

RAČUNANJE POVRŠINE LIKA PROIZVOLJNOG OBLIKA NA ELIPSOIDU

Drago ŠTEMBERGER — Zagreb*

SAŽETAK. U radu se daje prikaz mogućih računanja površine lika proizvoljnog oblika na izabranom elipsoidu. U kompjutorskom okruženju navode se tri mogućnosti: računanje u koordinatnom sustavu digitalizatora; računanje u ravnom pravokutnom sustavu projekcije kartografskog izvora podataka i računanje s pomoću geografskih koordinata.

1. UVOD

Površina lika proizvoljnog oblika, čije su granice definirane vektorom koordinata prijelomnih točaka u ravnini, može se jednostavno odrediti prema izrazu (1) ili (2) (npr., Solarić, 1980).

$$P = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (x_{i+1} - x_i) (y_i + y_{i+1}), \quad (1)$$

$$P = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (y_{i+1} - y_i) (x_i + x_{i+1}), \quad (2)$$

gdje su y_i, x_i koordinate i -te točke.

Postavlja se pitanje — kako odrediti površinu ovakvog lika na plohi elipsoida.

Pri određivanju površina planimetrom, ovaj je zadatak rješavan uglavnom na dva načina (npr. Volkov, 1950):

— konstanta planimetra određena je tako da je u sebi sadržavala parametar mjerila kartografskog izvora i srednji parametar deformacije projekcije;

— površina je najprije određena u ravnini projekcije, a zatim je činjena njena redukcija na elipsoid po računski dobivenim parametrima.

Pri oba načina nije se mogla obračunati dinamičnost deformacije projekcije u ovisnosti o položaju točke, već su prevođenja obavljena s reprezentativnim vrijednostima za određenu plohu, obično za cijeli list ili dio lista karte. Upravo to čini spomenute metode približnima.

* Dr. Drago Štemberger, viši znanstveni suradnik, Zagreb, Ul. Brune Bušića 14.

Pri izvođenju mjerenja digitalizatorom ili skanerom (nakon vektorizacije) u načelu su moguća tri načina obrade (Štemberger, 1986):

- izračunavanje površine u lokalnom koordinatnom sustavu digitalizatora i njeno prevođenje na elipsoid;
- izračunavanje u koordinatnom sustavu projekcije kartografskog izvora i njeno prevođenje na elipsoid i
- izravno izračunavanje površine na elipsoidu iz geografskih koordinata prijelomnih točaka lika.

Očevidno je da su prva dva načina analogna postupcima koji su primjenjivani pri planimetrijskim mjerenjima. S gledišta obračuna deformacija projekcije, oba su približna, iako se pri drugom rješenju u načelu može osigurati gotovo po želji izabrana točnost. Treće rješenje je nedvojbeno egzaktno i zato privlači posebnu pažnju. Ukratko će se razmotriti sve tri mogućnosti (detaljnije: Štemberger, 1986).

2. RAČUNANJE POVRŠINE S POMOĆU LOKALNOGA KOORDINATNOG SUSTAVA DIGITALIZATORA

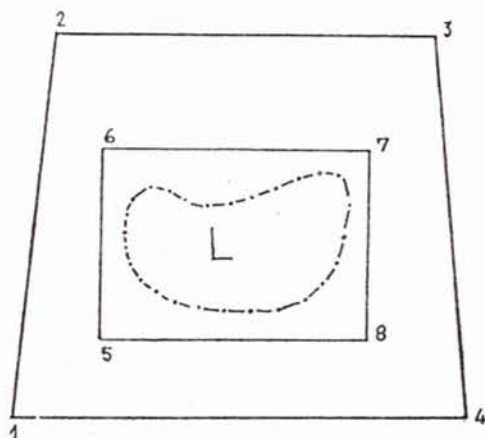
Prema izrazima (1) ili (2) izračunat će se površina P lika u koordinatnom sustavu digitalizatora. Njena redukcija na plihu elipsoida obaviti će se po (3) s koeficijentom k_1 , definiranim izrazom (4).

$$P'' = Pk_1, \quad (3)$$

gdje je

$$k_1 = \frac{P_{\square}^E}{P_{\square}^M}. \quad (4)$$

Površina P_{\square}^E može se odrediti kao površina elipsoidnog trapeza po poznatim izrazima (npr. Jovanović, 1983; Štemberger, 1991), na osnovi teoretskih vrijednosti geografskih koordinata točaka 1, 2, 3, 4 ili 5, 6, 7, 8 (sl. 1), dok površina P_{\square}^M predstavlja površinu izračunanu po (1) ili (2) na osnovi digitaliziranih vrijednosti koordinata istih točaka.



