UDK 528.022.1:528.118
Originalni znanstveni članak

ISPITIVANJE TEŽINA MJERENJA HORIZONTALNIH KUTNIH VELIČINA MODERNIM ELEKTRONIČKIM TEODOLITIMA E2 I T2000S S PRIJEDLOGOM ZA MODIFICIRANJE METODA MJERENJA

Asim BILAJBEGOVIĆ, Željko BAČIĆ, Valent STEPAN — Zagreb*

SAŽETAK: Na osnovi mjerenja s ugrađenih betonskih stupova girusnom metodom elektroničkim teodolitima Kern E2 i Wild T2000S, u više mikrotriangulacijskih mreža, ispitivana je funkcija najbolje aproksimacije krivulje standardnih devijacija pravaca. Ispitivanja pokazuju da je to eksponencijalna tzv. power funkcija oblika $Y = a\ X^b$. Osim toga, ispitivana je točnost odnosno težine mjerenih pravaca kao funkcije broja pravaca na stajalištu, te dobivena općenita formula za težinu $p = \sqrt{\frac{n^3}{s}}$ (n — broj girusa, s — broj pravaca). Na osnovi novopredloženog izraza za težinu razrađen je prijedlog modifikacije osnovnih metoda mjerenja horizontalnih pravaca, odnosno kutova.

1. UVOD

Suvremeni elektronički instrumentarij polako (jer je skup) ulazi u sve pore geodetske djelatnosti. Tako izgrađeni hidrotehnički objekti tijekom eksploatacije, pri utvrđivanju njihovog pomaka, i po nekoliko puta doživе promjenu instrumentarija i opažača. Dakako, svaka promjena zahtijeva ispitivanje točnosti dotičnog instrumentarija, te usporedbu s prethodno upotrebljenim instrumentarijem i metodom rada. Za usporedbu klasičnog i suvremenog elektroničkog instrumentarija poslužila su mjerenja obavljena u laboratoriju Geodetskog fakulteta (za E2), na geodetskoj osnovi tunela Chiffa u Alžiru, na branama Sabljaci i Bukovnik HE Gojak i na brani HE Peruča.

2. ISTRAŽIVANJA SREDNJE VRIJEDNOSTI STANDARDNE DEVIJACIJE PRAVACA KAO FUNKCIJE BROJA GIRUSA ZA ELEKTRONIČKE TEODOLITE KERN E2 I WILD T2000S

2.1. *Kern E2*

Laboratorijska istraživanja točnosti pravca za elektronički teodolit E2 br. 352438 (provedena na Geodetskom fakultetu u Zagrebu) potvrđuju dekla-

* Prof. dr. Asim Bilajbegović, Željko Bačić, dipl. ing., Valen Stepan, dipl. ing., Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

rativnu točnost tvornice (0.5″ iz jednoga girusa). Uvjeti mjerenja na terenu su nešto drugo, pa su za realnu ocjenu točnosti neophodna terenska mjerenja. Za analizu smo odabrali mjerenja izvedena s betonskih stupova, prosječne duljine strane od oko 3 km, sa specijalnom značkom za signalizaciju, opažača N. Solarića i A. Bilajbegovića na tunelu Chiffa u Alžiru (područje Malog Atlasa s mediteranskim klimatskim uvjetima). Sva mjerenja izvedena su u 8 girusa na petnaest stajališta s prosječno pet pravaca.

Na osnovi stajališnih izjednačenja izračunane su standardne devijacije pravaca, a na osnovi njih srednje vrijednosti standardnih devijacija za različit broj girusa $\hat{\sigma}_{0i}$ (tablica 2.1—1):

$$\hat{\sigma}^2_{0,n} = \frac{\hat{\sigma}^2_{1i} + \hat{\sigma}^2_{2i} + \ldots + \hat{\sigma}^2_{ki}}{k} \tag{1}$$

gdje je:

n — broj girusa $n \in (2,8)$

k — broj stajališta $(k = 15)$

Tablica 2.1-1. Srednje standardne devijacije aritmetičkih sredina kao funkcije broja girusa

	BROJ GIRUSA $n \in (2,8)$						
	2	3	4	5	6	7	8
Srednje vrijednosti standardne devijacije aritmetičke sredine $\hat{\sigma}_{0n}$ pravaca	0ʺ784	0ʺ531	0ʺ421	0ʺ344	0ʺ310	0ʺ273	0ʺ242

Grafička predodžba standardnih devijacija iz tablice 2.1—1 dana je na slici 1. Uza zanemarivanje algebarske korelacije, moguće je izračunati do kojega se broja girusa signifikantno povećava točnost pravca primjenom tzv. F — testa. Zapravo, uvođenjem nulte hipoteze:

$$H_0\colon E(\hat{\sigma}^2_{02}) = E(\hat{\sigma}^2_{03}) = E(\hat{\sigma}^2_{04}) = \ldots = E(\hat{\sigma}^2_{08}) = \hat{\sigma}^2_0, \tag{2}$$

i alternativne hipoteze

$$H_A\colon \hat{\sigma}^2_{0.n} > \hat{\sigma}^2_{0.n+1}, \tag{3}$$

dobije se test-veličina

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,i}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} \text{ i } q = F_{f_i, f_8, 1-\alpha}\,; \text{ gdje je } 1 - \alpha = 0.95. \tag{4}$$

Kako se radi o testiranju varijanci aritmetičkih sredina pravaca koje su izračunane na osnovi mjerenja na petnaest stajališta, brojevi stupnjeva slobode f_n računani su po sljedećim izrazima:

$$f_n = n\,(n-1)\,(s-1) \tag{5}$$

gdje je:

n — broj girusa

s — broj pravaca (u ovom slučaju s = 5)

Iz izraza (4) i (5) dobiju se sljedeće vrijednosti:

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,2}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 10.52 \quad q = 1.98 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,3}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 4.83 \quad q = 1.57 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,4}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 3.04 \quad q = 1.41 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,5}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 2.02 \quad q = 1.35 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,6}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 1.64 \quad q = 1.31 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,7}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 1.28 \quad q = 1.28 \quad F_T = q : \text{prihvaća se } H_0$$

Očevidno je da je Kernom E2, u ovim uvjetima, bilo dostatno mjeriti u sedam girusa.

