UDK 528.236
Pregledni članak

DATUM GEODETSKIH MREŽA I S-TRANSFORMACIJE

Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Pokazan je postupak promjene datuma već uspostavljenih geodetskih mreža primjenom S-transformacija. Objašnjene su mogućnosti definiranja različitih datuma geodetskih mreža (konvencionalni i optimalni datum) i transformacija između tih datuma. Predočen je primjer primjene S-transformacija pri promjeni datuma trilateracijske mreže.

1. UVOD

Izjednačenjem geodetskih mreža primjenom funkcionalnog dijela Gauss-Markovog modela i principa najmanjih kvadrata odgovarajući se datum (referentni koordinatni sustav) definira u sklopu postupka izjednačenja. Pritom je neizmjeran teorijski broj međusobno različitih definicija datuma. Moguća je definicija tzv. optimalnog datuma mreža uz određene uvjete (Mittermayer, 1971) ili niza različitih konvencionalnih datuma. Njihov broj je, u praktičnom pogledu, određen odnosom ukupnog broja točaka mreže (tj. nepoznanica položaja točaka) i pripadnih parametara datuma (Welsch, 1979).

U konkretnim situacijama, pri izjednačenju jedne te iste mreže, mogućnosti su odabira datuma ipak znatno smanjene. Naime, odabir odgovarajućeg datuma neposredno ovisi o brojnim posebnim uvjetima koji proizlaze iz namjene mreže, konfiguracije i geomehaničkih svojstava tla, načina stabilizacije i dr.

U praksi se, uslijed različitih zahtjeva, može pojaviti potreba za promjenom datuma već izjednačenih geodetskih mreža. U takvim se slučajevima zadovoljavajuće rješenje postiže na dva različita načina. Prvi se svodi na ponavljanje cijelovitog postupka izjednačenja, ali uz novouvedene parametre datuma mreže, dok se drugi temelji na primjeni linearnih transformacija između različito definiranih datuma (koordinatnih sustava).

Koordinatni se sustavi, određeni uz različite datume, po položaju i orijentaciji osi u prostoru malo razlikuju uslijed uvođenja približnih vrijednosti nepoznanica položaja svih točaka mreže prije izbora datuma i činjenice da relativne veličine u postupku izjednačenja (mjerenja, izjednačene vrijednosti mjerenja i pripadna ocjena točnosti) ne ovise o njegovu izboru. Odnosno, vektori nepoznanica (parametara Gauss-Markovog modela) i pripadna

* Mr. Nevio Rožić, dipl. inž., Geodetski fakultet, Kačićeva 26, Zagreb.

ocjena točnosti, iako neposredno ovise o definiciji datuma, međusobno se znatnije ne razlikuju. Referentni koordinatni sustavi mogu se stoga smatrati međusobno diferencijalno sličnim koordinatnim sustavima, te se primjenom odgovarajućih linearnih transformacija jedan sustav može transformirati u drugi i obrnuto. Pritom se zadržava ista geometrija mreže, bez ikakvih deformacija oblika izazvanih transformacijom.

Takve linearne transformacije počele su se primjenjivati pri kraju šezdesetih i u početku sedamdesetih godina (Baarda 1968, 1971, 1973; Mierlo, 1980), a nazvane su sličnim transformacijama (Similarity transformations) ili skraćeno S-transformacije. Najpoznatija i u geodeziji najviše korištena slična transformacija je Helmertova transformacija.

Budući da su S-transformacije neposredno vezane uz mogućnosti naknadne promjene datuma već izjednačenih geodetskih mreža, sastavni su dio dizajna nultog reda u sklopu postupka optimiranja geodetskih mreža (Ninkov, 1989).

2. DEFINIRANJE DATUMA

Primjenom klasičnih postupaka izjednačenja temeljenih na regulariziranju izvorno singularnih normalnih jednadžbi (Rožić, 1991), prvenstveno posrednih mjerenja s dodatnim fiktivnim mjerenjima (Pelzer, 1974; Rožić, 1992) ili posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica (Mittermayer, 1972; Caspary, 1988), datum geodetskih mreža određuje se odgovarajućim postavom matrice koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja A, odnosno matrice koeficijenata u uvjetima nepoznanica B. Uobičajeno je da se pripadni vektori prikraćenih fiktivnih mjerenja l i nesuglasica ω u uvjetima nepoznanica uvode kao nulti vektori, iako se može postupiti i drugačije (Stevanović, 1987).

