

USPRAVNE GNOMONSKE PERSPEKTIVNO KONUSNE PROJEKCIJE SFERE

Miljenko LAPAINE i Nedjeljko FRANČULA — Zagreb*

SAŽETAK. U radu se izvode jednadžbe uspravnih gnomonskih perspektivno konusnih projekcija. Za te se projekcije zatim istražuju ekstremne vrijednosti lokalnih deformacija duljina i glavni smjerovi. Ispituje se odsutnost lokalnih deformacija u svim smjerovima, a vrlo podrobno se razmatra određivanje smjerova uzduž kojih nema deformacija azimuta ili deformacija duljina. Konačno, izvode se jednadžbe ekvideformata kutova i površina. Sva teorijska istraživanja ilustriraju se odgovarajućim grafičkim prikazima.

1. UVOD

Kao modeli Zemlje u matematičkoj kartografiji najčešće se primjenjuju sfera i rotacijski elipsoid. Njihove se točke identificiraju s parovima (φ, λ) , gdje su φ i λ geografske koordinate — širina i duljina. U uspravnim azimutalnim i konusnim kartografskim projekcijama slike meridijana su pravci, dok su slike paralela koncentrične kružnice (ili njihovi dijelovi) sa središtem u projekciji geografskog pola.

Pri uspravnim azimutalnim projekcijama kut između slika dvaju meridijana jednak je razlici odgovarajućih geografskih duljina. Pri uspravnim konusnim projekcijama kvocijent n ($n < 1$) spomenutih kutova je konstantan i naziva se konstantom konusa.

Svaka klasična uspravna konusna kartografska projekcija može se definirati konstantom konusa i relacijom oblika

$$\rho = \rho(\varphi). \quad (1.1)$$

Ona prikazuje polumjer koncentrične kružnice (slike paralele) kao funkciju geografske širine φ .

2. USPRAVNE KONUSNE PROJEKCIJE

Pri klasičnom pristupu konusnim projekcijama razmatra se obično uspravna projekcija. To znači da se os konusa podudara s rotacijskom osi Ze-

* Mr. Miljenko Lapaine i prof. dr. Nedjeljko Frančula, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

mljinog modela. Lambert (1772) je opisao konusnu projekciju na poseban način. Prema njemu, to je takva projekcija čija se slika može saviti u konus. Međutim, konusna se projekcija obično doživljuje kao kompozicija dvaju preslikavanja: najprije se Zemljin model preslika na konus, a zatim konus u ravninu. Pri prvome su preslikavanju slike meridijana izvodnice stošca, a slike paralela kružnice na stošcu. Drugo preslikavanje je redovito razvijanje konusne plohe u ravninu projekcije.

Koordinate točke T_p u pravokutnom koordinatnom sustavu x, y u ravnini projekcije mogu se nakon razvijanja u ravninu napisati u obliku:

$$x = -\rho \cos \lambda', \quad y = \rho \sin \lambda', \quad (2.1)$$

gdje je:

$$\rho = \rho(\varphi) \quad \text{i} \quad \lambda' = n\lambda. \quad (2.2)$$

Ako je kut u vrhu stošca 2α , tada se lako vidi da je konstanta konusa jednaka $\sin \alpha$, tj.

$$n = \sin \alpha, \quad (2.3)$$

pa je onda

$$\lambda' = \lambda \sin \alpha. \quad (2.4)$$

Izrazi (2.1) mogu se sada napisati u obliku

$$x = -\rho \cos(n\lambda), \quad y = \rho \sin(n\lambda), \quad (2.5)$$

i nazivaju se jednadžbama uspravne konusne projekcije.

3. JEDNADŽBE USPRAVNE GNOMONSKE PERSPEKTIVNO KONUSNE PROJEKCIJE SFERE

Funkcionalna ovisnost $\rho = \rho(\varphi)$ može se definirati na mnogo različitih načina. Jedna je od mogućnosti — perspektivno projiciranje Zemljine sfere na konus (Tissot, 1887; Lapaine i Frančula, 1991, 1992), što znači da su središte projiciranja S , točka T koja se projicira i njena slika T' na konusnoj plohi kolinearni.

Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija je takva uspravna perspektivno konusna projekcija u koje se središte projiciranja S nalazi u središtu Zemljinog modela koji je istodobno i ishodište prostornoga pravokutnoga koordinatnog sustava. Jednadžbe ove projekcije mogu se dobiti kao specijalan slučaj klasičnih perspektivnih konusnih projekcija (Tissot, 1887; Lapaine i Frančula, 1991, 1992) ili izvesti neposredno kako slijedi.

Neka je AVB bilo koji osni presjek rotacijskog stošca (sl. 1) s vrhom V , točka S središte projiciranja i ujedno ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava x, y u ravnini osnog presjeka, koordinatna os y os stošca. Ako izvodnica AV stošca zatvara s osi y kut α (sl. 1) i ako je njena udaljenost od ishodišta jednaka d , tada je jednadžba izvodnice

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = d. \quad (3.1)$$

može napisati

$$\rho = \frac{v \cos \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}, \quad (3.8)$$

dok se uz oznaku

$$\rho_M = d \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3.9)$$

može napisati i ovako:

$$\rho = \rho_M - d \operatorname{tg}(\varphi - \alpha). \quad (3.10)$$

Geometrijski se v može protumačiti kao udaljenost vrha stošca V od ravnine ekvatora, dok je ρ_M polumjer projekcije paralele koja odgovara geografskoj širini $\varphi = \alpha$.

Opisani izvod može se poopćiti na rotacijski elipsoid.

Da bi prije definirano preslikavanje bilo jednoznačno, ograničit ćemo se na onaj dio sfere za koji je $\varphi \in (\varphi_{\min}, \pi/2)$, gdje je

$$\varphi_{\min} = \alpha - \pi/2. \quad (3.11)$$

4. PRVE DIFERENCIJALNE FORME GEOGRAFSKE PARAMETRIZACIJE SFERE I USPRAVNE GNOMONSKE PERSPEKTIVNO KONUSNE PROJEKCIJE

Poznato je da je geografska parametrizacija sfere preslikavanje $R(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama

$$X = R \cos \varphi \cos \lambda, \quad Y = R \cos \varphi \sin \lambda, \quad Z = R \sin \varphi, \quad (4.1)$$

te da su za ovu parametrizaciju Gaußovi koeficijenti

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 \varphi, \quad (4.2)$$

a prva diferencijalna forma

$$dS^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (4.3)$$

Za preslikavanje $r(\varphi, \lambda) = (x, y)$, zadano formulama (2.5) i (3.6), imamo:

$$r' = \begin{bmatrix} x_\varphi & x_\lambda \\ y_\varphi & y_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho' \cos n\lambda & n\rho \sin n\lambda \\ \rho' \sin n\lambda & n\rho \cos n\lambda \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

uz

$$\rho' = -\frac{d}{\cos^2(\varphi - \alpha)}, \quad (4.5)$$

$$e = \rho'^2, \quad f = 0, \quad g = n^2 \rho^2. \quad (4.6)$$

Prva diferencijalna forma uspravne gnomonske perspektivne konusne projekcije je prema tomu

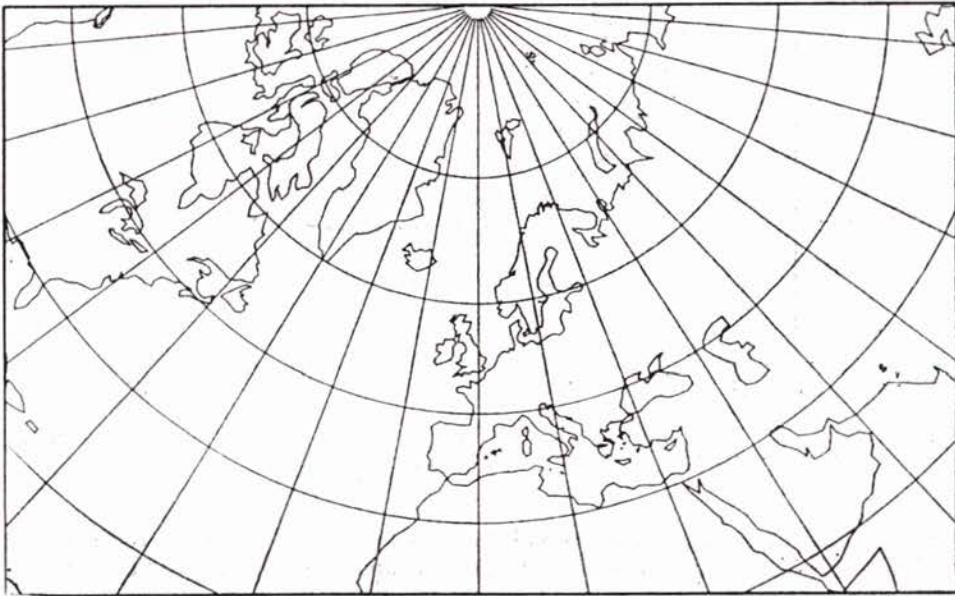
$$ds^2 = \rho'^2 d\varphi^2 + n^2 \rho^2 d\lambda^2. \quad (4.7)$$