Ispitivana je standardna devijacija pravca kao funkcija broja girusa. Srednje vrijednosti standardne devijacije iz pojedinih girusa aproksimirane su polinomima od prvog do šestog stupnja, logaritamskim, eksponencijalnim (power) funkcijama (sl. 1).

$$Y = a X^b \tag{6}$$

gdje su:

a i b — koeficjenti

Y — standardna devijacija

X — broj girusa

Najprirodnija aproksimacija je upravo eksponencijalna funkcija, koja zahtjeva da su Y i X pozitivne veličine. Zanimljivo je napomenuti da su aproksimacije polinomima pokazivale tjemena (polinom parnog stupnja) ili točke infleksije (neparnog) na sedmom girusu, gdje je i F-test potvrdio da se signifikantno povećava točnost do sedmoga girusa.

2.2. Wild T2000S

Mjerenja elektroničkim teodolitom Wild T2000S br. 331954 izvedena su na istom tunelu s tim da je bilo četrnaest stajališta s dva, te pet stajališta s tri do pet pravaca (prosječno četiri). Na osnovi (1) izračunane su srednje vrijednosi standardnih devijacija za različit broj girusa za dva pravca na

Tablica 2.2-1. Srednje vrijednosti standardne devijacije aritmetičkih sredina pravaca kao funkcije broja girusa za dva pravca na stajalištu

	BROJ GIRUSA $n \in (2,8)$						
	2	3	4	5	6	7	8
Srednje vrijednosti standardne devijacije aritmetičke sredine $\hat{\sigma}_{0n}$ pravaca	0.″420	0.″285	0.″235	0.″222	0.″199	0.″188	0.″180

stajalištu (tablica 2.2-1) i isto tako za slučaj s prosječno četiri pravca (tablica 2.2-2).

Tablica 2.2-2. Srednje vrilednosti standardne devijacije aritmetičke sredine pravca kao funkcije broja girusa za prosječno četiri pravca po stajalištu

	BROJ GIRUSA $n \in (2,8)$						
	2	3	4	5	6	7	8
Srednje vrijednosti standardne devijacija aritmetičke sredine $\hat{\sigma}_{0n}$ pravaca	0.″685	0.″492	0.″369	0.″314	0.″278	0.″252	0.″243

Grafička je predodžba standardnih devijacija iz tablica 2.2-1. i 2.2-2. na slici 1.

Primjenom analogne analize i ograničenja kao i za elektronički teodolit E2, moguće je izračunati do kojeg se broja girusa signifikantno povećava točnost pravca za dva ili četiri pravca na stajalištu.

Iz (1), (4) i (5) za s = 2 dobiju se sljedeće vrijednosti:

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,2}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 5.44 \quad q = 3.18 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,3}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 2.51 \quad q = 2.29 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,4}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 1.70 \quad q = 1.95 \quad F_T < q : \text{prihvaća se } H_0$$

Za s = 4 pravca primjenom F-testa dobiju se ove vrijednosti:

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,2}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 7.94 \quad q = 2.16 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,3}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 4.10 \quad q = 1.67 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,4}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 2.31 \quad q = 1.50 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

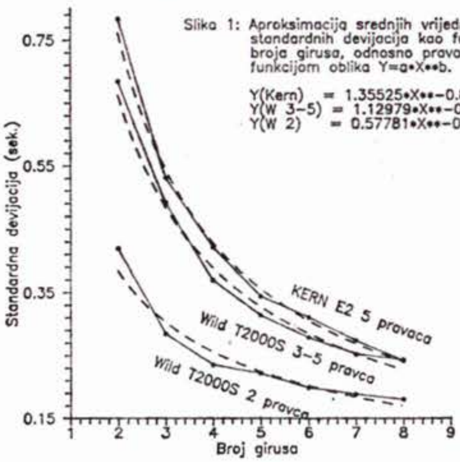
$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,5}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 1.66 \quad q = 1.41 \quad F_T > q : H_0 \text{ se odbacuje}$$

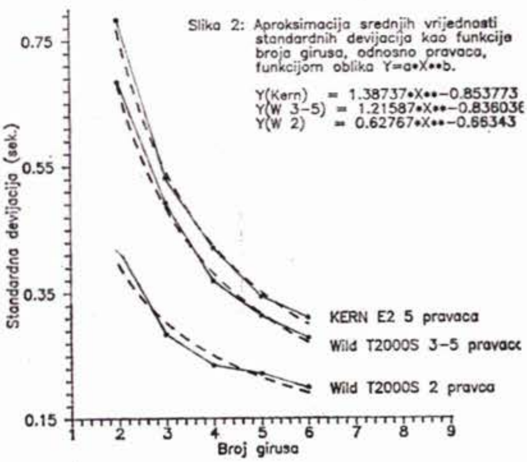
$$F_T = \frac{\hat{\sigma}^2_{0,6}}{\hat{\sigma}^2_{0,8}} = 1.31 \quad q = 1.35 \quad F_T < q : \text{prihvaća se } H_0$$

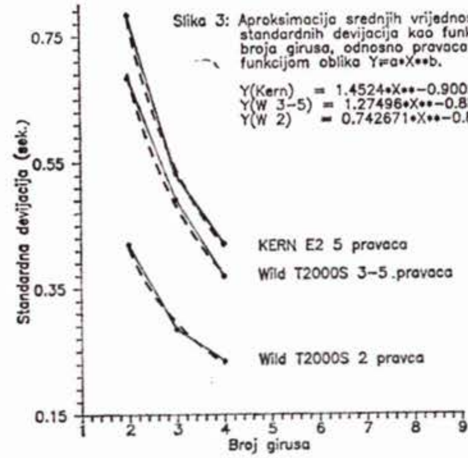
Očevidno je da je u ovim terenskim uvjetima za dva pravca na stajalištu dostatno mjeriti u četiri, a za s = 4 u šest girusa.