Slika 1. List karte s vrhovima 1, 2, 3, 4, presjecima koordinatne mreže 5, 6, 7, 8 i digitaliziranim točkama lika L

Postupak definiran izrazom (3) ima sljedeće važne nedostatke:

- (a) primjenom k_1 teži se da se eliminiraju tri različite vrste pogrešaka: pogreške mjerenja, pogreške osnovne jedinice digitalizatora i pogreške kartografskog izvora;
- (b) koeficijent k_1 moguće je praktički odrediti za veću plohu (cijeli list ili veći dio lista karte) pa se zato ne odnosi na lik L i predstavlja približenje prave vrijednosti, koju je ovakvim postupkom nemoguće odrediti.

Nedostatak (a) može se ublažiti višestrukim ponavljanjem mjerenja, čijim je osrednjavanjem moguće djelomično isključiti neke od pogrešaka. Drugi nedostatak se također može ublažiti biranjem točaka 5, 6, 7, 8 što bliže liku L, iako najčešće praktički to nije tako jednostavno.

Bez obzira na stanovite mogućnosti djelomičnog otklanjanja navedenih nedostataka, smatramo da je primjena ovog postupka ograničena samo na najgrublja kartometrijska određivanja.

3. RAČUNANJE POVRŠINA S POMOĆU PRAVOKUTNOGA KOORDINATNOG SUSTAVA PROJEKCIJE KARTOGRAFSKOG IZVORA

Ovaj postupak pretpostavlja prethodnu transformaciju koordinata svih digitaliziranih točaka iz sustava digitalizatora (x, y) u koordinatni sustav projekcije kartografskog izvora (y', x') .

Ako je projekcija izvora neka od ekvivalentnih kartografskih projekcija, tada se površina lika L na elipsoidu može izravno odrediti po (5) ili (6), imajući na umu da su koordinate prijelomnih točaka lika definirane u koordinatnom sustavu konkretne ekvivalentne projekcije (y', x') :

$$P' = P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (x'_{i+1} - x'_i) (y'_i + y'_{i+1}), \quad (5)$$

$$P' = P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (y'_{i+1} - y'_i) (x'_i + x'_{i+1}). \quad (6)$$

U općem slučaju, kada se dakle ne radi o ekvivalentnoj projekciji, izračunavanju površine se može prići na dva načina.

Prvi način je sasvim približan. Po (5) ili (6) dobiva se površina P' , opterećena uz ostalo pogreškama zbog deformacije projekcije. Svođenje na plohu elipsoida može se sada obaviti koeficijentom k_2 , odnosno:

$$P'' = P' \cdot k_2, \quad (7)$$

gdje k_2 predstavlja odnos između površine na elipsoidu i u projekciji. Do ovoga koeficijenta može se doći preko površina geometrijski pravilnog lika 1—2—3—4 ili 5—6—7—8 (sl. 1) na elipsoidu i istog u projekciji

$$k_2^{(1)} = \frac{P_{\square}^E}{P_{\square}^P}, \quad (8)$$

ili preko izraza za mjerilo površine

$$k_2^{(2)} = \frac{1}{p}, \quad (9)$$

gdje je p poznati izraz iz matematičke kartografije (npr. Jovanović, 1983)

$$p = a \cdot b = m \cdot n \cdot \sin \Theta. \quad (10)$$

Za najčešće korištene konformne projekcije vrijedi:

$$p = a^2 = m^2, \quad (11)$$

što za našu državnu projekciju iznosi:

$$p = 1 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 0,0002. \quad (12)$$

Koordinata \bar{y} može se ovdje shvatiti kao neka fiktivna srednja udaljenost lika L od srednjeg meridijana zone, a dobiva se kao aritmetička sredina koordinata y svih prijelomnih točaka graničnih linija lika L .

Koeficijent $k_2^{(1)}$ reprezentira cijelu površinu geometrijski pravilnog lika 1–2–3–4 ili 5–6–7–8 i, s obzirom na to da se deformacija površina ne mijenja linearno, ne odnosi se na središnju točku tog lika. Koeficijent $k_2^{(2)}$ se naprotiv odnosi izravno na lik L , i to na njegovu središnju točku (po y koordinatnoj osi). Dakle, očividno je da se koeficijentom $k_2^{(2)}$ bolje eliminira deformacija površine.

Razlike svođenja površina po (7) sa (8) i (9) prikazat će se na likovima mjenjenim po topografskoj karti mjerila 1:50.000 (TK50), listovi 330/2 i 330/3 (tablica 1).