5. EKSTREMNE VRIJEDNOSTI LOKALNIH DEFORMACIJA DULJINA I GLAVNI SMJEROVI PRI USPRAVNOJ GNOMONSKOJ PERSPEKTIVNOJ KONUSNOJ PROJEKCIJI

Označimo li lokalno mjerilo duljina uzduž meridijana s μ_φ , a lokalno mjerilo duljina uzduž paralele s μ_λ , tada je (Lapaine, 1991):

$$\mu_\varphi = \sqrt{e/E} = \frac{|\rho'|}{R} = \frac{d}{R \cos^2(\varphi - \alpha)}, \quad (5.1)$$

$$\mu_\lambda = \sqrt{g/G} = \frac{n\rho}{R \cos \varphi} = \frac{d}{R \cos(\varphi - \alpha)}.$$



Slika 2. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: mreža meridijana i paralela, koja istodobno predstavlja i mrežu glavnih smjerova

S obzirom na to da je za geografsku parametrizaciju sfere $F=0$, to je mreža meridijana i paralela ortogonalna. Kako je za uspravnu gnomonsku perspektivnu konusnu projekciju $f=0$, to je i projekcija parametarske mreže ortogonalna. Nadalje, lokalna mjerila duljina μ_φ i μ_λ uzduž parametarskih krivulja također su i ekstremne vrijednosti lokalnih mjerila duljina u promatranoj točki. Označimo li

$$A = \max \{ \mu_\varphi, \mu_\lambda \} = \max \{ \sqrt{e/E}, \sqrt{g/G} \} \quad (5.2)$$

$$B = \min \{ \mu_\varphi, \mu_\lambda \} = \min \{ \sqrt{e/E}, \sqrt{g/G} \},$$

postavlja se pitanje za koje geografske širine φ je:

$$\sqrt{e/E} \equiv \sqrt{g/G}. \quad (5.3)$$

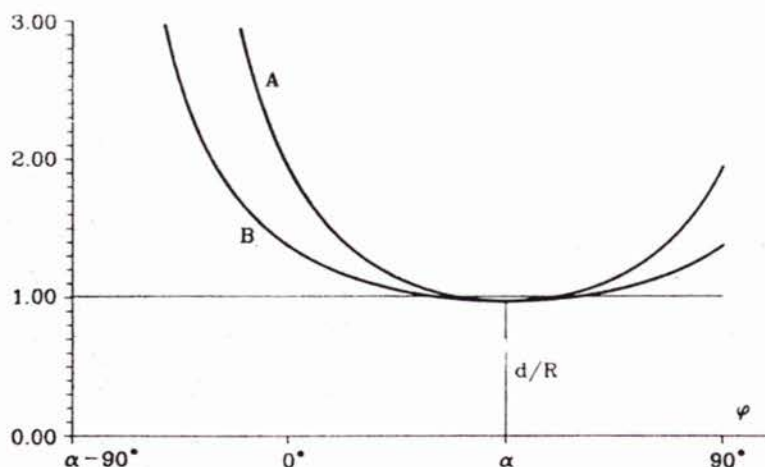
Izraz (5.3) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$\cos(\alpha - \varphi) \equiv 1, \quad (5.4)$$

odakle je lako zaključiti da je

$$A = \sqrt{e/E} = \frac{d}{R \cos^2(\varphi - \alpha)} > B = \sqrt{g/G} = \frac{d}{R \cos(\varphi - \alpha)} \quad \text{za } \varphi \neq \alpha \quad (5.5)$$

$$A = d/R = B \quad \text{za } \varphi = \alpha.$$



Slika 3. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ovisnost ekstremnih vrijednosti lokalnih mjerila duljina A i B o geografskoj širini φ