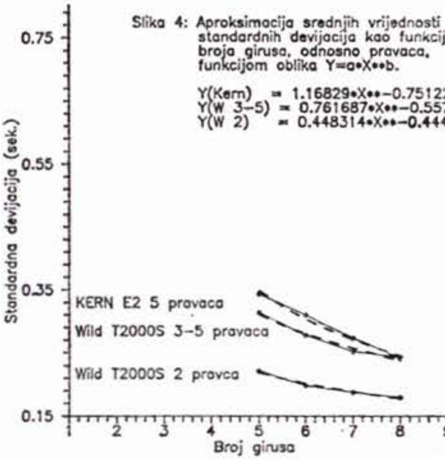
2.3. Ovisnost srednje pogreške, odnosno težine o broju girusa i broju pravaca

U načelu, sve metode mjerenja pravaca ili kutova polaze sa stajališta da je srednja pogreška obrnuto razmjerna korijenu iz broja girusa, odnosno









da je težina razmjerna broju girusa (npr.: Svečnikov, 1955; Muminagić, 1981; Čubranić, 1974). Naša ispitivanja pokazuju, na osnovi aproksimacije srednjih vrijednosti standardnih devijacija eksponencijalnim funkcijama, sljedeće vrijednosti (sl. 1, 2, 3, 4):

za elektronički teodolit E2 (s = 5 pravaca):

$$\overset{8\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,8} = 1.355\, n^{-0.832}}; \qquad \overset{6\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,6} = 1.388\, n^{-0.854}}; \qquad \overset{4\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,4} = 1.450\, n^{-0.900}}$$

za elektronički teodolit T2000S (s = 4 pravca):

$$\overset{8\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,8} = 1.130\, n^{-0.770}}; \qquad \overset{6\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,6} = 1.216\, n^{-0.836}}; \qquad \overset{4\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,4} = 1.275\, n^{-0.885}}$$

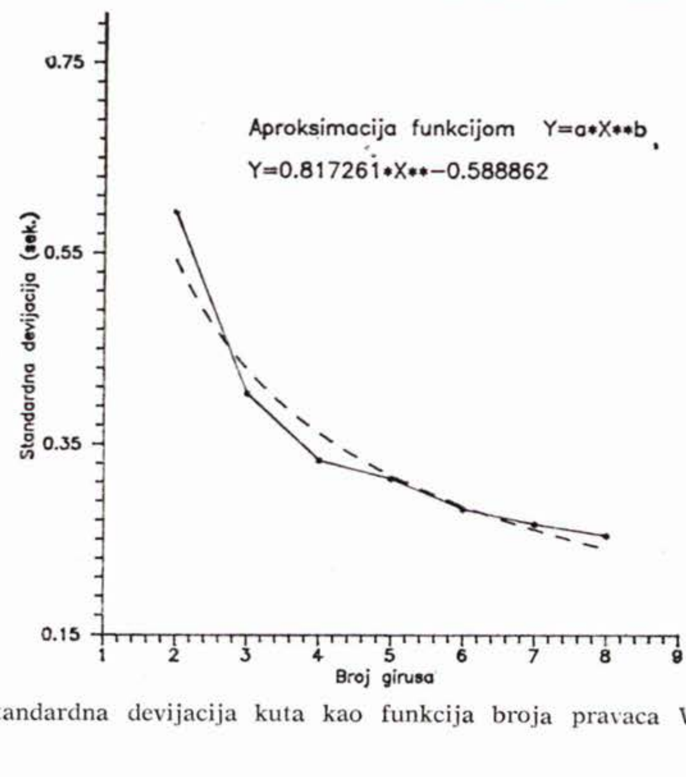
za elektronički teodolit T2000S (s = 2 pravca):

$$\overset{8\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,8} = 0.578\, n^{-0.589}}; \qquad \overset{6\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,6} = 0.628\, n^{-0.663}}; \qquad \overset{4\text{ girusa}}{\hat{\sigma}_{0,4} = 0.743\, n^{-0.843}}$$

Na osnovi prethodnih vrijednosti može se napisati približna, ali općenita formula za standardnu devijaciju:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{c}{n^{+0.75}}, \text{ odnosno } p \simeq \frac{\sqrt{n^3}}{2}. \qquad (7)$$

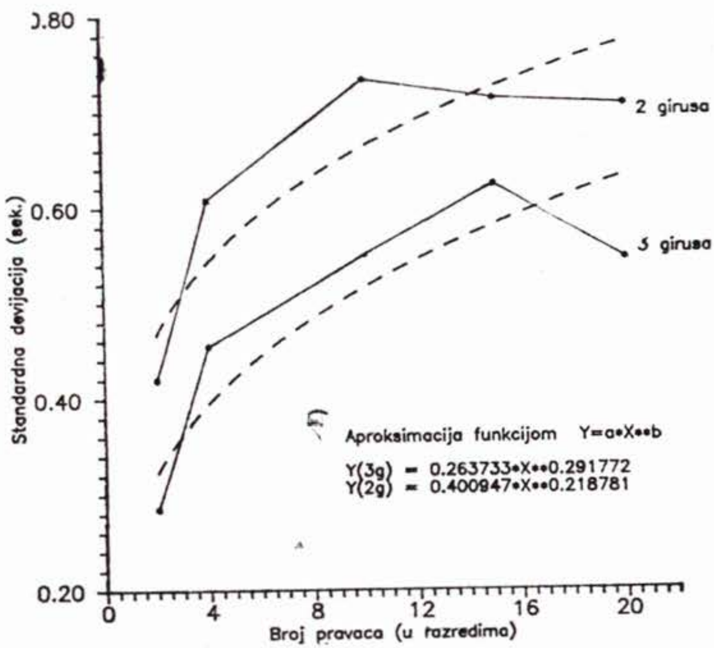
Zapravo, predloženi izraz: $p \cong \sqrt{n^3}$, kako će pokazati kasnije analize, daje odlične aproksimacije do broja girusa do kojega se signifikantno smanjuju standardne devijacije. To je za praktična mjerenja i bitno.



Slika 5. Standardna devijacija kuta kao funkcija broja pravaca Wild T2000S

Ako se traži funkcija najbolje aproksimacije standardne devijacije kuta ($s = 2$), dobije se i eksponencijalna funkcija oblika $Y = a\ X^b$ s istim eksponentom b i koeficijentom a pomnoženim s $\sqrt{2}$ (sl. 5).

