16)$$

gdje je:

- $F_s$  — sila u užetu (vrpci) u promatranom presjeku na udaljenosti  $s$  od početne točke  $A$
- $F_a$  — sila na početku užeta
- $e$  — prirodni broj
- $f$  — koeficijent trenja klizanja između užeta i cilindrične plohe polumjera  $R$
- $s$  — duljina užeta od početne točke do promatranoga zamišljenog presjeka

Ako se izraz (16) uvrsti umjesto  $F_x$  u jednadžbu (2) i  $ds$  umjesto  $dx$ , bit će:

$$\Delta l = \frac{F_a}{E \cdot A} \cdot \int_0^l e^{\frac{f}{R} \cdot s} \cdot ds. \quad (17)$$

Nakon integriranja i uvrštenja granica, dobije se da je:

$$\Delta l = \frac{F_a}{E \cdot A} \cdot \left( \frac{R}{f} \right) \cdot (e^{\frac{f}{R} \cdot l} - 1). \quad (18)$$

Budući da je za  $s = l$  i  $F_s = F_b$ , iz jednadžbe (16) slijedi:

$$F_b = F_a \cdot e^{\frac{f}{R} \cdot l}. \quad (19)$$

Ako se to uvrsti u jednadžbu (18), bit će:

$$\Delta l = \frac{1}{E \cdot A} \left( \frac{R}{f} \right) \cdot (F_b - F_a). \quad (20)$$

Iz jednadžbe (19) slijedi da je:

$$\frac{R}{f} = \frac{l}{\ln \frac{F_b}{F_a}}. \quad (21)$$

Uvrsti li se to u jednadžbu (20), bit će:

$$\Delta l = \frac{l}{E \cdot A} \left[ \frac{1}{\ln \frac{F_b}{F_a}} (F_b - F_a) \right]. \quad (22)$$

Ovo je točna formula. Međutim, ako se funkcija  $\ln$  rastavi u red:

$$\ln \frac{F_b}{F_a} = 2 \left[ \frac{F_b - F_a}{F_b + F_a} + \frac{(F_b - F_a)^3}{3(F_b + F_a)^3} + \dots \right], \quad (23)$$

kad je  $(F_b/F_a) > 0$  te ako se uzme samo prvi član reda, bit će:

$$\ln \frac{F_b}{F_a} = 2 \frac{F_b - F_a}{F_b + F_a}. \quad (24)$$

Ako se sada to uvrsti u jednadžbu (22), dobije se:

$$\Delta l \doteq \frac{l}{E \cdot A} \left[ \frac{F_b + F_a}{2} \right], \quad (25)$$

tj. da ovo produljenje približno ovisi o aritmetičkoj sredini izmjerenih sila zatezanja vrpce na njenom početku i kraju.

Da bi se usporedili dobiveni rezultati po točnoj formuli (22) i približnoj (25), izračunane su vrijednosti u njihovim uglatim zagradama za odabrane sile te ih se uvrstilo u tablicu 1. Za posljednju, u tablici 1, ekstremno veliku

Tablica 1. Usporedba dobivenih vrijednosti u uglatim zagradama po formuli (22) i (25) gdje su sile izražene u N

$F_a$	$F_b$	[...] (25)	[...] (22)	$\Delta = [\dots](25) - [\dots](22)$
50 N	52,5 N	51,25 N	51,24 N	0,01 N
50	55,0	52,50	52,46	0,04
50	57,5	53,75	53,66	0,09
50	60,0	55,00	54,85	0,15

razliku sila zatezanja  $F_b - F_a$  pogreška računanja vrijednosti u uglatoj zagradi po približnoj formuli ne premašuje 0,15 N. Dakle, može se zaključiti da se, praktično uvijek, sa zadovoljavajućom točnošću može koristiti približna formula (25).

U slučaju kad je između točaka A i B mala udubina, tako da je ona manja od njenog progiba, tada se isto zbog hrapave podloge i povlačenja vrpce pojavljuje sila trenja klizanja. Međutim, u tom slučaju ona će biti manja, pa će se također mjerenjem sile zatezanja na jednoj i drugoj strani dobiti dobri rezultati.