Tablica 1. Razlike prevođenja površina po (7) korištenjem (8) i (9)

List karte	Lik	P' (ha)	$k_2^{(1)}$	$k_2^{(2)}$	$P_2' - P_1'$	rel. raz. %
330/2	1	1278,3104	1,00019927	1,00019381	-0,0070	0,00055
	2	52580,1547		1,00019481	-0,2246	0,00046
330/3	3	54100,0132	1,00018073	1,00018462	+0,2094	0,00039
	4	2,4314		1,00018844	+0,0001	0,00041

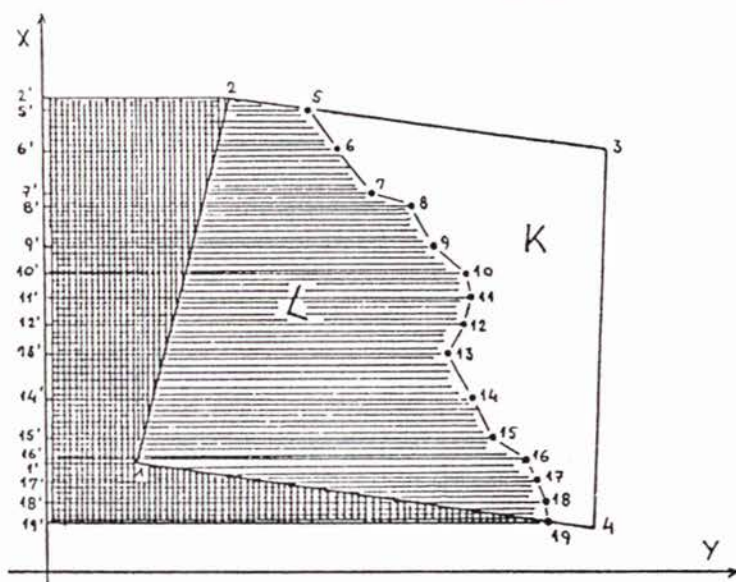
Razlike koje proizlaze iz različitog načina izračunavanja koeficijenta k_2 u ovom slučaju i nisu tako velike, pa bi praktično bilo svejedno kako obavljati računanje. Međutim, u primjeni drugih projekcija i karata sitnijih mjerila, one bi mogle biti znatno veće.

Drugi način izračunavanja površine s pomoću pravokutnog sustava projekcije kartografskog izvora znatno je točniji. Njegova suština se sastoji u tomu da se svođenje površine na elipsoid obavlja dinamički, tijekom računanja parcijalnih površina.

Računanje površine po (5) odgovara slici 2.

U ovom slučaju ukupna površina lika L dobiva se kao zbroj površina trapeza

$$P'' = P_{2'-2-5-5'} + P_{5'-5-6-6'} + \dots + P_{18'-18-19-19'} - \\ - P_{1'-1-19-19'} - P_{2'-2-1-1'}$$



Slika 2. Ilustracija računanja površine po (5)

Izračunavanje koeficijenta za svođenje na elipsoid (npr. po (9)) obavlja se sukcesivno, za svaki trapez, čime se svođenje obavlja prije sumiranja. Koeficijent k_2 može se izračunavati na osnovi srednje vrijednosti ordinate \bar{y} , odnosno:

$$(k_2)_i = \frac{1}{p_i}, \quad (13)$$

gdje je za Gauss-Krügerovu projekciju

$$p_i = 1 + \left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2R} \right)^2 + \left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2R} \right)^4 \cdot \frac{1}{3} - 0,0002. \quad (14)$$

Izraz (5) prelazi u

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (x'_{i+1} - x'_i) (y'_i + y'_{i+1}) \cdot (k_2)_i. \quad (15)$$

Izrazu (6) odgovara slika 3.

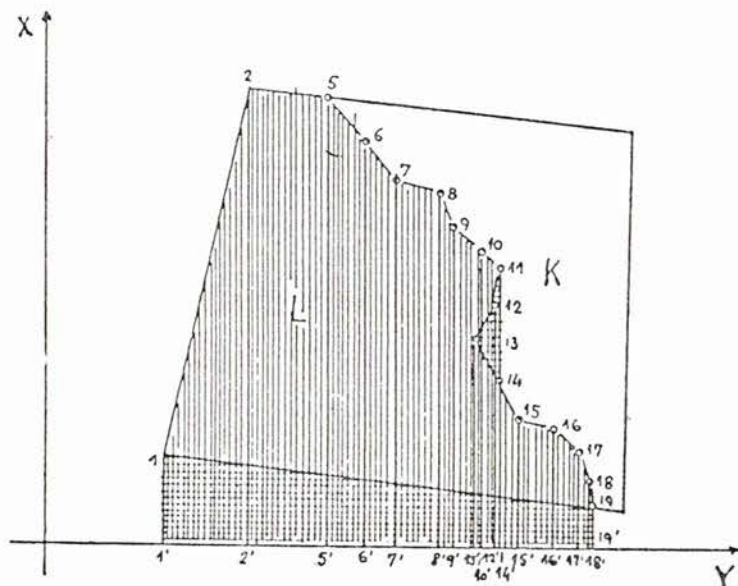
Površina je u ovom slučaju jednaka zbroju površina trapeza usporednih s x-osi:

$$\begin{aligned} P'' = & P_{1' - 1 - 2 - 2'} + P_{2' - 2 - 5 - 5'} + \dots + P_{10' - 10 - 11 - 11'} - \\ & - P_{12' - 12 - 11 - 11'} - P_{13' - 13 - 12 - 12'} + \dots + P_{18' - 18 - 19 - 19'} - \\ & - P_{1' - 1 - 19 - 19'} \end{aligned}$$

Izraz (6) svodi se na:

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} (y'_{i+1} - y'_i) (x'_i + x'_{i+1}) \cdot (k_2)_i, \quad (16)$$

gdje se $(k_2)_i$ izračunava po (13).



Slika 3. Ilustracija izračunavanja površine po (6)

Postupcima računanja (15) i (16) osigurano je znatno bolje svođenje površine na elipsoid. Međutim, koeficijenti svođenja opet reprezentiraju određenu konačnu (nekada značajnu po veličini) plohu, a odnose se teoretski na neku fiktivnu srednju ordinatu.

Napominjemo da je u Gauss-Krügerovoj projekciji za izračunavanje ispravnije koristiti izraz (16) koji operira s malim trapezima usporednim x-osi. To je očividno, jer je reprezentativni koeficijent vrlo blizak za lijevu i desnu ordinatu. No, da su ipak u pitanju male razlike, pokazat će se na primjeru već korištenih likova na listovima karata TK50 330/2 i 330/3. Rezultati izračunavanja po (15) i (16) prikazani su u tablici 2.

Tablica 2. Razlika prevođenja površina po (15) i (16)

List TK50	Lik	Izračunano po (15) (ha)	Izračunano po (16) (ha)	Razlika (16) – (15) (ha)	Relativna razlika %
330/2	1	1278,5584	1278,5621	0,0037	0,00029
	2	52590,5549	52590,6780	0,1231	0,00023
330/3	3	54109,6836	54110,3362	0,6526	0,00121
	4	2,4319	2,4319	0,0000	0,00000

Na osnovi tih razmatranja može se ustvrditi da izraz (16) zadovoljava i najtočnije praktične potrebe, pogotovu što se visine malih trapeza pri kompjutorskom računanju mogu po želji smanjiti i time koeficijent prevođenja na elipsoid još više približiti pravoj vrijednosti. Tako se postupak prevodi na numeričko integriranje s po želji izabranim prirastima visine trapeza.

Zanimljivo je pitanje izbora visine trapeza, odnosno prirasta Δy pri korištenju raznih kartografskih izvora. U Gauss-Krügerovoj projekciji za mjerilo površine p (12) može se postaviti uvjet:

$$p_2 - p_1 = \frac{\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2}{R^2} + \frac{\bar{y}_2^4 - \bar{y}_1^4}{3R^4} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

gdje je ε zadana dopuštena razlika mjerila površina.

U (17) se mogu uvrstiti sljedeća približenja:

$$\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2 \approx 2\bar{y} \Delta\bar{y}; \quad \bar{y}_2^4 - \bar{y}_1^4 \approx 4\bar{y}^3 \Delta\bar{y},$$

pa slijedi:

$$\Delta\bar{y} \leq \frac{3R^4\varepsilon}{6R^2\bar{y} + 4\bar{y}^3}. \quad (18)$$

S pomoću (18) mogu se dakle izračunati maksimalne visine malih trapeza, odnosno prirasta koordinate y za dopuštenu razliku mjerila površina. Ovaj kriterij može se ugraditi u kompjutorski program za izračunavanje površina. Skrećemo pažnju na to da računanje s punim vrijednostima koordinata može ugroziti točnost, pa je bolje rješenje pomaknuti koordinatni početak u jednu od točaka lika. Ako se koordinatni početak dovodi u točku 1 lika, izrazi (15) i (16) prevode se na:

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} ((x'_{i+1} - x'_i)(y'_i + y'_{i+1} - 2y'_i)) (k_2)_i, \quad (19)$$

odnosno

$$P'' = 0,5 \sum ((y'_{i+1} - y'_i)(x'_i + x'_{i+1} - 2x'_i)) (k_2)_i. \quad (20)$$

4. IZRAČUNAVANJE POVRŠINE IZ ELIPSOIDNIH GEOGRAFSKIH KOORDINATA

Rješenje se može izraziti na ovaj način:

$$P'' = f(\varphi_i, \lambda_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gdje su φ i λ geografska širina i duljina.