A i B su ekstremne vrijednosti lokalnih mjerila duljina u promatranoj točki. Njihova ovisnost o geografskoj širini φ pokazana je grafički na slici 3. Smjerovi uzduž kojih lokalno mjerilo duljina poprima maksimalne vrijednosti nazivaju se glavnim smjerovima. Označimo s Θ_1^Q kut što ga glavni smjer, kojemu odgovara maksimalno lokalno mjerilo duljina A, zatvara s meridianom (vektorom dR_φ). Označimo s Θ_2^P kut što ga projekcija glavnog smjera, kojemu odgovara maksimalno mjerilo duljina A, zatvara s projekcijom meridijana (vektorom dr_φ). Tada se na temelju relacija (5.5) i odgovarajućih formula iz rada (Lapaine, 1991) može napisati:

$$\Theta_1^Q = \Theta_2^P = 0 \quad \text{za } \varphi \neq \alpha \quad (5.7)$$

Θ_1^Q i Θ_2^P nisu jednoznačno određeni za $\varphi = \alpha$.

Dakle, pri gnomonskoj perspektivno konusnoj projekciji glavni smjer kojemu pripada maksimalna lokalna deformacija duljina A podudara se sa smjerom (projekcije) meridijana (osim za $\varphi = \alpha$ kada glavni smjer nije jednoznačno definiran). Mreža meridijana i paralela, koja istodobno predstavlja i mrežu glavnih smjerova prikazana je zajedno s obrisima kontinenata i većih otoka u uspravnoj gnomonskoj perspektivnoj konusnoj projekciji na slici 2.

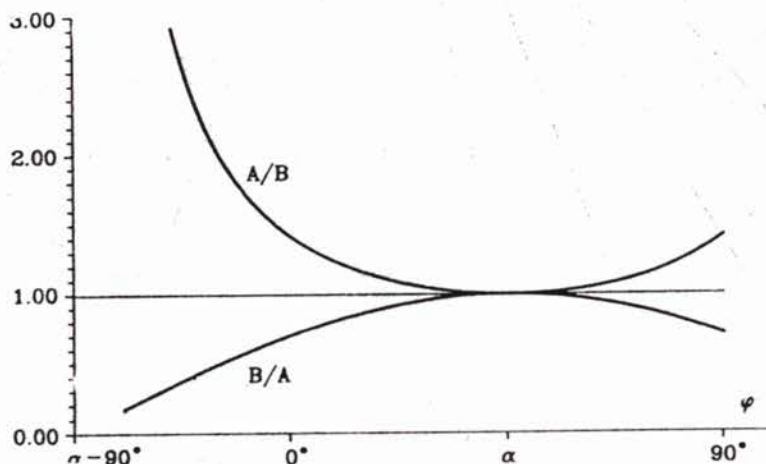
6. ODSUTNOST LOKALNIH DEFORMACIJA U SVIM SMJEROVIMA

U prethodnom smo poglavlju ustanovili da pri uspravnoj gnomonskoj perspektivno konusnoj projekciji postoji geografska širina, odnosno paralela $\varphi = \alpha$, uzduž koje je

$$A = B. \quad (6.1)$$

Lokalno mjerilo azimuta općenito ovisi o smjeru.

Kako su ekstremne vrijednosti lokalnog mjerila azimuta A/B i B/A , zaključujemo da uzduž paralele $\varphi = \alpha$ nema deformacija azimuta ni u kojem smjeru (sl. 4).