Radi ispitivanja ovisnosti standardne devijacije pravca o broju pravaca na stajalištu, koristili smo mjerenja A. Bilajbegovića elektroničkim teodolitom T2000S, na branama Sabljaci, Bukovnik i Peruča u tri girusa. Mjerenja su izvedena s betonskih stupova uza zaštitu instrumenta od sunčeva utjecaja. Podijeljena su u skupine s 2 pravca, s 3 do 5, 9 do 12, 13 do 17 i 18 do 22 pravca (sl. 6). (Nažalost, nema ni jednog stajališta sa 6 do 8 pravaca.)



Slika 6. Standardna devijacija pravca kao funkcija broja opažanih pravaca na stajalištu

Krivulja srednjih vrijednosti standardnih devijacija aproksimirana je eksponencijalnom funkcijom pri mjerenju u 2 i 3 girusa: Dobiveni su ovi rezultati:

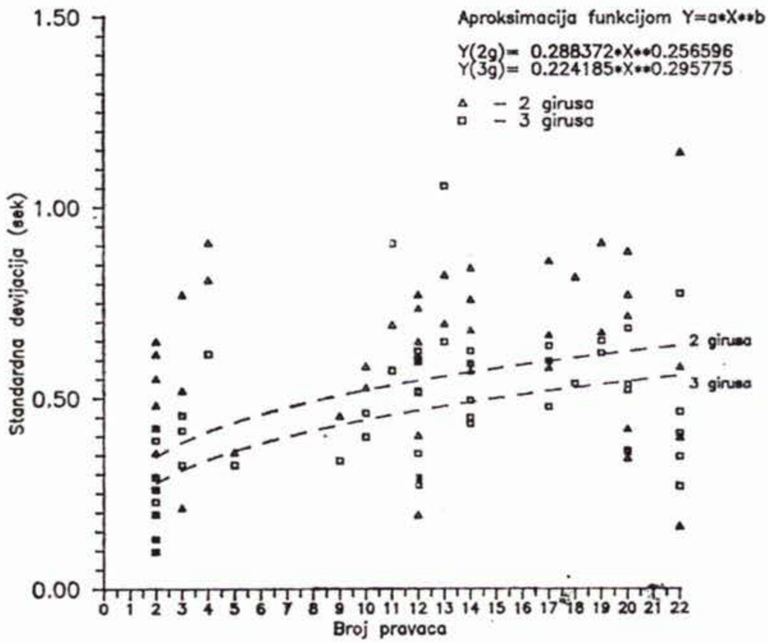
za dva girusa: $\hat{\sigma}_{0,2} = 0.401\ s^{0.219}$,

i za tri girusa: $\hat{\sigma}_{0,3} = 0.264\ s^{0.092}$. (8)

Ako se mjerenja ne dijele u skupine već se ukupna vrijednost standardnih devijacija u sklopu istog broja girusa aproksimiraju eksponencijalnom funkcijom, dobije se:

za dva girusa: $\hat{\sigma}_{0,2} = 0.288\ s^{0.257}$,

i za tri girusa: $\sigma = 0.224\ s^{0.296}$ (sl. 7). (9)



Slika 7. Standardna devijacija pravca kao funkcija broja opažanih pravaca na stajalištu

Na osnovi (7), (8) i (9) može se napisati općeniti izraz za standardnu devijaciju, odnosno težinu:

$$\hat{\sigma}_0 = c\frac{s^{0.25}}{n^{0.75}}, \text{ odnosno } p = c\sqrt{\frac{n^3}{s}},\ p \cong \sqrt{\frac{n^3}{s}}. \tag{10}$$

Bitno je napomenuti da su ovi izrazi dobiveni za elektroničke teodolite E2 i Wild T2000S i da prema našim ispitivanjima vrijede do broja girusa do kojega se znatno smanjuje standardna devijacija povećanjem broja girusa.

3. ISPITIVANJA NOVOUVEDENIH IZRAZA ZA TEŽINE PRAVACA

Najrealniji način ispitivanja izraza (1), tj. $p \cong \sqrt{n^3}$, zapravo je usporedba odnosa težina izračunanih na osnovi njega i iz procijenjenih varijanci pravaca na osnovi konkretnih mjerenja u različitom broju girusa (tablica 3-1) (za elektronički teodolit E2).

Zapravo, pruža se mogućnost računanja standardnih devijacija odstupanja odnosa težina prema našoj formuli i formuli koja je vrijedila do sada ($p \cong n$) i varijanci iz konkretnih mjerenja (tablica 3-1).

Iz tablice 3—1 može se zaključiti da odnos varijanci odnosa težina izračunan na osnovi naše formule za težine u usporedbi s odnosom težina iz »stvarnih« varijanci daje oko četiri puta (400%) manje standardne devijacije u odnosu na adekvatne vrijednosti izračunane na osnovi dosadašnjeg izraza za težine ($p \cong n$) i »stvarnih« varijanci [tablica 3—1, stupci (7), (14), (21) i (28)].

Tablica 3—1. Usporedba težina pravaca za E2 iz različitog broja girusa prema $p = \sqrt{n^3}$ i $p = n$ s odnosom težina iz konkretnih mjerenja

Broj girusa	Stand. devij. (")	Br.gir. / Br.gir.	Odnos težina iz poče. varijanci $O = \hat{\sigma}_2^2 / \hat{\sigma}_i^2$	Odnos težina po izrazu $O = \sqrt{n_i^3} / \sqrt{2^3}$	Odnos težina $O = \frac{n_i}{2}$	$v_1 =$ 4-5	$v_2 =$ 4-6
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
2	0.784						
3	0.531	3/2	2.179	1.837	1.5	0.382	0.679
4	0.421	4/2	3.463	2.828	2.0	0.637	1.463
5	0.344	5/2	5.198	3.953	2.5	1.245	2.698
6	0.310	6/2	6.393	5.196	3.0	1.197	3.393
7	0.273	7/2	8.237	6.548	3.5	1.689	4.737
8	0.242	8/2	10.516	8.000	4.0	2.516	6.516
$\sigma_i = \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{6}}$; $i = 1, 2$, $\sigma_s = \sigma_2 / \sigma_1$					σ_i	1.456	3.792
					σ_s	2.604	
						10-11	10-12
		(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
		4/3	1.589	1 540	1.333	0.049	0.256
		5/3	2.385	2 152	1.667	0.233	0.718
		6/3	2.934	2 828	2.000	0.106	2.934
		7/3	3.780	3 564	2.333	0.216	1.447
		8/3	4.827	4 355	2.667	0.472	2.160
					σ_i	0.260	1.786
					σ_s	6.869	
						16-17	16-18
		(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
		5/4	1.501	1.398	1.250	0.103	0.251
		6/4	1.846	1.837	1.500	0.009	0.346
		7/4	2.379	2.315	1.750	0.064	0.629
		8/4	3.037	2.828	2.000	0.209	1.037
					σ_i	0.121	0.643
					σ_s	5.314	
						22-23	22-24
		(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
		6/5	1.230	1.315	1.200	-0.085	0.030
		7/5	1.585	1.656	1.400	-0.071	0.185
		8/5	2.023	2.024	1.600	-0.001	0.423
					σ_i	0.064	0.267
					σ_s	4.174	

Slična analiza napravljena je i za mjerenja elektroničkim teodolitom Wild T2000S za s = 4 pravca (tablica 3—2).