Vjerojatno se najjednostavnije rješenje ove složene funkcije nudi s pomoću ekvivalentnih kartografskih projekcija. Ravne pravokutne koordinate neke projekcije izražavaju se s pomoću elipsoidnih geografskih koordinata kao:

$$\begin{aligned} y_i &= f_1(\varphi_i, \lambda_i), \\ x_i &= f_2(\varphi_i, \lambda_i). \end{aligned} \quad (21)$$

Uvrštenjem (21) u (5) odnosno (6) dobivaju se opći izrazi za izravno izračunavanje površine lika proizvoljnog oblika na elipsoidu:

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} [f_2(\varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}) - f_2(\varphi_i, \lambda_i)] [f_1(\varphi_i, \lambda_i) + f_1(\varphi_{i+1}, \lambda_{i+1})], \quad (22)$$

ili

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} [f_1(\varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}) - f_1(\varphi_i, \lambda_i)] [f_2(\varphi_i, \lambda_i) + f_2(\varphi_{i+1}, \lambda_{i+1})]. \quad (23)$$

Iz suštine zamisli o računanju površina po (5) i (6) (sl. 2 i 3) proizlazi jedini uvjet: da su linije koje spajaju prijelomne točke granica lika pravci.

Taj uvjet u općem slučaju neće biti a priori zadovoljen. Linije koje na elipsoidu predstavljaju najkraće udaljenosti između dviju točaka neće uvijek to isto predstavljati i u ravnini projekcije. Napominjemo da se isti problem pojavljuje i u postupku digitaliziranja (detaljnije: Štemberger, 1986).

Digitaliziranje se dakle obavlja u određenoj projekciji u kojoj su točke 1, 2 i 3 spojene duljinama 1—2 i 2—3 (sl. 4).

Međutim, ove duljine u općem slučaju ne predstavljaju najkraće udaljenosti, odnosno geodetske linije na elipsoidu. Postavlja se pitanje reda veličine d_1 i d_2 .



Slika 4. Shematski prikaz najkraćih udaljenosti projekcije i elipsoida

Veličine d_1 i d_2 su u Gauss-Krügerovoj projekciji praktički beznačajne. Međutim, u općem slučaju, kada je kartografski izvor u nekoj drugoj projekciji i ako su udaljenosti između točaka 1, 2 i 3 dostatno velike, ove veličine mogu biti znatne i ne smiju se zanemariti.

Problem se lako prevladava u fazi računanja geografskih koordinata, umetanjem točaka, odnosno računarskim pogušćivanjem, prema unaprijed zadanom kriteriju (Štemberger, 1986).

Razmotrit će se pojedini primjeri funkcija f_1 i f_2 u izrazima (22) i (23).

4.1. Računanje površine s pomoću uspravnih ekvivalentnih konusnih projekcija

U teoriji matematičke kartografije izvode se poznati izrazi za ove projekcije (npr. Jovanović, 1983):

$$\begin{aligned}\delta &= k(\lambda - \lambda_0), \\ \rho &= \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \cdot \sqrt{K - \sin \varphi'}, \\ x &= \rho_s - \rho \cos \varepsilon, \\ y &= \rho \sin \varepsilon,\end{aligned}\quad (24)$$

gdje se polumjer elipsoidu ekvivalentne sfere R i korespondentna geografska širina φ' na toj sferi izračunavaju po poznatim izrazima:

$$R = a \sqrt{(1 - e^2) \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \dots \right)},$$

$$\varphi' = \varphi - \alpha \sin 2\varphi + \beta \sin 4\varphi - \gamma \sin 6\varphi$$

gdje su α , β i γ poznati koeficijenti, a — velika poluos, e — prvi brojni ekscentricitet elipsoida.