Slika 4. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ovisnost ekstremnih vrijednosti lokalnih mjerila azimuta A/B i B/A o geografskoj širini φ

Lokalne deformacije duljina također ovise o smjeru. Ta se ovisnost može u svakoj točki u projekciji prikazati s pomoću elipse lokalnih mjerila duljina (sl. 5). Želimo li odrediti točke u kojima pri uspravnoj gnomonskoj perspektivnoj konusnoj projekciji nema deformacija duljina ni u kojem smjeru, tada umjesto uvjeta (6.1) treba postaviti jači uvjet

$$A = B = 1. \quad (6.2)$$

Vidjeli smo da je uvjet $A=B$ ispunjen uzduž paralele $\varphi = \alpha$. Kao dodatni uvjet možemo uzeti

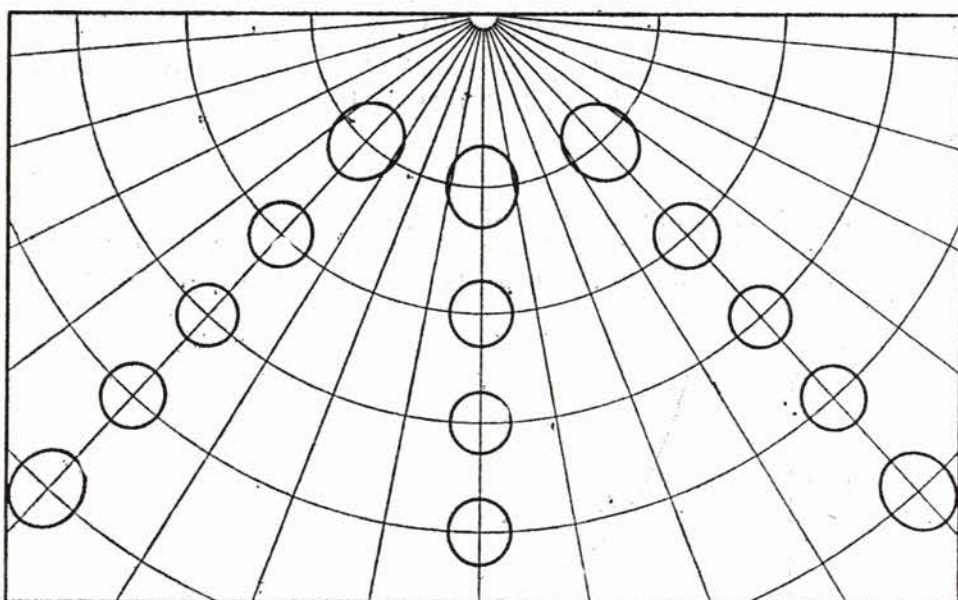
$$e = E \text{ ili } g = G. \quad (6.3)$$

Posljednji je uvjet jednostavniji i na temelju relacija (4.2), (4.6) i (3.7) ekvivalentan s:

$$\cos(\varphi - \alpha) = d/R, \quad (6.4)$$

što zbog $\varphi = \alpha$, prelazi u

$$d = R. \quad (6.5)$$



Slika 5. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: elipse lokalnih deformacija duljina

Ovaj posljednji uvjet može se geometrijski protumačiti kao zahtjev da konus tangira sferu. Dakle, u uspravnoj gnomonskoj perspektivi na konus koji dodiruje sferu, paralela dodira $\varphi = \alpha$ ima istaknuto svojstvo: uzduž nje nema niti deformacija azimuta, niti deformacija duljina u svim smjerovima.

7. SMJEROVI BEZ DEFORMACIJA AZIMUTA I SMJEROVI BEZ DEFORMACIJA DULJINA

Na temelju jednadžbi uspravne konusne projekcije (2.5) može se napisati

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{tg} n\lambda d\varphi + n\rho d\lambda}{-\rho' d\varphi + n\rho \operatorname{tg} n\lambda d\lambda} \quad (7.1)$$

Ako je poznata funkcija $k = k(\varphi, \lambda)$ takva da je

$$y' = k(\varphi, \lambda), \quad (7.2)$$

tada iz (7.1) i (7.2) slijedi

$$d\lambda = -\frac{1}{n} \frac{\operatorname{tg} n\lambda + k}{1 - k \operatorname{tg} n\lambda} \frac{\rho'}{\rho} d\varphi. \quad (7.3)$$