Struktura matrica A i B, budući da je korištenjem oba navedena postupka izjednačenja, uz odabir istog datuma, zadovoljeno $A^t = B$, može se pri izjednačenju mreže predočiti izrazom

$$\underset{u\times d}{B} = \underset{u\times u}{E}\ \underset{u\times d}{G} \tag{1}$$

gdje su:

u — ukupan broj nepoznanica položaja točaka mreže

d — defekt datuma mreže

G — matrica svojstvenih vektora g_i ($i = 1, 2, \ldots, d$) matrice koeficijenata pripadnih normalnih jednadžbi N za svojstvene vrijednosti λ_i ($i = 1, 2, \ldots, d$) jednake ništici

E — dijagonalna matrica (jedinična ili ovisno o datumu, matrica rastavljena na jediničnu i nulte blok-matrice)

Pri izjednačenju geodetskih mreža (nivelmanskih, trilateracijskih, triangulacijskih) matrica G određuje se s pomoću približnih vrijednosti nepoznanica položaja točaka mreže T_i (X_i^0, Y_i^0, H_i^0) ($i = 1, 2, \ldots, t$), gdje je t ukupan broj točaka mreže. U najopćenitijem slučaju, pri izjednačenju prostorne geodetske mreže, ova je matrica u nenormiranom obliku

$$\underset{u \times d}{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} t_x & t_y & t_h & r_x & r_x & r_h & m_{xyh} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & H_1^0 & -Y_1^0 & X_1^0 \\ 0 & 1 & 0 & -H_1^0 & 0 & X_1^0 & Y_1^0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_1^0 & -X_1^0 & 0 & H_1^0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & H_2^0 & -Y_2^0 & X_2^0 \\ 0 & 1 & 0 & -H_2^0 & 0 & X_2^0 & Y_2^0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_2^0 & -X_2^0 & 0 & H_2^0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & H_t^0 & -Y_t^0 & X_t^0 \\ 0 & 1 & 0 & -H_t^0 & 0 & X_t^0 & H_t^0 \\ 0 & 0 & 1 & Y_t^0 & -X_t^0 & 0 & Y_t^0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ T_1 \\ \\ \\ T_2 \\ \\ T_i \\ \\ \\ T_t \\ \\ \end{array} \qquad (2)$$

Pojedini stupci ove matrice odgovaraju točno određenom defektu datuma (translacije t_x, t_y, t_h, rotacije r_x, r_y, r_h i promjene mjerila m_{xyh}), odnosno istovjetnom stupnju slobode gibanja mreže u pripadnom referentnom koordinatnom sustavu (Welsch, 1979). U konkretnom slučaju, s obzirom na dimenzije koordinatnog sustava (jednodimenzionalan, dvodimenzionalan ili trodimenzionalan), vrst geodetske mreže (nivelmanska, triangulacijska ili trilateracijska) i vrst provedenih mjerenja, oblikovanje matrice G provodi se zadržavanjem samo onih stupaca koji odgovaraju defektima datuma koji su u njoj prisutni. Ujedno se izostavljaju i pojedini reci ove matrice, jer svakoj točki mreže T_i ($i = 1, 2, \ldots, t$) odgovaraju koordinate u ovisnosti o dimenzijama koordinatnog sustava.

Za određenu vrst mreže i mjerenja način određivanja pojedinih elemenata matrice G i njena struktura poznati su i prije neposrednog provođenja postupka izjednačenja. Teorijski oblik matrice G slijedi iz primjene Helmertove transformacije geodetskih mreža pri transformaciji tih mreža između različito definiranih koordinatnih sustava (datuma). U postupku Helmertove transformacije matrica G jednaka je matrici koeficijenata pripadnih jednadžbi popravaka (Perović, 1986).

U izrazu (1), ovisno o datumu koji se u sklopu postupka izjednačenja želi definirati, uvodi se odgovarajući oblik matrice E koja se stoga može nazvati datumskom matricom. Pri definiranju optimalnog datuma mreže ova se matrica uvodi kao jedinična matrica, tj.:

$$\underset{u \times u}{E} = I. \qquad (3)$$

Stoga je matrica koeficijenata

$$B = G \qquad (4)$$

te je očevidno da datum mreže ravnopravno, odnosno s jednakim utjecajem određuju sve epoznaice u mreži.

