

## TEORETSKA OSNOVA REKTIFIKACIJE GLAVNOG UVJETA NIVELIRA S KOMPENZATOROM

Gorana NOVAKOVIĆ — Zagreb\*

*SAŽETAK.* Jednadžba geodetske vizurne linije durbinom nivelira s kompenzatorom predstavlja osnovu za analizu glavnog uvjeta nivelira. Sadržaj ovog članka služi kao uvod u prikaz različitih terenskih i laboratorijskih metoda određivanja pogreške geodetske vizurne linije, a koje će biti opisane u jednom od sljedećih brojeva ovog lista.

### 1. UVOD

Za ispravnost određivanja visinskih razlika, a na osnovi definicije geometrijskog nivelmana, glavni je uvjet horizontalnost geodetske vizurne linije, odnosno geodetske vizurne osi durbinom nivelira.

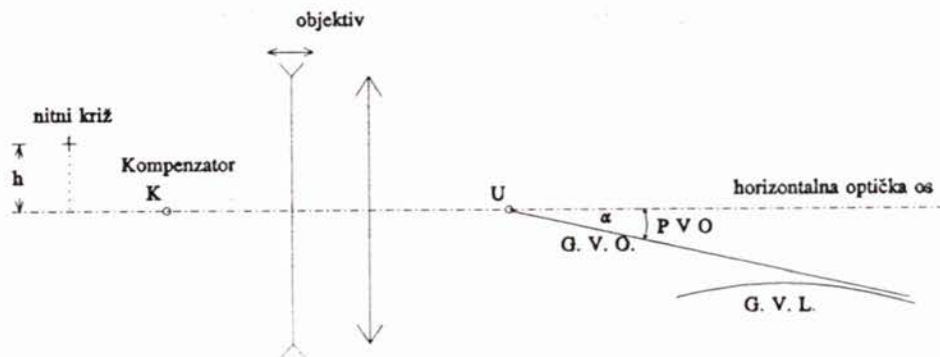
Geodetska vizurna linija (prema F. R. Helmertu) skup je točaka u prostoru predmeta u kojemu je, pomoću objektiva durbinom, preslikano presjecište nitnoga križa, pri izoštravanju, uz čvrst durbin. Oblik ove krivulje ovisi o tomu da li se radi o durbinu kod kojeg se izoštravanje slike postiže izvlačenjem okulara ili objektiva (vanjsko izoštravanje), ili o durbinu s teleobjektivom, pomakom negativnog člana objektiva (unutarnje izoštravanje). Uz pravocrtno vođenje nitnoga križa kod prvog durbinom, geodetska vizurna linija (kraće — vizurna linija) bit će pravac, dok će kod ostala dva, pravocrtnim vođenjem leće za izoštravanje, biti hiperbola. Kod durbinom s teleobjektivom oblik vizurne linije bit će pravac samo onda kad se glavna točka negativnog člana objektiva, pri izoštravanju, pomiče uzduž pravca koji prolazi presjecištem niti nitnoga križa. U općenitom slučaju, dakle kad presjecište nitnoga križa odstupa od tog pravca, vizurna linija bit će grana hiperbole, čija zakrivljenost ovisi o veličini tog odstupanja. Pri izoštravanju slučajno ili sistematsko odstupanje od idealnog vođenja po pravcu glavne točke negativnog člana objektiva, uzrokuje pomak slike u ravnini nitnoga križa, a time i nepravilnost oblika geodetske vizurne linije (Benčić, 1971, 1973, 1990).

Vizurna linija oblika hiperbole uzrokuje pogrešku mjerenja koja se, kod nivelira, očituje samo pri nejednakim i kratkim vizurama (oko 10 do 15 m). U tom slučaju treba uzeti u obzir razliku između vizurne linije i njene asimptote (o veličini ove razlike vidi Gresch, 1969; Fialovszky, 1991).

\* Mr. Gorana Novaković, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, Zagreb.

Geodetska vizurna os je asimptota na geodetsku vizurnu liniju. Pri većim udaljenostima mjernog objekta, vizurnu liniju zamjenjujemo njenom asimptotom.

Položaj vizurne linije, pri vertikalnoj glavnoj osi nivelira, naziva se ishodišnim ili nultim položajem vizurne linije. Horizontalnost vizurne linije, pri nultom položaju, osnovni je uvjet nivelira, a odstupanje od tog uvjeta uzrokuje pogrešku ishodišnog položaja vizurne linije, odnosno *pogrešku geodetske vizurne osi* (PVO) (sl. 1). Ova pogreška utječe na točnost određivanja visinske razlike pri nejednakim udaljenostima nivelira od mjernih letava.