Stavimo li da je

$$k = \operatorname{tg} \beta, \quad (7.4)$$

imamo

$$d\lambda = -\frac{1}{n} \operatorname{tg}(\beta + n\lambda) \frac{\rho'}{\rho} d\varphi = -\frac{1}{n} \operatorname{tg}(\beta + n\lambda) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (7.5)$$

Neka je kut β oblika

$$\beta = \gamma + \Theta_2^p + \psi, \quad (7.6)$$

gdje je γ kut između slike meridijana (vektora dr_φ) i pozitivnog smjera osi x u ravnini projekcije, a Θ_2^p kut što ga projekcija glavnog smjera kojem odgovara maksimalno mjerilo duljina A zatvara s projekcijom meridijana (vektorom dr_φ). Kut γ određen je relacijama

$$\cos \gamma = \frac{x_\varphi}{\sqrt{e}} \quad \text{i} \quad \sin \gamma = \frac{y_\varphi}{\sqrt{e}} \quad (7.7)$$

Dakle, za uspravnu gnomonsku perspektivnu konusnu projekciju

$$\cos \gamma = \cos n\lambda, \quad \sin \gamma = -\sin n\lambda, \quad (7.8)$$

odnosno

$$\gamma = 2\pi - n\lambda. \quad (7.9)$$

Prema tomu, na temelju relacija (7.6), (7.9) i (5.7) može se za $\varphi \neq \alpha$ napisati

$$\operatorname{tg}(\beta + n\lambda) = \operatorname{tg}(\gamma + \Theta_2^p + \psi + n\lambda) = \operatorname{tg} \psi. \quad (7.10)$$

Na taj način diferencijalna jednadžba (7.5) prelazi u

$$d\lambda = -\frac{1}{n} \frac{\rho'}{\rho} \operatorname{tg} \psi d\varphi = \frac{1}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)} \operatorname{tg} \psi d\varphi. \quad (7.11)$$

Smjerovi u kojima nema deformacije azimuta određeni su za svaku kartografsku projekciju prema Lapaineu (1991) relacijom

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{B}{A}. \quad (7.12)$$

Za uspravnu gnomonsku perspektivno konusnu projekciju na temelju je izraza (5.5):

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \cos(\varphi - \alpha), \quad (7.13)$$

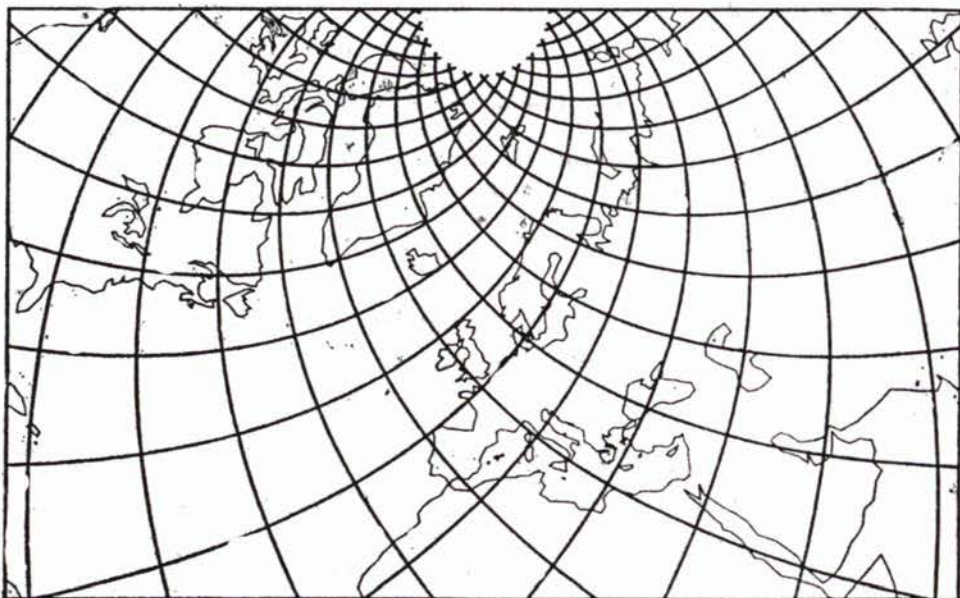
te izraz (7.11) prelazi u

$$d\lambda = \pm \frac{1}{\cos \varphi \sqrt{\cos(\varphi - \alpha)}} d\varphi, \quad (7.14)$$

odnosno nakon integriranja u konačan izraz:

$$\lambda = \lambda_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi \sqrt{\cos(\varphi - \alpha)}} d\varphi. \quad (7.15)$$