Pri definiranju konvencionalnog datuma neophodno je provođenje rastava datumske matrice E na pripadne blok-matrice:

$$\underset{u\times u}{E} = \begin{bmatrix} \underset{d\times d}{I} & \underset{d\times r}{0} \\ \underset{r\times d}{0} & \underset{r\times r}{0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

gdje su:

I — jedinična blok-matrica

0 — nulte blok-matrice

r — razlika broja nepoznanica i defekta datuma (r=u—d).

Jedinična blok-matrica $\underset{d\times d}{I}$ izravno određuje konvencionalni datum mreže fiksiranjem pojedinih nepoznanica u postupku izjednačenja. Tako se fiksirane nepoznanice uvode neposredno kao odgovarajući parametari datuma. Takav način definiranja parametara datuma odgovara postupku izjednačenja bez prisile, jer je broj uvedenih parametara datuma jednak defektu datuma mreže.

Oblikovanje matrice B prema opisanom postupku, a s obzirom na traženu definiciju datuma geodetske mreže, u oba klasična postupka izjednačenja, tj. posrednih mjerenja s dodatnim fiktivnim mjerenjima i posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica, određuje jednako rješenje za matricu kofaktora nepoznanica:

$$Q_{xx} = (N + B\,B^t)^{-1}\,N\,(N + B\,B^t)^{-1} \tag{6}$$

i vektor nepoznanica

$$x = Q_{xx}\,n. \tag{7}$$

Pritom je vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi.

Pri definiranju optimalnog datuma mreže uslijed izraza (4) matrica kofaktora je

$$Q_{xx} = (N + G\,G^t)^{-1}\,N\,(N + G\,G^t)^{-1}. \tag{8}$$

Ovaj se izraz, uslijed neprikladnosti pri računanju, najčešće koristi u transformiranom obliku (Pelzer, 1974; Hopcke, 1980; Feil, 1990):

$$Q_{xx} = (N + G\,G^t)^{-1} - G\,G^t \tag{9}$$

koji je jednak dobro poznatom izrazu za pseudoinverziju ili g_4 — opću inverziju.

Važno je napomenuti da se elementi matrice G, pri praktičnom računanju, određuju s pomoću relativnih približnih koordinata točaka mreže određenih u odnosu na njeno težište, te da se vektori ove matrice normiraju na jediničnu duljinu radi očuvanja stabilnosti računskog postupka:

$$G^t\,G = I. \tag{10}$$

Pri definiranju konvencionalnih datuma matrica Q_{xx} rastavljena je na blok-matrice:

$$\underset{u\times u}{Q_{xx}} = \begin{bmatrix} \underset{d\times d}{0} & \underset{d\times r}{0} \\ \underset{r\times d}{0} & \underset{r\times r}{Q} \end{bmatrix} \tag{11}$$

gdje je matrica $\underset{d\times d}{0}$ nulta-matrica koja odgovara »datumskim nepoznanicama« u mreži, a $\underset{r\times r}{Q}$ pripadna matrica kofaktora »nedatumskih nepoznanica«. Uslijed toga i vektor nepoznanica u razmatranoj mreži poprima oblik:

$$\underset{u\times 1}{x} = \begin{bmatrix} \underset{d\times d}{x_1} \\ \underset{r\times d}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{d\times d}{0} \\ \underset{r\times d}{x_2} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

jer blok-vektor x_2 sadrži nepoznanice određene uza zadani konvencionalni datum, a vektor $x_1 = 0$ odgovara nepoznanicama koje su uvedene kao parametri datuma.

3. TRANSFORMIRANJE DATUMA S POMOĆU S-TRANSFORMACIJE

Određivanje matrica S-transformacije, za afinu transformaciju između dva diferencijalno slična koordinatna sustava (datuma) temelji se na definiciji g_1 — opće inverzije (Rao i Mitra, 1971; Bjerhammar, 1973), tj.

$$N = N\,Q\,N \tag{13}$$

gdje je N kvadratna regularna, singularna ili pravokutna matrica, a Q pripadna g_1 — opća inverzija. Uslijed različitih definicija datuma pri izjednačenju jedne te iste mreže određen je i niz pripadnih matrica kofaktora Q_{xx} koje su kvadratne singularne matrice koje zadovoljavaju uvjet dan izrazom (13).