Slika 1. Pogreška geodetske vizurne osi

U — analaktička točka kompenzacije — ishodišna ili početna točka geodetske vizurne osi

Zamislimo li, radi pojednostavnjenja, durbin kao idealizirani centrirani optički sustav, pogreška geodetske vizurne osi  $\alpha$  nastaje kad se nitni križ udalji od optičke osi za veličinu  $h$ . Promjena veličine pogreške  $d\alpha$  funkcija je promjene udaljenosti nitnoga križa od optičke osi  $dh$ . Ova funkcionalna veza izvoda se iz jednadžbe geodetske vizurne linije. Oblik jednadžbe ovisi o vrsti nivelira, točnije o položaju kompenzatora.

## 2. JEDNADŽBA GEODETSKE VIZURNE LINIJE DURBINA S TELEOBJEKTIVOM

U svrhu preslikavanja presjecišta nitnoga križa u prostor predmeta, kod durбина s teleobjektivom, prema definiciji geodetske vizurne linije, ono se izvodi u dva koraka. U prvom koraku promatra se virtuelna krivulja  $\eta=g(\xi)$  slika presjecišta nitnoga križa pri pravocrtном pomaku negativnog člana objektiva. U drugom koraku preslikat će se virtuelna krivulja  $\eta=g(\xi)$ , pomoću pozitivnog člana objektiva, i tako će se dobiti jednadžba geodetske vizurne linije  $y=k(x)$ .

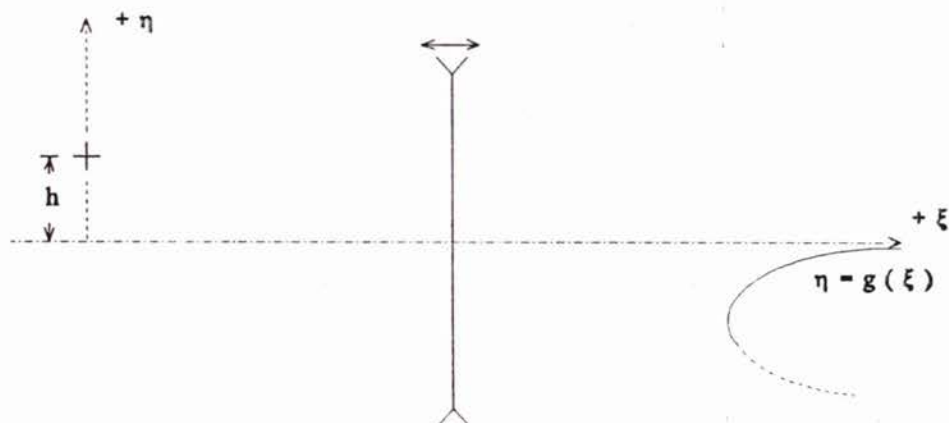
Izvodi koji slijede odnose se na tanke leće kod kojih obje glavne ravnine padaju zajedno. Osim toga, pretpostavimo sljedeće:

- leće i nitni križ međusobno su strogo centrirani,
- pravac pomaka negativnog člana objektiva i optička os se podudaraju,

— relativni pomak nitnoga križa u odnosu na optičku os (nastao zbog djelovanja kompenzatora) izvodi se u ravnini okomitoj na optičku os.

### 2.1. Preslikavanje presjecišta nitnoga križa pomoću negativnog člana objektiva

Primjenom formula preslikavanja geometrijske optike i stanovitih transformacija (Gresch, 1969; Benčić i dr., 1981; Deumlich, 1982), dobit će se jednadžba virtuelne krivulje  $\eta = g(\xi)$  slika presjecišta nitnoga križa, pri pomaku glavne točke negativnog člana objektiva. Odnosi se na koordinatni sustav pokazan na slici 2, gdje se  $\xi$  — os podudara s optičkom osi, a  $\eta$  — os leži u ravnini nitnoga križa.