Uvrštenjem (24) u (5) odnosno (6) dobivaju se sljedeći izrazi za izračunavanje površine:

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^n (\rho_i \cos \delta_i - \rho_{i+1} \cos \delta_{i+1}) (\rho_i \sin \delta_i + \rho_{i+1} \sin \varepsilon_{i+1}), \quad (25)$$

$$P'' = 0,5 \sum_{i=1}^n (\rho_{i+1} \sin \delta_{i+1} - \rho_i \sin \delta_i) (2\rho_s - \rho_i \cos \delta_i + \rho_{i+1} \cos \varepsilon_{i+1}). \quad (26)$$

Konstante K i k određuju se u matematičkoj kartografiji na osnovi konkretnih uvjeta:

- (a) projekcija na tangirajući konus,
- (b) projekcija na sjekući konus.

U tablici 3 su rezultati računanja po (25) i (26) s uvjetima (a) i (b).

4.2. Izračunavanje površina s pomoću uspravnih ekvivalentnih cilindričnih projekcija

Za ove projekcije vrijedi:

$$\begin{aligned}x &= \frac{R^2}{k} \sin \varphi', \\ y &= k(\lambda - \lambda_0),\end{aligned}\quad (27)$$

gdje je k konstanta koja ovisi o zadanim uvjetima preslikavanja.

Uvrštenjem (27) u (5) i (6) dobivaju se sljedeći izrazi za izračunavanje površina:

$$P'' = \frac{R^2}{2\rho} \sum_{i=1}^n (\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi'_i) (\lambda_i + \lambda_{i+1} - 2\lambda_0), \quad (28)$$

$$P'' = \frac{R^2}{2\rho} \sum_{i=1}^n (\lambda_{i+1} - \lambda_i) (\sin \varphi'_i - \sin \varphi'_{i+1}). \quad (29)$$

Do identičnih izraza dolazi se i s pomoću Lambertove izocilindrične projekcije.

Rezultati računanja po (28) i (29) za već spomenuti praktični primjer predočeni su u tablici 3.

4.3. Izračunavanje površina s pomoću uspravnih ekvivalentnih pseudokonusnih projekcija (Bonneove projekcije)

Poznati su sljedeći izrazi za ovu projekciju:

$$\begin{aligned} x &= Q_s - \rho \cos \varepsilon, \\ y &= \rho \sin \varepsilon, \\ \rho &= \rho_0 + (S_0^{\varphi_0} - S_0^{\varphi}) = \rho_0 + S_0^{\varphi_0}, \\ \rho_0 &= N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0, \\ \delta &= \frac{r}{\rho} (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Kada se vrijednosti za x i y iz (30) uvrste u (5) i (6), dobivaju se već poznati izrazi za površinu (25) i (26), ali sada s vrijednostima argumenata dobivenim pod drugačijim uvjetima. Rezultati izračunavanja za već poznati primjer predočeni su u tablici 3.

4.4. Izračunavanje površina s pomoću Sansonove sinusoidne projekcije

Na osnovi poznatih izraza za ovu projekciju

$$\begin{aligned} x &= S_0, \\ y &= r (\lambda - \lambda_0) = r \Delta \lambda \end{aligned} \quad (31)$$

i jednadžbi (5) i (6) dobivaju se sljedeći izrazi za izračunavanje površine:

$$P'' = \frac{1}{2\rho_0} \sum_{i=1}^{i=n} (S_0^{\varphi_{i+1}} - S_0^{\varphi_i}) (r_i \cdot \Delta \lambda_i + r_{i+1} \Delta \lambda_{i+1}), \quad (32)$$

$$P'' = \frac{1}{2\rho_0} \sum_{i=1}^{i=n} (S_0^{\varphi_i} + S_0^{\varphi_{i+1}}) (r_{i+1} \cdot \Delta \lambda_{i+1} - r_i \Delta \lambda_i). \quad (33)$$

Rezultati izračunavanja za spomenuti primjer nalaze se u tablici 3.

4.5. Izbor jednadžbi za računanje površine s pomoću ekvivalentnih projekcija

Pri transformaciji koordinata prijelomnih točaka digitaliziranih graničnih linija likova iz ravnoga pravokutnog sustava projekcije kartografskog izvora u sustav geografskih koordinata na elipsoidu, treba voditi računa o potrebi umetanja točaka prema slici 4 (detaljnije Štemberger, 1986).