Ako je geodetska mreža izjednačena s određenim početnim datumom (datum A), definiranim matricom koeficijenata:

$$B_A = E_A\,G \tag{14}$$

određeno je rješenje

$$Q_A = (N + B_A B_A^t)^{-1}\, N\, (N + B_A B_A^t)^{-1} \tag{15}$$

$$x_A = Q_A\, n, \tag{16}$$

dok ponavljanjem postupka izjednačenja iste mreže, ali uz definiranje novog datuma (datum B):

$$B_B = E_B\,G, \tag{17}$$

slijedi rješenje

$$Q_B = (N + B_B B_B^t)^{-1}\, N\, (N + B_B B_B^t)^{-1} \tag{18}$$

$$x_B = Q_B\, n. \tag{19}$$

Budući da g_1 — opća inverzija nije jednoznačna, njenu definiciju istodobno zadovoljavaju matrice kofaktora Q_A i Q_B, iako su određene uz različite datume, tj.

$$N = N\,Q_A\,N \tag{20}$$

$$N = N\,Q_B\,N, \tag{21}$$

gdje je N pripadna matrica koeficijenata normalnih jednadžbi.

Stoga se pri transformiranju datuma A u datum B, u izraz (18) umjesto matrice N može uvrstiti izraz (20) te tako uspostaviti funkcijska veza:

$$Q_B = (N + B_B B_B^t)^{-1} N Q_A N (N + B_B B_B^t)^{-1}. \qquad (22)$$

Uslijed simetrije matrica $(N + B_B B_B^t)^{-1}$ i N, u prethodni se izraz uvodi supstitucija:

$$S_B = (N + B_B B_B^t)^{-1} N \qquad (23)$$

koja se nakon prikladnog preuređenja (Caspary, 1988) može izraziti ovako:

$$S_B = I - G (B_B^t G)^{-1} B_B^t. \qquad (24)$$

Stoga izraz (22) postaje

$$Q_B = S_B Q_A S_B^t. \qquad (25)$$

Očevidno je da ovaj izraz proizlazi kao rezultat primjene zakona o prirastu kofaktora na izraz

$$x_B = S_B x_A \qquad (26)$$

kojim je definirana linearna transformacija vektora nepoznanica iz jednoga koordinatnog sustava (datum A) u drugi (datum B). Matrica S_B je pritom matrica linearne transformacije, kojom se istodobno određuje i pripadna matrica kofaktora, tj. ocjena točnosti u novom datumu.

Matrica S-transformacije S je kvadratna simetrična matrica s dimenzijama određenim ukupnim brojem nepoznanica u mreži. To je idempotentna matrica (Illner, 1983), jer je

$$S\,S = S \qquad (27)$$

i uslijed

$$S\,G = 0 \qquad (28)$$

$$B^t S = 0 \qquad (29)$$

ortogonalna u odnosu na matrice G i B^t.

4. UZASTOPNE TRANSFORMACIJE DATUMA

Primjenom S-transformacija mogu se provoditi uzastopne transformacije datuma mreže iz početnog datuma u bilo koji traženi datum, uključujući i povratak na početni datum. Jedino ograničenje pri uzastopnom provođenju transformacija jest pojava pogrešaka izazvanih zaokruživanjem i nedostatkom značajnih decimalnih mjesta, posebno u slučaju većih i velikih mreža. Ako se želi provesti transformacija iz prethodno određenog datuma (datum B) u neki naredni datum (datum C), ona je određena matricom slične transformacije S_C, tj.

$$x_C = S_C x_B \qquad (30)$$

uz pripadnu matricu kofaktora

$$Q_C = S_C Q_B S_C^t. \qquad (31)$$

Matrica S_C određuje se analogno izrazima (17) i (24) prema traženoj definiciji datuma (datum C):

$$B_C = E_C\, G \tag{32}$$

$$S_C = I - G\,(B_C^t\, G)^{-1}\, B_C^t. \tag{33}$$

Međutim, uvrštenjem izraza (26) i (25) u izraze (30) i (31) slijedi:

$$x_C = S_C\, S_B\, x_A \tag{34}$$

$$Q_C = S_C\, S_B\, Q\, S_B^t\, S_C^t. \tag{35}$$

Uvođenjem supstitucije

$$S_{CB} = S_C\, S_B \tag{36}$$

definirana je matrica transformacije S_{CB} kojom je ostvarena izravna transformacija datuma iz datuma A u datum C. Prema tomu, i uzastopnim se provođenjem S-transformacija određuje takvo rješenje koje bi slijedilo iz izravne transformacije početnog u završni datum, bez obzira na niz promjena datuma između njih.