Slika 2. Preslikavanje nitnoga križa negativnim članom objektiva

Ova jednadžba glasi:

$$h \xi \gamma_i + f_F \gamma_i^2 - 2 h f_F \gamma_i + h^2 f_F = 0,$$

gdje je:

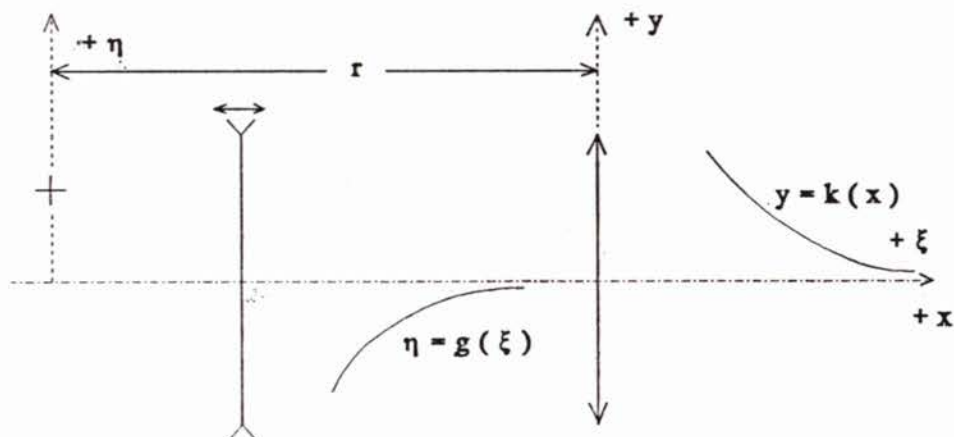
$f_F$  — žarišna daljina negativnog člana objektiva

$h$  — udaljenost nitnoga križa od optičke osi

Analiza pokazuje da je ova krivulja oblika hiperbole. U slučaju da je  $h = 0$ , tj. prolazi li pravac pomaka negativnog člana presjecištem nitnoga križa, ova krivulja prelazi u pravac. Prema zakonima geometrijske optike pravac će i pozitivnim članom objektiva biti preslikan kao pravac (kolinearna veza), pa će geodetska vizurna linija biti pravac u specijalnom slučaju kada je  $h = 0$ .

### 2.2. Preslikavanje virtuelne krivulje pozitivnim članom objektiva

Krivulja slike  $\eta = g(\xi)$ , koja nastaje preslikavanjem pomoću negativne leće, sada je predmet koji sabirni dio objektiva mora preslikati, na osnovi zakona o reverzibilnosti optičkih procesa, u prostor mjernog objekta (sl. 3).



Slika 3. Preslikavanje virtuelne krivulje pozitivnim članom objektiva

Primjenom formula optičkog preslikavanja dobije se jednadžba krivulje slike  $y = k(x)$ . Ona se odnosi na koordinatni sustav čija  $x$  — os leži u optičkoj osi (i podudara se s  $\xi$  — osi), a  $y$  — os pada u glavnu ravninu odnosno optičku liniju sabirne leće (žarišne daljine  $f_0$ ). Osi  $y$  i  $\eta$  udaljene su za veličinu  $r$  koja predstavlja optičku duljinu kod durbina s unutarnjim izoštravanjem; to je razmak između glavne točke pozitivnog člana objektiva i nitnoga križa i predstavlja konstantu optičkog sistema durbina.

Implicitni oblik ove jednadžbe glasi:

$$h^2 f_F x^2 + h f_0 (f_0 - r + 2f_F) xy + f_0^2 f_F y^2 - 2h^2 f_0 f_F x + h f_0^2 (r - 2f_F) y + h^2 f_0^2 f_F = 0. \quad (1a)$$

Jednadžba predstavlja krivulju drugog reda (čunjosječnicu), koja u općem obliku glasi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1b)$$

Izračunamo li njene invarijante  $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$  i  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ , možemo zaključiti da se i ovdje radi o hiperboli. Koordinate središta hiperbole  $M$ , odnosno presjecišta asimptota, računaju se po formulama:

$$x_M = \frac{BE - CD}{\delta}$$

$$y_M = \frac{BD - AE}{\delta}$$

Uvrštenjem vrijednosti iz jednadžbi (1) i nakon određenih supstitucija (Novaković, 1988), te formule glase:

$$x_M = \frac{r(f_0 + f_\infty)^2 - 2f_0^2 f_\infty}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)^2} f_0 \quad (2)$$

$$y_M = \frac{2h f_0^2 f_\infty}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)^2}.$$

Može se vidjeti da je  $x$  — koordinata funkcija samo tehničkih podataka durbina  $r$ ,  $f_0$  i  $f_\infty$ , a neovisna o veličini  $h$ .