Tablica 3—2. Usporedba težina pravaca za Wild T2000S iz različitog broja girusa prema $p = \sqrt{n^3}$ i $p = n$ s odnosom težina iz konkretnih mjerenja

Broj girusa	Stand. devij. (")	Br.gir. / Br.gir.	Odnos težina iz poče. varijanci $O = \hat{\sigma}_2^2 / \hat{\sigma}_1^2$	Odnos težina po izrazu $O = \sqrt{n_i^3} / \sqrt{2^3}$	Odnos težina $O = \frac{n_i}{2}$	$V_1 =$ 4-5	$V_2 =$ 4-6
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
2	0.685	2/2					
3	0.492	3/2	1.938	1.837	1.5	0.101	0.438
4	0.369	4/2	3.446	2.828	2.0	0.618	1.446
5	0.314	5/2	4.759	3.958	2.5	0.806	2.254
6	0.278	6/2	6.071	5.196	3.0	0.875	3.071
7	0.252	7/2	7.389	6.548	3.5	0.841	3.889
8	0.243	8/2	7.946	8.000	4.0	-0.054	3.946
$\sigma_i = \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{6}}$; $i = 1, 2$, $\sigma_s = \sigma_2 / \sigma_1$					σ_i	0.648	2.813
					σ_s	4.342	
						10-11	10-12
		(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
		4/3	1.778	1. 40	1.333	0.238	0.445
		5/3	2.455	2. 52	1.667	0.303	0.778
		6/3	3.132	2. 28	2.000	0.304	1.132
		7/3	3.812	3. 64	2.333	0.248	1.479
		8/3	4.099	4. 55	2.667	-0.256	1.432
					σ_i	0.271	1.126
					σ_s	4.155	
						16-17	16-18
		(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
		5/4	1.381	1.398	1.250	-0.017	0.131
		6/4	1.762	1.837	1.500	-0.075	0.262
		7/4	2.144	2.315	1.750	-0.171	0.394
		8/4	2.306	2.828	2.000	-0.522	0.306
					σ_i	0.277	0.289
					σ_s	104	
						22-23	22-24
		(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
		6/5	1.276	1.315	1.200	-0.039	0.076
		7/5	1.553	1.656	1.400	-0.103	0.153
		8/5	1.670	2.024	1.600	-0.354	0.070
					σ_i	0.214	0.107
					σ_s	048	

Kako je F-test pokazao da je za T2000S dostatno mjeriti do 6 girusa, odnos varijanci odnosa težina sličan je kao i za E2, ali za ovaj instrument nešto manji iznosi 2.51 puta (251%) (tablica 3—2). Rezultati odnosa varijanci odnosa težina izračunanih po predloženoj formuli $p \simeq \sqrt{n^3}$ i dosadašnjoj $p = n$ pokazuju da je predloženi izraz 2.5 odnosno 4 puta bolji.

Slična analiza mogla se predočiti i za mjerenje s dva pravca. Međutim, F-test je pokazao da se signifikantno smanjuje standardna devijacija do četiri girusa, te bi i analizu trebalo napraviti do 4 girusa (tablica 3—3).

Tablica 3-3. Odnos varijanci odnosa težina za $p = \sqrt{n^3}$, $p = n$ i p izračunan iz srednjih vrijednosti procijenjenih varijanci na 14 stajališta

Broj girusa n	Procjenjene srednje standardne devijacije iz mjerenja (″)	Odnos težina iz srednjih procijenjenih varijanci $O = \sigma_2^2/\sigma_1^2$	Odnos težina iz $O_1 = \sqrt{n_i^3}/\sqrt{2^3}$	Odnos težina iz $O_2 = \frac{n_i}{2}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	0.42	1.000	1.000	1.000
3	.28	2.172	1.837	1.500
4	.23	3.194	2.829	2.000
5	.22	3.579	3.953	2.500
6	.20	4.454	5.197	3.000
7	.18	4.991		3.500
8	.18	5.444		4.000

Mada F-test pokazuje da je dostatno mjeriti do 4 girusa, predložena formula $p \simeq \sqrt{n^3}$ daje bolje rezultate sve do šestoga girusa u odnosu na dosadašnju formulu $p = n$. Iz usporedbe stupaca 4 i 5 sa stupcem 3 tablice 3—3 može se zaključiti da je odnos težina dobiven na osnovi novouvedenih izraza za težine bliži odnosu težina dobivenih iz stvarnih mjerenja.

3.1. Ispitivanje težine pravca kao funkcije broja girusa i broja mjerenih pravaca na stajalištu

Rezultat naših ispitivanja je izraz (10) $p \cong \sqrt{\frac{n^3}{s}}$. Mjerenja obavljena na branama Sabljaci, Bukovnik i Peruča, radi lakšeg ispitivanja, dijelimo u razrede s dva i prosječno s četiri, deset, petnaest i dvadeset pravaca. Koristeći izraz (1), izračunane su srednje vrijednosti standardnih devijacija (tablica 3.1—1) iz dva odnosno tri girusa. Na osnovi izračunanih standardnih devijacija izračunani su odnosi težina u kombinacijama po broju pravaca i girusa, te uspoređeni s izračunanim odnosima težina po predloženoj novoj formuli i dosadašnjoj. Na osnovi pojedinih odnosa standardnih devijacija odnosno težina (tablica 3.1—1, 10. stupac) izračunana je srednja vrijednost:

$$o = \frac{o_1 + o_2 + \ldots + o_5}{5} = 2.046.$$

Drugim riječima, to znači da su težine izračunane po predloženoj formuli oko dva puta (ili 204.6%) točnije od izračunanih težina prema dosadašnjoj formuli.