5. OPTIMALNI DATUM I S-TRANSFORMACIJE

Glede izjednačenja slobodnih geodetskih mreža, koje su već izjednačene uz definiciju konvencionalnih datuma, jednostavnim se postupkom transformiraju u optimalni datum. Dakako, pri novim mrežama koje se tek uspostavljaju ovakav pristup nije pogodan, jer je jednostavnije neposredno provođenje izjednačenja uz definiciju optimalnog datuma u odnosu na primjenu izjednačenja s definicijom konvencionalnog datuma te primjenu odgovarajuće S-transformacije (Krarup, 1979). Prednost S-transformacije može doći do izražaja onda kada je mreža već uspostavljena te izjednačena s definicijom konvencionalnog datuma. Stoga primjena S-transformacija nije sama sebi svrhom, već je neophodno pravilno procjenjivanje u danom slučaju.

Pri transformaciji iz konvencionalnog u optimalni datum izraz (24) se pojednostavnjuje uslijed jednakosti dane izrazom (4), tj.

$$S_0 = I - G\,(G^t\, G)^{-1}\, G^t. \tag{37}$$

Kako je matrica G ortonormirana matrica, uslijed izraza (10) matrica S_0 je

$$S_0 = I - G\, G^t. \tag{38}$$

Stoga je, bez obzira na odabrani konvencionalni datum mreže (x_k, Q_k), S-transformacijom u optimalni datum (x_0, Q_0) određeno rješenje:

$$x_0 = S_0\, x_k = (I - G\, G^t)\, x_k \tag{39}$$

$$Q_0 = S_0\, Q_k\, S_0^t = (I - G\, G^t)\, Q_k\, (I - G\, G^t). \tag{40}$$

Moguća je i inverzna transformacija kojom se optimalni datum transformira u traženi konvencionalni datum.

Izraz (38) teorijski se može izvesti i primjenom Helmertove transformacije kojom se konvencionalni datum transformira u optimalni datum mreže (Rožić, 1991).

6. ZAKLJUČAK

Na značenje primjene S-transformacija ukazuje to što se na relativno jednostavan i ekonomičan način za razmatranu geodetsku mrežu mogu odrediti datumi koji su različiti od datuma određenog izjednačenjem pri uspostavi mreže. Primjenom S-transformacija može se izbjeći postupak ponovnog izjednačenja jedne te iste mreže uz nove parametre datuma, već se postojeći datum s mnogo manjim opsegom računanja transformira u novi datum mreže. To posebice dolazi do izražaja pri većim i velikim geodetskim mrežama s velikim brojem mjerenja. Ujedno se primjenom S-transformacija, na jednostavan način, konvencionalni datumi mreže mogu transformirati u optimalni datum, te je ova činjenica veoma važna u sklopu optimiranja geodetskih mreža, posebice dizajna nultog reda.

Pri uspostavi novih mreža s optimalnom definicijom datuma S-transformacije ne nalaze primjenu, jer je ekonomičnije neposredno određivanje tog datuma u sklopu izjednačenja slobodne mreže u odnosu na izjednačenje uz definiciju konvencionalnog datuma i dodatne primjene S-transformacije. Prema tomu, iako omogućuje rješavanje problema slobodnih mreža, primjena S-transformacija nije sama sebi svrhom, već je pri njihovoj primjeni neophodan racionalan inženjerski kriterij.

S-transformacije omogućuju jednako učinkovitu transformaciju konvencionalnih datuma u optimalni datum, kao i transformaciju optimalnog datuma u različite konvencionalne datume. Osim toga, moguća je i njihova uzastopna primjena, tj. uzastopna promjena datuma jedne te iste mreže. Jedino ograničenje pritom su pogreške zaokruživanja i nedostatka značajnih decimalnih mjesta.

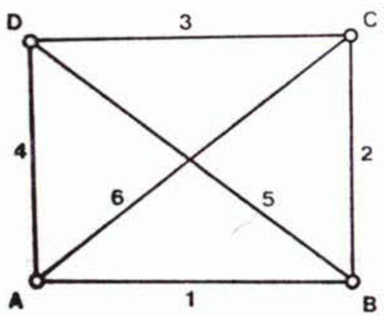
S-transformacije imaju znatnu primjenu i u sklopu deformacijske analize u slučajevima kada je jedna te ista mreža u nizu vremenskih epoha mjerena i izjednačavana uz definicije različitih datuma. Tada se, radi izravne usporedbe položaja istih točaka mreže u različitim vremenskim epohama, neophodno provodi njihova transformacija u isti datum.

Svojstvo S-transformacija da se regularne matrice, npr. matrice s Taylor-Karman strukturom, mogu transformirati u singularne matrice, korisno se primjenjuje i u dizajnu drugog reda (dizajn težina) u sklopu optimiranja geodetskih mreža.