Jednadžba asimptote hiperbole glasi:

$$y = mx + (y_M - mx_M).$$

Izračuna li se koeficijent smjera obiju asimptota prema izrazu:

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{-\delta}}{C},$$

dobije se:

$$m_I = -\frac{h}{f_\infty}, \quad m_{II} = -\frac{f_\infty}{f_0^2} h. \quad (3)$$

Ako se jednadžba asimptote računa preko jednadžbe pravca:

$$y = mx + (y_M - mx_M) = mx + t,$$

uzevši u obzir (2) i (3), dobije se:

$$t_I = \frac{r f_0 (f_0 + f_\infty) - 2f_0^2 f_\infty}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)} \cdot \frac{h}{f_\infty} \quad (4)$$

$$t_{II} = \frac{r f_0 (f_0 + f_\infty) - 2f_0^3}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)} \cdot \frac{f_\infty}{f_0^2} \cdot h.$$

Jednadžbe obiju asimptota sada glase:

$$y_I = -\frac{h}{f_\infty} x + \frac{r f_0 (f_0 + f_\infty) - 2f_0^2 f_\infty}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)} \cdot \frac{h}{f_\infty} \quad (5a)$$

$$y_{II} = -\frac{f_\infty}{f_0^2} h x + \frac{r f_0 (f_0 + f_\infty) - 2f_0^3}{(r - f_0)(f_\infty + f_0)} \cdot \frac{f_\infty}{f_0^2} h. \quad (5b)$$

One su funkcija podataka durbina  $r$ ,  $f_0$ ,  $f_\infty$  i  $h$ . Za kontrolu računanja jednadžbi asimptota, a ujedno i središta hiperbole, veličina  $t$  može se izračunati i na ovaj način:

$$t = \frac{-D - mD}{+B + mC}.$$

Uvrstimo li ovdje vrijednosti iz jednadžbi (1) i (3), uočava se da je rezultat identičan s (4). Pomoću ovih formula mogu se dobiti osnovna saznanja o obliku geodetske vizurne linije za sve vrste nivelira s kompenzatorom. Poznato je (Benčić, 1990; Deumlich, 1982) da se kompenzator može nalaziti:

- između objektiva i nitnoga križa,
- između pozitivnog i negativnog člana objektiva,
- unutar durbina, ujedno i kao uređaj za izoštravanje slike,
- ispred objektiva,
- kod nekih konstrukcija kompenzator može biti sâm objektiv durbina ili nitni križ na njihalu.

U nastavku ograničit ćemo se samo na one nivelire kod kojih se kompenzator nalazi između objektiva i nitnoga križa, budući da najveći broj konstrukcija kompenzatora pripada tom području. (Za ostale tipove nivelira vidi Gresch, 1969).

Iz jednadžbe hiperbole (1a) vidimo da njen oblik ovisi o veličinama  $h$  i  $r$ , budući da su žarišne duljine  $f_F$  i  $f_0$  nepromjenljive. Matematički gledano, postoje dvije asimptote, ali fizikalno promatramo samo jednu i to, u ovom slučaju, onu bližu optičkoj osi. Pretpostavimo da je asimptota  $y_I$  horizontalna; tada za koeficijent smjera, pri pozitivnim  $h$ ,  $f_0$  i  $f_\infty$  vrijedi:

$$-\frac{1}{f_\infty} > -\frac{f_0}{f_\infty^2}.$$

Iz toga slijedi da je  $f_0 < f_\infty$ . U slučaju da je  $y_{II}$  horizontalna, slijedi da je  $f_\infty < f_0$ . Razmotrimo slučaj gdje je  $f_0 < f_\infty$ , a koji se kod instrumenata najčešće i pojavljuje, i kod kojega je jednadžba asimptote (5a). Budući da asimptota kod nivelira mora biti horizontalna, tada vrijedi, označivši kut između horizontalne asimptote i optičke osi s  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\frac{h}{f_\infty}. \quad (6)$$

Sve priložene formule vrijede uz navedena pojednostavnjenja, ali su ipak zadovoljavajuće za mnoge analize. Potpune formule za durbin s unutarnjim izoštravanjem bez idealiziranja, dakle za debele leće i uzevši u obzir sve pogreške centriranja, mogu se naći kod Gündela (1967).

Vratimo se sada na funkcionalnu vezu između promjene veličine pogreške geodetske vizurne osi  $d\alpha$  i promjene udaljenosti nitnoga križa od optičke osi  $dh$ . Iz nagiba vizurne linije (6) (odnosno njezine asimptote), dobije se *pogreška geodetske vizurne osi*, u ovisnosti o pomaku nitnoga križa iz ishodišnog položaja (nulti položaj vizurne linije):

$$d\alpha = \frac{dh}{f_\infty}. \quad (7)$$

Pomoću ove formule može se izvesti zahtjev o točnosti justiranja instrumenta, a s obzirom na a priori zadanu točnost mjerenja.