Tablica 3.1-1. Ispitivanje odnosa težina za mjerenja Wildom T2000S u 2 i 3 girusa s brojem pravaca od 2 do 20

Presj. broj pravaca	Srednje standardne devijacije 2 girusa	Srednje standardne devijacije 3 girusa	ODNOS TEŽINA za broj pravaca iz 2 girusa	za broj pravaca iz 3 girusa	računat po formuli iz stand. devijacije	$p=\sqrt{\frac{n^3}{s}}$	po formuli $p=n$	ODSTUPANJA I ODNOS STAND. DEVIJACIJA v_1 6-7	v_2 6-8	ODNOS TEŽINA za broj pravaca iz 2 girusa	za broj pravaca iz 3 girusa	računat po formuli iz stand. devijacije	$p=\sqrt{\frac{n^3}{s}}$	po formuli $p=n$	ODSTUPANJA I ODNOS STAND. DEVIJACIJA v_1 13-14	v_2 13-15
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(15)	(16)
2	0.420	0.285	2	2	0.460	0.544	0.667	0.084	-0.207	4	2	0.220	0.385	0.667	-0.165	-0.447
4	0.608	0.454	2	4	1.168	0.770	0.667	0.307	0.501	4	4	0.558	0.544	0.667	0.014	-0.109
10	0.732	0.550	2	10	1.715	1.217	0.667	0.592	1.048	4	10	0.813	0.860	0.667	-0.047	0.146
15	0.713	0.623	2	15	2.200	1.491	0.667	0.709	1.533	4	15	1.050	1.054	0.667	-0.004	0.383
20	0.707	0.545	2	20	1.683	1.721	0.667	0.038	1.045	4	20	0.803	1.217	0.667	-0.414	0.136
					$\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{[vv]}{n}}$; $o_1=\hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}_1$		σ_1	0.437	0.977						0.200	0.282
							o_1	2.236							1.410	

ODNOS TEŽINA za broj pravaca iz 2 girusa	za broj pravaca iz 3 girusa	računat po formuli iz stand. devijacije	$p=\sqrt{\frac{n^3}{s}}$	po formuli $p=n$	ODSTUPANJA I ODNOS STAND. DEVIJACIJA v_1 19-20	v_2 19-22	ODNOS TEŽINA za broj pravaca iz 2 girusa	za broj pravaca iz 3 girusa	računat po formuli iz stand. devijacije	$p=\sqrt{\frac{n^3}{s}}$	po formuli $p=n$	ODSTUPANJA I ODNOS STAND. DEVIJACIJA v_1 26-27	v_2 26-28
(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)
10	2	0.152	0.243	0.667	-0.091	-0.515	15	2	0.160	0.199	0.667	-0.039	-0.507
10	4	0.385	0.344	0.667	0.014	-0.282	15	4	0.405	0.281	0.667	0.124	-0.262
10	10	0.564	0.544	0.667	0.020	-0.103	15	10	0.595	0.444	0.667	0.151	-0.072
10	15	0.724	0.667	0.667	0.057	0.057	15	15	0.763	0.730	0.667	0.033	0.096
10	20	0.554	0.770	0.667	-0.216	-0.113	15	20	0.584	0.728	0.667	-0.144	-0.083
					0.108	0.273						0.111	0.263
					2.528							2.369	

ODNOS TEŽINA za broj pravaca iz 2 girusa	za broj pravaca iz 3 girusa	računat po formuli iz stand. devijacije	$p=\sqrt{\frac{n^3}{s}}$	po formuli $p=n$	ODSTUPANJA I ODNOS STAND. DEVIJACIJA v_1 23-34	v_2 33-35
(31)	(32)	(33)	(34)	(35)	(36)	(37)
20	2	0.162	0.172	0.667	-0.010	-0.505
20	4	0.412	0.243	0.667	0.169	-0.255
20	10	0.605	0.544	0.667	0.061	-0.062
20	15	0.776	0.471	0.667	0.305	0.109
20	20	0.500	0.544	0.667	-0.044	-0.167
					0.160	0.270
					1.688	

U utvrđivanju broja girusa, u kojemu treba mjeriti pravce, obično su se autori pridržavali osnovne formule za ocjenu točnosti aritmetičke sredine (Svečnikov, 1955):

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Međutim, razvijena formula glasi:

$$M = \sqrt{\frac{[vv]}{n\,(n-1)\,(s-1)}}. \tag{12}$$

U nazivniku (12) pojavljuje se i izraz $\sqrt{n\,(n-1)}$, a ne samo $\sqrt{n}$. Za ispitivanje ovisnosti standardne devijacije pravca o broju girusa Svečnikov (1955) npr. uzima da je izraz

$$\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)\,(s-1)}} = c \cong 1'' \text{ i koristi (11), tj. } M = 1/\sqrt{n},$$

radi dokazivanja u koliko girusa ima smisla mjeriti pravce. Postavlja se pitanje: zašto onda ne uzeti za konstantu izraz:

$$\sqrt{\frac{[vv]}{(s-1)}} = c \cong 1''? \tag{13}$$

Na osnovi ovako uvedene konstante moguće je izračunati teorijske standardne devijacije po izrazu (12) uz pridržavanje (13), te na osnovi našeg: $M_1 = 1/n^{0.75}$ i dosadašnjeg izraza $M_2 = 1/n^{0.5}$, varirajući broj girusa, zatim na osnovi standardnih devijacija i odnosa težine (tablica 3.1—2).