Postupak oblikovanja matrica S-transformacije i njihova provođenja je, glede programiranja, relativno jednostavan, te se programiranjem u nekom od viših programskih jezika i primjenom računala djelotvorno može riješiti niz problema vezanih uz datum već uspostavljenih geodetskih mreža ili u sklopu problema optimiranja novih mreža. Osim toga, što je dobro vidljivo iz izraza (24), pri transformaciji između konvencionalnih datuma opseg računanja je relativno skroman budući da se invertiranje kao najsloženija matrična računska operacija provodi s matricama čiji je format određen defektom datuma mreže.

7. PRIMJER

Trilateracijska mreža, zadana skicom (sl. 1) i podacima mjerenja, izjednačena je uz definiciju konvencionalnog datuma određenoga koordinatama x_A, y_A i x_B (datum AB), koje su uvedene kao parametri toga konvencionalnog datuma (defekt datuma d=3):



Slika 1. Trilateracijska mreža

Približne koordinate:

	Y_i^0	X_i^0
A	1023.23	1032.55
B	2034.22	1045.54
C	2104.72	2155.98
D	1056.57	2085.61

Mjerene duljine:

		d_i
1	A — B	1011.15
2	B — C	1112.53
3	C — D	1050.59
4	A — D	1053.65
5	B — D	1427.40
6	A — C	1559.32

$$
\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.06 & 1.00 & 0.06 & 0.00 & 0.00 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.00 & 0.07 & 1.00 & -0.07 & -1.00 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.03 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.68 & 0.00 & 0.00 & 0.73 & -0.68 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.00 & 0.72 & 0.69 & 0.00 & 0.00
\end{bmatrix}}
\overset{-\mathbf{l}}{\begin{bmatrix}
-0.08 \\ 0.15 \\ -0.08 \\ -0.06 \\ 0.03 \\ 0.08
\end{bmatrix}}
$$

$$
\overset{\mathrm{N}}{\begin{bmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.4729 & -0.0632 & -0.0040 & 0.4990 & -0.4691 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0632 & 1.5195 & 0.6297 & -0.0045 & -0.0668 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0040 & 0.6297 & 1.4805 & -0.0668 & -0.9955 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4990 & -0.0045 & 0.0668 & 1.5344 & -0.4006 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.4691 & -0.0668 & -0.9955 & -0.4006 & 1.4656
\end{bmatrix}}
\overset{-\mathrm{n}}{\begin{bmatrix}
0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -0.0679 \\ 0.1947 \\ -0.0184 \\ -0.0380 \\ 0.0604
\end{bmatrix}}
$$

$$
\begin{array}{c}
Q_{AB} \\
\begin{bmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8779 & -0.0907 & 0.3570 & -0.1450 & 0.4797 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0907 & 0.9590 & -0.7965 & -0.1505 & -0.5675 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3570 & -0.7965 & 2.1346 & 0.4021 & 1.6378 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1450 & -0.1505 & 0.4021 & 0.8328 & 0.4475 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4797 & -0.5675 & 1.6378 & 0.4475 & 2.0447
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
x_{AB} \\
\begin{bmatrix}
0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.049 \\ -0.179 \\ 0.135 \\ 0.031 \\ 0.067
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

a) Transformacija prethodno određenoga konvencionalnog datuma (datum AB) u konvencionalni datum određen koordinatama y_C, x_D i y_C (datum CD), koje su uvedene kao parametri datuma:

$$
\begin{array}{c}
E_{CD} \\
\begin{bmatrix}
0 & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & \\
 & & & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}
G \\
\begin{bmatrix}
0.50 & 0.00 & 0.36 \\
0.00 & 0.50 & -0.37 \\
0.50 & 0.00 & -0.32 \\
0.00 & 0.50 & -0.36 \\
0.50 & 0.00 & -0.37 \\
0.00 & 0.50 & 0.39 \\
0.50 & 0.00 & 0.33 \\
0.00 & 0.50 & 0.34
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
B_{CD} \\
\begin{bmatrix}
0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.50 & 0.39 \\
0.50 & 0.00 & 0.33 \\
0.00 & 0.50 & 0.34
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(B^t_{CD}\, G)^{-1} \\
\begin{bmatrix}
404.8428 & 435.2526 & -601.6319 \\
435.2526 & 474.6163 & -653.2782 \\
-601.6319 & -653.2782 & 902.9997
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
S_{CD} = I - G\,(B^t_{CD}\, G)^{-1}\, B^t_{CD} \\
\begin{bmatrix}
1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.4738 & -1.0000 & 0.4738 \\
0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 14.9646 & 0.0000 & -15.9646 \\
0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 13.8930 & -1.0000 & -13.8930 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 14.7800 & 0.0000 & -15.7800 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 14.8948 & -1.0000 & -14.8949 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
x_{CD} = S_{CD}\, x_{AB} \\
\begin{bmatrix}
-0.064 \\ 0.955 \\ 0.917 \\ 0.992 \\ 0.806 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$Q_{CD} = S_{CD}\, Q_{AB}\, S_{CD}$$