Tablica 3. Primjeri izračunavanja površina s pomoću ekvivalentnih projekcija

Projekcija	List TK50 330/2		List TK50 330/3	
	Lik 1 (ha)	Lik 2 (ha)	Lik 1 (ha)	Lik 2 (ha)
1. Konusne izraz (25) a	1278,5579	52590,5609	54109,7071	2,4319
izraz (25) b	1278,5576	52590,5623	54109,7033	2,4319
izraz (26) a	1278,5589	52590,5577	54109,7069	2,4320
izraz (26) b	1278,5579	52590,5637	54109,7046	2,4318
2. Cilindrične izraz (28)	1278,7865	52584,3603	54113,0089	2,4318
izraz (29)	1278,7870	52584,3599	54113,0100	2,4318
3. Pseudokonusne izraz (25) sa (30)	1278,5582	52590,4842	54109,6177	2,4318
4. Pseudocilindrične izraz (32)	1278,7880	52584,2549	54112,9779	2,4317

Glavni su kriteriji za izbor projekcije, iako je teoretski potpuno svejedno koja će se ekvivalentna projekcija uporabiti, što jednostavniji izrazi i što manja potreba za računarskim pogašćivanjem točaka. Dakle, treba koristiti one projekcije u kojima se geodetska linija preslikava što bliže duljini između dviju točaka. Prema tomu, od pokazanih primjera najprihvatljivije su uspravne ekvivalentne konusne projekcije i Bonneova projekcija.

To potvrđuju i podaci iz tablice 4. U njoj su izračunane poprečne razdaljine geodetske linije od prave linije na duljinama od 120 km s pogašćivanjem točaka na 20, 40, 60, 80 i 100 km i pod azimutima 0°, 20°, 40°, 60° i 80°, u četiri navedene projekcije (4.1, 4.2, 4.3 i 4.4). Polazna točka je zadana geografskim koordinatama $\varphi = 45^{\circ}30'$, $\lambda = 19^{\circ}30'$, dok je središnja točka preslikavanja $\varphi = 46^{\circ}$, $\lambda = 19^{\circ}30'$. Računanja su obavljena s elementima Besselovog elipsoida, a poprečne udaljenosti po približnom izrazu:

$$p_i = |\nu_a^b - \nu_a^i| d_i,$$

gdje su: ν — smjerni kutovi u odnosnoj projekciji, i — točka pogašćivanja, d_i — duljina između početne točke i točke pogašćivanja.

Iz tablice 4 uočava se da su poprečne udaljenosti najmanje na primjeru konusnih projekcija i Bonneove projekcije. Lambertova izocilindrična projekcija je jako nepovoljna (kao što je poznato, u ovoj projekciji se meridijani i paralele preslikavaju u prave, međusobno okomite linije, pa se ona može koristiti za izračunavanje površina elipsoidnih trapeza (Štemberger, 1991). Sansonova projekcija također je nepovoljna.

Prigodom dvojbe između uspravnih ekvivalentnih konusnih projekcija i Bonneove projekcije, prednost se može dati prvima zbog jednostavnijih iz-

Tablica 4. Poprečne udaljenosti projekcije geodetske linije u odnosu na duljinu

Azimut	Duljina /m/	Geografske koordinate		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
		φ	λ	(m)	(m)	(m)	(m)
0°	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
	20000	45 40 47,8843	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,96	0,95
	40000	45 51 35,7482	19 30 00,0000	0,00	0,00	1,52	1,52
	60000	46 02 23,5917	19 30 00,0000	0,00	0,00	1,71	1,71
	80000	46 13 11,4148	19 30 00,0000	0,00	0,00	1,52	1,52
	100000	46 23 59,2174	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,95	0,95
	120000	46 34 46,9996	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
20°	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
	20000	45 40 08,6915	19 35 16,0576	-0,27	187	0,45	7,06
	40000	45 50 17,1206	19 40 34,0237	-0,20	301	0,66	11,27
	60000	46 00 25,2845	19 45 53,9205	0,04	339	0,67	12,65
	80000	46 10 33,1801	19 51 15,7704	0,27	302	0,53	11,22
	100000	46 20 40,8045	19 56 39,5962	0,32	189	0,29	7,00
	120000	46 30 48,1546	20 02 05,4208	0,00	0,00	0,00	0,00
40°	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
	20000	45 38 15,8882	19 39 53,6633	-0,68	211	-0,03	43,63
	40000	45 46 30,8914	19 49 50,2404	-0,81	338	-0,07	70,01
	60000	45 54 45,0191	19 59 49,7544	-0,60	381	-0,10	78,99
	80000	46 02 58,2569	20 09 52,2287	-0,25	339	-0,11	70,43
	100000	46 11 10,5963	20 19 57,6869	0,02	212	-0,08	44,15
	120000	46 19 22,0286	20 30 06,1526	0,00	0,00	0,00	0,00
60°	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
	20000	45 35 23,1691	19 43 19,1596	-1,02	161	-0,51	105
	40000	45 40 44,7752	19 56 40,8650	-1,46	258	-0,76	169
	60000	45 46 04,8085	20 10 05,1197	-1,45	290	-0,79	190
	80000	45 51 23,2592	20 23 31,9272	-1,12	258	-0,64	170
	100000	45 56 40,1171	20 37 01,2907	-0,59	161	-0,36	106
	120000	46 01 55,3723	20 50 33,2132	0,00	0,00	0,00	0,00
80°	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
	20000	45 31 51,5038	19 45 07,8241	-1,20	118	-1,09	153
	40000	45 33 41,0006	20 00 16,6363	-1,87	189	-1,71	245
	60000	45 35 28,4863	20 15 26,4206	-2,04	212	-1,87	276
	80000	45 37 13,9563	20 30 37,1610	-1,76	188	-1,61	246
	100000	45 38 57,4063	20 45 48,8412	-1,06	118	-0,97	154
	120000	45 40 38,8318	21 01 01,4449	0,00	0,00	0,00	0,00
luk. paralele	0	45 30 00,0000	19 30 00,0000	0	0	0	0
	20000	45 30 00,0000	19 45 21,3217	-161	0	-161	0
	40000	45 30 00,0000	20 00 42,6434	-257	0	-257	0
	60000	45 30 00,0000	20 16 03,9651	-289	0	-289	0
	80000	45 30 00,0000	20 31 25,2868	-257	0	-257	0
	100000	45 30 00,0000	20 46 46,6085	-161	0	-161	0
	120000	45 30 00,0000	21 02 07,9302	0	0	0	0