Kao mjerilo usklađenosti odnosa težina može se uzeti odstupanje odnosa težina od jedinice. (Kad bi teorijska težina, za različit broj girusa, bila jedna-

Tablica 3.1-2. Određivanje odstupanja odnosa težina od jedinice za različite metode kao funkcije broja girusa

Broj girusa	$M = \frac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}}$	$M_1 = \frac{1}{n^{0.75}}$	$M_2 = \frac{1}{n^{0.5}}$	ODNOS TEŽINA $O_1 = \frac{M_1^2}{M^2}$	ODNOS TEŽINA $O_2 = \frac{M_2^2}{M^2}$	Odstupanje odnosa težina od jedinice $v_1 = 1 - O_1$	Odstupanje odnosa težina od jedinice $v_2 = 1 - O_2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)		
1	∞	1.000	1.000				
2	0.707	0.595	0.707	0.841	1.000	0.159	0.000
3	0.408	0.439	0.577	1.076	1.414	−0.076	−0.414
4	0.287	0.353	0.500	1.230	1.742	−0.230	−0.742
5	0.224	0.299	0.447	1.335	1.996	−0.335	−0.996
6	0.183	0.261	0.408	1.426	2.230	−0.426	−1.230
7	0.154	0.232	0.378	1.506	2.454	−0.506	−1.454
8	0.134	0.210	0.353	1.567	2.634	−0.567	−1.634
9	0.118	0.192	0.333	1.627	2.822	−0.627	−1.822
10	0.105	0.178	0.316	1.695	3.010	−0.695	−2.010
11	0.095	0.165	0.301	1.737	3.168	−0.737	−2.168
12	0.087	0.155	0.289	1.782	3.322	−0.7 7	−2.322
					$\Sigma v_1; \Sigma v2$	−4.822	−14.792
					$o = \Sigma v_1/\Sigma v_2$	3.068	

ka računanim na osnovi vrijednosti iz stupaca (3) i (4) tablice 3.1—2, odnos bi težina u stupcima (7) i (8) bio jednak jedinici.) Zbroj odstupanja odnosa težina od jedinice za naš model $(p = \sqrt{n^3})$, tri puta je manji u odnosu na adekvatnu vrijednost za dosadašnji općeprihvaćen model (p=n) (tablica 3.1-2).

4. PROMJENE METODA MJERENJA PRAVCA, ODNOSNO KUTOVA RADI USKLAĐIVANJA S NOVOPREDLOŽENIM IZRAZOM ZA TEŽINU

4.1. Schreiberova metoda

Ako se prihvati izraz za težinu pravca $p = \sqrt{\frac{n^3}{s}}$, odnosno za kut $(s = 2)$ $p = \sqrt{n^3}$, trebalo bi korigirati dosadašnje formule za računanje težina pravaca za prvi red $p_I = n\ s = 24$, odnosno drugi red $p_{II} = n\ s = 20$ iz n girusa za s pravaca na stajalištu.

Ako se uzme da za 4 pravca na stajalištu postoji jednak broj girusa po dosadašnjem i novom izrazu za težine $(p = s\sqrt{n^3})$, moguće je sastaviti usporedne tablice opažanja za I. i II. red mreže, npr. $p = n\ s = 24 \rightarrow n = 24/s$, $s = 4$, $n = 6$;

$p_I = s\sqrt{n^3} = c$, za $n = 6$, $s = 4 \rightarrow c = 58.788$, $n = (c/s)^{2/3}$ (tablica 4.1—1).

Tablica 4.1-1. Broj girusa kao funkcija broja pravaca na stajalištu po dosadašnjem i novopredloženom izrazu

Broj pravaca na stajalištu s	I. RED MREŽE			II. RED MREŽE		
	Broj girusa $n = p/s$	Broj girusa $n_I = (c/s)^{2/3}$	Razlika $n_I - n_2$	Broj girusa $n = 20/s$	Broj girusa $n_I = (44.721/s)^{2/3}$	Razlika $n_I - n$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	12	10	−2	10	8	−2
3	8	8	0	7	7	0
4	6	6	0	5	5	0
5	5	5	0	4	5	1
6	4	5	1	4	4	0
7	4	4	0	3	4	1
8	3	4	1	3	4	1
9	3	4	1	3	3	0
10	3	4	1	2	3	1

(Dakako, za oba načina računanja težina mogao se uzeti i neki drugi broj pravaca s.)

Glavni nedostaci Schreiberove metode mjerenja kutova očituju se u:

1. opažanju dijametralno suprotnih pravaca;
2. u velikog broja pravaca smanjuje se broj izravno mjerenih veličina (kutova) na račun izračunanih, što sa stajališta teorije pogrešaka nije poželjno.

I novopredloženi izraz ima prvi nedostatak, ali drugi se umanjuje [usporedi stupce (4) i (7) tablice 4.1—1]. To je dakako pozitivna odlika novopredloženog izraza.

4.2. Girusna metoda

Geodeti su ustvrdili da srednja pogreška pravca ovisi i o broju pravaca na stajalištu, te je Pravilnikom preporučeno da se u istoj skupini ne smiju opažati veći broj od:

II. osnovni red	7 pravaca,
II. popunjujući red	9 pravaca,
III. osnovni red	10 pravaca,
III. popunjujući red	12 pravaca i
IV. red	15 pravaca.

Prihvati li se jednak broj girusa za stajališta sa šest pravaca prema Pravilniku i novopredloženom izrazu $\left(p = \sqrt{\frac{n^3}{s}}\right)$, moguće je **izračunati broj girusa** za pojedini red mreže, ovisno o broju pravaca (tablica 4.2—1).

Svrha nam je postići homogena mjerenja (jednakih težina) bez obzira na broj pravaca na stajalištu, dakako u sklopu istog reda mreže. Prihvaćajući novi izraz za težine, moguće je izračunati odnos težina za minimalan (s = 2) i maksimalno dopušten broj pravaca u dotičnom redu mreže. Teorijski odnos težina trebao bi iznositi 1.00. Rezultati na osnovi novopredloženog izraza su blizu jedinice, a broj girusa po Pravilniku daje odnos težina u rasponu od 1.87 do 2.74 (tablica 4.2—1).

Pri mjerenju pravaca radi utvrđivanja pomaka točaka građevinskih objekata, često se sve točke objekta i geodetske mreže mjere u jednoj skupini i pojavljuje se veliki broj pravaca za mjerenje na stajalištima.

Kako se s ugrađenih betonskih stupova mjeri instrumentom zaštićenim od sunca, pretpostavljalo se da mjerenja treba obaviti u istom broju girusa. Mjerenja su obično izvođena u tri girusa. Ako se stajalište sa šest pravaca mjeri u tri girusa, moguće je izračunati broj girusa za različit broj pravaca, sa svrhom da bi mjerenja imala približno jednake težine prema novouvedenom izrazu (tablica 4.2—2).