$$\begin{bmatrix}
0.9927 & -5.4744 & -4.5075 & -5.2006 & -4.6320 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-5.4744 & 216.6195 & 194.6815 & 211.7317 & 205.7790 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-4.5075 & 194.6815 & 176.5389 & 190.7954 & 186.1323 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-5.2006 & 211.7317 & 190.7954 & 207.7978 & 201.5544 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-4.6320 & 205.7790 & 186.1323 & 201.5544 & 197.1331 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{bmatrix}$$

b) Transformacija konvencionalnog datuma mreže određenoga koordinatama y_C, x_D i y_D (datum CD) u optimalni datum mreže (datum o):

$$\overset{E_0}{\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}}
\overset{G}{\begin{bmatrix}
0.50 & 0.00 & 0.36 \\
0.00 & 0.50 & -0.37 \\
0.50 & 0.00 & -0.32 \\
0.00 & 0.50 & -0.36 \\
0.50 & 0.00 & -0.37 \\
0.00 & 0.50 & 0.39 \\
0.50 & 0.00 & 0.33 \\
0.00 & 0.50 & 0.34
\end{bmatrix}}
=
\overset{B_0}{\begin{bmatrix}
0.50 & 0.00 & 0.36 \\
0.00 & 0.50 & -0.37 \\
0.50 & 0.00 & -0.32 \\
0.00 & 0.50 & -0.36 \\
0.50 & 0.00 & -0.37 \\
0.00 & 0.50 & 0.39 \\
0.50 & 0.00 & 0.33 \\
0.00 & 0.50 & 0.34
\end{bmatrix}}$$

$$G\,G^t$$

$$\begin{bmatrix}
0.3763 & -0.1301 & 0.1360 & -0.1270 & 0.1193 & 0.1369 & 0.3684 & 0.1202 \\
-0.1301 & 0.3840 & 0.1174 & 0.3808 & 0.1347 & 0.1090 & -0.1219 & 0.1262 \\
0.1360 & 0.1174 & 0.3529 & 0.1146 & 0.3680 & -0.1236 & 0.1432 & -0.1085 \\
-0.1270 & 0.3808 & 0.1146 & 0.3777 & 0.1315 & 0.1123 & -0.1191 & 0.1291 \\
0.1193 & 0.1347 & 0.3680 & 0.1315 & 0.3853 & -0.1417 & 0.1275 & -0.1244 \\
0.1369 & 0.1090 & -0.1236 & 0.1123 & -0.1417 & 0.3984 & 0.1283 & 0.3803 \\
0.3684 & -0.1219 & 0.1432 & -0.1191 & 0.1275 & 0.1283 & 0.3610 & 0.1127 \\
0.1202 & 0.1262 & -0.1085 & 0.1291 & -0.1244 & 0.3803 & 0.1127 & 0.3644
\end{bmatrix}$$

$$S_0 = I - G\,G^t$$

$$\begin{bmatrix}
0.6237 & 0.1301 & -0.1360 & 0.1270 & -0.1193 & -0.1369 & -0.3684 & -0.1202 \\
0.1301 & 0.6160 & -0.1174 & -0.3808 & -0.1347 & -0.1090 & 0.1219 & -0.1262 \\
-0.1360 & -0.1174 & 0.6471 & -0.1146 & -0.3680 & 0.1236 & -0.1432 & 0.1085 \\
0.1270 & -0.3808 & -0.1146 & 0.6223 & -0.1315 & -0.1123 & 0.1191 & -0.1291 \\
-0.1193 & -0.1347 & -0.3680 & -0.1315 & 0.6147 & 0.1417 & -0.1275 & 0.1244 \\
-0.1369 & -0.1090 & 0.1236 & -0.1123 & 0.1417 & 0.6016 & -0.1283 & -0.3803 \\
-0.3684 & 0.1219 & -0.1432 & 0.1191 & -0.1275 & -0.1283 & 0.6390 & -0.1127 \\
-0.1202 & -0.1262 & 0.1085 & -0.1291 & 0.1244 & -0.3803 & -0.1127 & 0.6356
\end{bmatrix}$$