Kazalo:

- P₁ — poprečne udaljenosti u uspravnoj ekvivalentnoj konusnoj projekciji;
P₂ — poprečne udaljenosti u Lambertovoj ekvivalentnoj izocilindričnoj projekciji;
P₃ — poprečne udaljenosti u Bonneovoj projekciji;
P₄ — poprečne udaljenosti u Sansónovoj projekciji.

raza. Usporedbom vrijednosti iz tablice 3, dobiva se isti zaključak. Iz tablice se također vidi da je gotovo potpuno svejedno koji će se izrazi za konusne projekcije primijeniti. Opet radi jednostavnosti, preporučuje se (25), i to projekcija na tangirajući konus.

5. ZAKLJUČAK

Zbog velike aproksimativnosti izraz (3) s (4) treba izbjegavati. Može se koristiti samo za najgrublja kartometrijska određivanja. Osim onoga što je rečeno u 2. poglavlju, ovaj je izraz nepovoljan i za određivanje točnosti površine (Štemberger, 1986).

Izrazi (15) i (16) mogu poslužiti i za najtočnija određivanja površina, s opaskama iz 3. poglavlja. Za koji se od ovih izraza treba opredijeliti, ovisi o značajkama projekcije. Kada je u pitanju Gauss-Krügerova projekcija, povoljniji je izraz (16).

Izrazi za izračunavanje površina preko ekvivalentnih projekcija vrlo su jednostavni i u odnosu na druge načine računanja predstavljaju rješenja najpribližnja egzaktnim. Od navedenih izraza u poglavlju 4. najbolje je izračunavanje obavljati po (25). Uočljiva je prednost svih izraza iz poglavlja 4. u tomu što se objektivnije može ocijeniti točnost preko pogrešaka koordinata točaka (Štemberger, 1986). Jedini nedostatak je, smatramo, znatno vrijeme računanja koje se troši na dodatnu operaciju — transformaciju koordinata iz ravnoga pravokutnog sustava projekcije u sustav geografskih koordinata na elipsoidu, što pri ostalim pokazanim načinima nije potrebno.

LITERATURA

- Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Vojnogeografski institut, Beograd.
- Solarić, M. (1980): Algoritam za određivanje površine likova digitalizatorom i kompjutorom. Geodetski list, 1980, 10—12, 211—215.
- Štemberger, D. (1986): Analiza određivanja veličina većih teritorijalnih jedinica korišćenjem savremenih metoda i postupaka sa primenom na teritoriju SFRJ. Doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Beograd.
- Štemberger, D. (1991): Jedan kraći algoritam za računanje površine elipsoidalnog trapeza, Geodetski list, 1991, 4—6, 149—155.
- Volkov, N. M. (1950): Principii i metodi kartometrii, Izdatelstvo Akademii nauk SSSR, Moskva.

CALCULATION OF ANY FIGURE AREA ON A SPHEROID

A possibility of calculation of any kind of figure area on a spheroid is described. Here, three possibilities in computer environment are shown: calculation in digitizer coordinate system, calculation in rectangular coordinate system of the projection of cartography source and calculation by geographic coordinates.

Primljeno: 1992-04-21