Tablice 4.2—1 i 4.2—2 dobivene su na osnovi konkretnih ispitivanja na osnovi izvedenih mjerenja elektroničkim teodolitom Wild T2000S br. 331954. Slične razrade metoda mjerenja kutova mogli bismo izvesti i za sektorsku i metodu zatvaranja horizonta, uvodeći izraz (10) za težine mjerenja.

5. ZAKLJUČAK

Na osnovi konkretnih mjerenja elektroničkim teodolitima Kern E2 br. 352438 i Wild T2000S br. 331954, provedenih s ugrađenih betonskih stupova, ispitivanjem rezultata mjerenja dobiven je novi izraz za težine mjerenja horizontalnih pravaca (kutova) $p = \sqrt{n^3/s}$, gdje je n — broj girusa i s — broj pravaca. Rezultati brojnih ispitivanja pokazuju da su mjerenja izvedena u skladu s novom formulom homogena, tj. da imaju ujednačene težine. Prihva-

Tablica 4.2—1. Broj girusa po Pravilniku i po novouvedenom izrazu ovisno o o redu mreže i broju pravaca na stajalištu

Broj pravaca s_i	II OSNOVNI RED			II POPUNJAVAJUĆI RED		
	Broj girusa			Broj girusa		
	po Pravilniku	$n=(p^2 s)^{1/3}$	Razlika (3)-(2)	po Pravilniku	$n=(p^2 s)^{1/3}$	Razlika (6)-(5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
2	10	7	-3	8	6	-2
3	10	8	-2	8	7	-1
4	10	9	-1	8	7	-1
5	10	10	0	8	8	0
6	10	10	0	8	8	0
7	10	11	1	8	9	1
8				8	9	1
9				8	10	2
10						
11						
12						
13						
14						
15			Treba			Treba
o*	1.870	0.950	1.000	2.120	0.990	1.000

o* - odnos težina za dva i maksimalan broj pravaca u dotičnom redu mreže o $\sqrt{\frac{n^3}{2}} / \sqrt{\frac{n^3}{s_i}}$

III OSNOVNI RED			III POPUNJAVAJUĆI RED			IV RED		
Broj girusa			Broj girusa			Broj girusa		
po Pravilniku	$n=(p^2 s)^{1/3}$	Razlika (9)-(8)	po Pravilniku	$n=(p^2 s)^{1/3}$	Razlika (12)-(11)	po Pravilniku	$n=(p^2 s)^{1/3}$	Razlika (15)-(14)
(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
6	5	-1	4	3	-1	3	2	-1
6	5	-1	4	4	0	3	3	0
6	6	0	4	4	0	3	3	0
6	6	0	4	4	0	3	3	0
6	6	0	4	4	0	3	3	0
6	7	1	4	5	1	3	4	1
6	7	1	4	5	1	3	4	1
6	7	1	4	5	1	3	4	1
6	8	2	4	5	1	3	4	1
			4	5	1	3	4	1
			4	5	1	3	4	1
						3	4	1
						3	4	1
		Treba			Treba	3	4	1
2.240	1.160	1.000	2.450	0.900	1.000	2.740	0.970	1.000

Tablica 4.2-2. Broj girusa kao funkcija broja pravaca

Broj pravaca s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Broj girusa n	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5

ćanje novog izraza za težine zahtjeva novu razradu metoda mjerenja horizontalnih pravaca odnosno kutova. Dakako, trebalo bi obaviti neusporedivo veći broj mjerenja (koje autori nisu posjedovali) u različitom broju girusa ($n = 1$ do $n = 12$) s različitim brojem pravaca ($s = 2$ do minimalno $s = 12$), različitim instrumentima, da bi se potvrdila ispravnost novopredložene formule za različit instrumentarij i različite uvjete mjerenja.

U tu svrhu autori su analizirali Schreiberova originalna mjerenja (Muminagić, 1981). Za petnaest skupina mjerenja pokazalo se da osam skupina daju manju srednju pogrešku iz prvih dvaju nego iz svih četiriju girusa. To je apsurdno, i zbog toga i jasno zašto je Schreiber predložio izraz za težine $p = n$, odnosno $p = n\ s$.

LITERATURA

Bilajbegović, A.; Solarić, N. (1988): Izvedbeni projekt tunela Chiffa u Alžiru. Zagreb — Medea.

Bilajbegović, A. (1986, ..., 1990): Elaborati određivanja horizontalnih pomaka brana Sabljaci, Bukovnik i Peruča. Zagreb.

Bilajbegović, A. (1991): Rukopis — Viša geodezija. Zagreb.

Čubranić, N. (1974): Viša geodezija. Sveučilišna naklada Liber, str. 1—655, Zagreb.

Muminagić, A. (1981): Viša geodezija I. str. 1—506, Sarajevo.

Golden Software, Inc.: Grapher, Golden, Colorado, 1988.

Pravilnik za državni premjer, I. dio — Triangulacija (1951): Glavna geodetska uprava, str. 1—310, Beograd.

Svečnikov, N. (1953): Viša geodezija — prva knjiga. Savezna geodetska uprava, str. 1—388, Beograd.

Vodopivec, F., Kogoj, D. (1988): Analiza natančnosti klasičnega in elektronskega teodolita. Savjetovanje »Inžinjerska geodezija«, Zbornik radova, str. 91—102, Priština.

RESEARCH ON THE WEIGHTS OF HORIZONTAL ANGLE MEASUREMENTS MADE BY MODERN ELECTRONIC THEODOLITES E2 AND T2000S PROPOSING A MODIFICATION OF MEASUREMENT METHODS

Based on measurements from a firm concrete pillar made by the gyrus method, with an electronic theodolite KERN E2 and Wild T2000S, in several microtriangulation networks, the function of the best approximation for standard deviation curve for direction has been investigated. The research shows that this is a 'power' function with a form $Y = a\ X^b$. Besides, we have examined the accuracy and the weights of the measured directions as functions of a direction number per one stay, and finally got a common formula for a weight $p = \sqrt{n^3/s}$ (n — number of gyruses, s — number of directions). Considering this newly proposed expression for the weight, a proposition for modification of basic methods for measuring horizontal directions and angles respectively has been elaborated.

Primljeno: 1992-05-05