$$Q_0 = S_0\, Q_{CD}\, S_0^t$$

$$\begin{bmatrix} 0.2783 & 0.0266 & -0.1040 & 0.1007 & -0.0238 & -0.0457 & -0.1505 & -0.0816 \\ 0.0266 & 0.2778 & -0.0821 & -0.1601 & -0.0442 & -0.0204 & 0.0997 & -0.0973 \\ -0.1040 & -0.0821 & 0.2983 & -0.0376 & -0.1546 & 0.1069 & -0.0397 & 0.0128 \\ 0.1007 & 0.1601 & -0.0376 & 0.2806 & -0.0850 & -0.0829 & 0.0219 & -0.0376 \\ -0.0238 & -0.0442 & -0.1546 & -0.0850 & 0.2734 & 0.0196 & -0.0951 & 0.1096 \\ -0.0457 & -0.0204 & 0.1069 & -0.0829 & 0.0196 & 0.2668 & -0.0808 & -0.1634 \\ -0.1505 & 0.0997 & -0.0397 & 0.0219 & -0.0951 & -0.0808 & 0.2853 & -0.0408 \\ -0.0816 & -0.0973 & 0.0128 & -0.0376 & 0.1096 & -0.1634 & -0.0408 & 0.2983 \end{bmatrix}$$

$$x_0^t = (S_0\, x_{CD}^t) = [-0.010\ \ -0.014\ \ 0.080\ \ 0.034\ \ -0.093\ \ 0.021\ \ 0.024\ \ -0.041]$$

LITERATURA

Baarda, W. (1968): Statistics: A compas for the land Surveyor. XIIth International Congress of Surveyors, London.

Baarda, W. (1971): Criteria for Precision of Geodetic Network. XIII Internationaler Kongress der Vermessungsingenieure, Wiesbaden.

Baarda, W. (1973): S-transformations and criterion matrices. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series 5, No. 1, Delft.

Bjerhammar, A. (1973): Theory of errors and generalizer matric inverses. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam—London—New York.

Caspary, W. F. (1988): Concepts of network and deformation analysis. Monograph 11, School of Surveying. The University of New South Wales, Kensington, N. S. W., Australia.

Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja — drugi dio. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York.

Illner, I. (1983): Freie Netze und S-Transformation. Allgemeine Vermessungs Nachrichten, Heft 5, 157—170.

Krarup, T. (1979): S-transformation or How to live without the generalized inverse — almost. Geodatisk Institut Charlottenlund, Denmark.

Mierlo, J. (1980): Free network adjustment and S-transformaons. Deutsch Geodatisch Kommision, Reih B Hef 25. München.

Mittermayer, E. (1971): Eine Verallgemeinerung der Methode der kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze. Zf. Verm. wesen, Heft 9, 401—410.

Mittermayer, E. (1972): Zur Ausgleichung freier Netze. Zs. Verm. wesen, Heft 11, 481—489.

Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektovanja geodetskih mreža. Naučna knjiga, Beograd.

Pelzer, H. (1974: Zur Behandlung singularer Ausgleichungsaufgaben I. Zs. Verm. wesen, Heft 5, 181—194.

Perović, G. (1986): Singularna izravnanja. Naučna knjiga, Beograd.

Rao, C. R, Mitra, S. K. (1971): Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York.

Rožić, N. (1991): Prilog izjednačenju geodetskih mreža posebnih namjena, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Magistarski rad, Zagreb.

Rožić, N. (1992): Izjednačenje geodetskih mreža s dodatnim fiktivnim mjerenjima, Geodetski list, 1, 49—60.

Stevanović, J. (1987): Dileme u vezi sa izravnanjem i ocenom tačnosti slobodnih geodetskih mreža. Geodetski list, br. 1—3, 35—59.

Welsch, W. (1979): A review of the adjustment of three networks. Survey review. Vol. XXV. No. 194, 167—180.

GEODETIC NETWORK DATUM AND S-TRANSFORMATIONS

Datum changing procedure of already established geodetic networks by S-transformations is presented. Possibility of different geodetic network datum definitions (conventional and optimal datum) and transformations between them are explained. Example of S-transformation apliance in case of trilateration network datum change is given.

Primljeno: 1992-06-26