## 5. POTREBNA TOČNOST MJERENJA SILE ZATEZANJA MJERNE VRPCE

Iz formule (8) može se odrediti s kojom se točnošću mora mjeriti sila zatezanja mjerne vrpce a da se njeno produljenje odredi s određenom srednjom pogreškom. Nakon kraćeg izvoda dobije se da je:

$$m_F = \frac{E \cdot A \cdot \sqrt{2}}{l} \cdot m_{\Delta l}. \quad (26)$$

Na osnovi ove formule za razne duljine vrpce učinjena je tablica 2. sa sljedećim njenim značajkama:

$$E = 200\,000 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{modul elastičnosti})$$

$$A = 7,2 \text{ mm}^2 \quad (\text{površina poprečnog presjeka})$$

$$m_{\Delta l} = 0,1 \text{ mm} \quad (\text{srednja kvadratna pogreška produljenja vrpce})$$

Budući da su dinamometri (vage) obično namijenjeni za mjerenje mase, u tablici 2, u trećem stupcu, potrebna točnost natezanja vrpce izražena je i

Tablica 2. Potrebna je srednja pogreška određivanja sile zatezanja vrpce, tj. mase utega da bi se produljenje vrpce odredilo sa srednjom pogreškom  $m_{\Delta l} = 0,1 \text{ mm}$

$l$ (m)	$m_F$ (N)	$m_F$ (kg)
10	20,4	2,08
20	10,2	1,04
30	6,8	0,69
40	5,1	0,52
50	4,1	0,42

u kilogramima. Iz izraza (26) i tablice 2. vidi se da potrebna točnost određivanja sile zatezanja vrpce ovisi o duljini mjerene duljine, te da pri većim duljinama treba točnije odrediti silu zatezanja vrpce.

## 6. ZAKLJUČAK I PRIJEDLOG

U Pravilniku za državni premjer II-A (1956), na str. 119. u točki 8, piše da trenje vrpce predstavlja dosta ozbiljan uzrok pogrešaka, jer smanjuje silu zatezanja. Stoga se u Pravilniku predlaže da se najprije odredi sila trenja tako da se vrpca pomakne s mjesta. U tom trenutku treba očitati silu na dinamometru; ona predstavlja traženu silu trenja klizanja između vrpce i zemljišta.

U posljednjem stavku točke 8. piše: »Pri mjerenju strana gradske poligonometrijske mreže trenje se uzima u obzir tako da se normalna sila zatezanja poveća za njegov iznos (tj. za silu trenja). Ali pri računanju popravki za silu zatezanja to se povećanje ne uzima u obzir«.

Međutim, iz analize u prethodnim poglavljima i dobivenim formulama za sva tri slučaja:

- hrapava horizontalna podloga,
- hrapava kosina i
- hrapava malo izbočena ili malo udubljena podloga,

slijedi da se pri točnom mjerenju vrpcom po hrapavoj podlozi vrpce moraju natezati dinamometrima na oba kraja, a produljenje vrpce se računa s aritmetičkom sredinom sile zatezanja oba kraja.

Na kraju bi se moglo predložiti da se pri visoko točnom mjerenju duljina po hrapavim podlogama ono izvodi tako da se vrpca i dinamometri očitavaju u trenutku prije početka gibanja vrpce (tj. tako da je  $F_b > F_a$ ) jedan-



*put u jednom smjeru, a drugi put u drugom smjeru, da je  $F_b < F_a$  slično kao i pri mjerenju duljina invarskim žicama »vuče« i »gura«.*

Mora se napomenuti da su u radu dani ukupni iznosi rastezanja vrpca, a kako je vrpca pri kompariranju zatezana isto nekom silom  $F_0$ , treba je oduzeti od sile  $F_a$  i od  $F_b$ .

#### LITERATURA

- Alfirević, I. (1989): Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb.  
Andrejev, V. (1969): Mehanika I dio — statika, Tehnička knjiga, Zagreb.  
Hlitčijev, J., Vrečko, M. (1963): Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd.  
Macarol, S. (1968): Praktična geodezija, Tehnička knjiga, Zagreb.  
Mišić, R. (1968): Mehanika za studente prvog samostalnog stupnja. Sveučilište u Zagrebu — Geodetski fakultet Zagreb.  
Muftić, O. (1983): Mehanika — statika, Tehnička knjiga, Zagreb.  
Pravilnik (1956): Pravilnik za državni premjer II—A dio, Osnovni radovi na geodetskom premjeru, Savezna geodetska uprava — Geokarta, Beograd.

#### INFLUENCE OF THE FRICTION FORCES BY MEASURING THE LENGTH WITH TAPE ON THE GROUND

The influence of the friction forces on the result of length measuring with the tape layed on the ground is analysed in the work. One has come to the conclusion that the elasticity of the tape has to be calculated by means of the force which is equal to the the arithmetic mean of the dynamometer reading at the beginning and at the end of the length to be measured, because of the friction influence occurring between the tape and the ground. It is not compatible with the existing Book of Regulations for State Survey II-A (1956) issued in the former Yugoslavia.

Primljeno: 1992-07-17.