#### Primjer:

Pretpostavimo da za određenu točnost mjerenja možemo dopustiti pogrešku vizurne osi od  $5''$ . Kod nivelira KONI 007, kod kojega je  $f_\infty = 283,2$  mm, nitni križ, prema formuli (7), smije odstupati od optičke osi za najviše  $7 \mu\text{m}$ . Već odstupanje od  $0,1$  mm izazvalo bi pogrešku geodetske vizurne osi od  $73''$ .

Osim toga, valja istaknuti da pri rektifikaciji nije dobro pomicati nitni križ, posebno ne za veće iznose, jer i to znatno djeluje na zakrivljenost geodetske vizurne linije. Zato se kod nekih konstrukcija (npr. Zeiss — Opton Nil, VEB Zeiss — Ni002) rektifikacija izvodi okretanjem zaštitnog stakla u obliku klina ili korekcijom kompenzatora posebnim vijkom (npr. Wild Na 2). Kod onih nivelira u kojih ne postoji druga mogućnost rektifikacije osim pomaka nitnoga križa, a točnost mjerenja tolerira ustanovljenu veličinu PVO, bolje je ne obavljati rektifikaciju.

Osim neispravne justaže, na oblik geodetske vizurne linije utječe i promjena temperature, koja može uzrokovati deformaciju durbina, zatim trešnja instrumenta prilikom transporta i ostali vanjski utjecaji. Stoga je potrebna stalna kontrola instrumenta, posebno onih namijenjenih mjerenjima veće točnosti.

### 3. ZAKLJUČAK

Za analizu glavnog uvjeta nivelira neophodno je poznavanje jednadžbe geodetske vizurne linije, odnosno tehničko-mjerna svojstva instrumenata. Osim pogreške vizurne linije koja ima utjecaj na točnost mjerenja visinskih razlika pri nejednakim duljinama vizura, potrebno je istaknuti i to da vizurna linija oblika hiperbole uzrokuje pogrešku mjerenja pri kratkim vizurama. U tom se slučaju, ako se zahtijevaju precizna mjerenja, mora uzeti u obzir razlika između vizurne linije i njene asimptote.

Točnost mjerenja nivelirom ne ovisi samo o kvaliteti izvedbe, već i o ispravnosti funkcije i položaja njegovih dijelova. Točnost ne ovisi samo o ispravnosti justaže nego i o različitim vanjskim utjecajima, odnosno o neizbježnim vremenskim promjenama u položaju pojedinih dijelova, kao i o posljedicama transporta ili neispravnom rukovanju. Zbog svega toga potrebna je stalna kontrola instrumenta, svakako prije odlaska na teren, a posebno prije samog mjerenja.

Ova razmatranja služe kao teoretska osnova za prikaz različitih metoda ispitivanja i, ako je potrebno, rektifikacije glavnog uvjeta nivelira.

### LITERATURA

- Benčić, D. (1971): Geodetski instrumenti I dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.  
Benčić, D. (1973): Geodetski instrumenti II dio, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb.  
Benčić, D., Lasić, Z., Novaković, G., Rašpica, M., Šimičić, K. (1981): Geodetska vizurna linija i pogreška vizurnog pravca, Zbornik radova, Niz A, br. 32, Zagreb.  
Benčić, D. (1990): Geodetski instrumenti, Školska knjiga, Zagreb.  
Deumlich, F. (1982): Surveying instruments, Berlin, New York.  
Fialovszky, L. (1991): Surveying instruments and their operational principles, Akadémiai Kiadó, Budapest.  
Gresch, E. (1969): Instrumentenbedingte Fehler beim arbeiten mit Kompensator-nivellieren, Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik der Deutschen Demokratischen Republik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, III/15, Dissertation, Berlin.  
Gündel, W. (1967): Ziellinie und Zielachsenfehlerkurve bei Theodoliten mit Innenfokussierung. Dissertation, TU Dresden.  
Novaković, G. (1988): Instrumentalne pogreške nivelira s automatskim horizontiranjem vizurne osi, Magistarski rad, Geodetski fakultet, Zagreb.

---

## THEORETICAL BASIS FOR ADJUSTING THE PRINCIPAL CONDITION OF THE AUTOMATIC LEVELS

The equation of the geodetic line of sight presents the basis for analysing the principal condition of the levels. The subject of this article is theoretical introduction with the purpose to illustrate the various techniques used to determine the error of the line of sight, in the field and in the laboratory, which will be described in one of the future article.

Primljeno: 1992-07-20