Svakom točkom (φ_0, λ_0) prolaze dvije krivulje uzduž kojih nema deformacije azimuta. Grafički prikaz tih krivulja (sl. 6) možemo dobiti u ravnini projekcije tako da za svaki φ izračunamo pripadni λ prema (7.15) i zatim pripadne pravokutne koordinate prema (2.5).



Slika 6. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: krivulje uzduž kojih nema deformacija azimuta

Razmotrimo sada smjerove uzduž kojih nema deformacija duljina. Ti smerovi određeni su za svaku kartografsku projekciju prema Lapaineu (1991) relacijom

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{B^2 A^2 - 1}{A^2 1 - B^2}. \quad (7.16)$$

Prema tomu, pri konstrukciji krivulja uzduž kojih nema deformacija duljina može se u načelu postupiti analogno konstrukciji krivulja uzduž kojih nema deformacija azimuta. Glavna je razlika u tomu što smjerovi uzduž kojih nema deformacija duljina ne moraju postojati. Naime, na temelju relacije (7.16) očito je da takvi smjerovi postoje ako i samo ako je

$$(A^2 - 1)(1 - B^2) \geq 0, \quad (7.17)$$

što je za $A \geq B$ ekvivalentno s

$$B \leq 1 \leq A. \quad (7.18)$$

Za uspravnu gnomonsku perspektivnu konusnu projekciju imamo

$$A = \sqrt{e/E} \geq \sqrt{g/G} = B. \quad (7.19)$$

Uvjet (7.18) može se sada napisati u obliku

$$\sqrt{g/G} \leq 1 \leq \sqrt{e/E}, \quad (7.20)$$

odnosno u ekvivalentnom obliku

$$d/R \leq \cos(\varphi - \alpha) \leq \sqrt{d/R}. \quad (7.21)$$

Relacija (7.21) može biti ispunjena samo ako je

$$d \leq R, \quad (7.22)$$

što geometrijski znači da stožac mora sjeći ili bar tangirati sferu. U specijalnom slučaju, kad stožac dodiruje sferu $d=R$, i nejednadžba (7.21) ima jedinstveno rješenje $\varphi=\alpha$. To znači da je paralela uzduž koje stožac dodiruje sferu ujedno i jedina paralela uzduž koje uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija nema deformacija duljina.

U općem slučaju relacija (7.16) može se napisati u obliku

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{d^2 - R^2 \cos^4(\varphi - \alpha)}{R^2 \cos^2(\varphi - \alpha) - d^2}. \quad (7.23)$$

Dakle, diferencijalna jednadžba krivulja uzduž kojih u uspravnoj gnomonskoj perspektivno konusnoj projekciji nema deformacija duljina prema (7.5) glasi:

$$d\lambda = \pm \frac{1}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)} \sqrt{\frac{d^2 - R^2 \cos^4(\varphi - \alpha)}{R^2 \cos^2(\varphi - \alpha) - d^2}} d\varphi, \quad (7.24)$$

odnosno nakon integriranja u konačnom obliku

$$\lambda = \lambda_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)} \sqrt{\frac{d^2 - R^2 \cos^4(\varphi - \alpha)}{R^2 \cos^2(\varphi - \alpha) - d^2}} d\varphi. \quad (7.25)$$

Ako stožac siječe sferu, $d < R$, tada na temelju (međusobno ekvivalentnih) relacija (7.17)—(7.21) možemo zaključiti da postoje dva granična slučaja (sl. 3). Neka je najprije

$$\cos(\varphi - \alpha) = \sqrt{d/R}. \quad (7.26)$$

Tada diferencijalna jednadžba (7.24) glasi

$$d\lambda = 0, \quad (7.27)$$

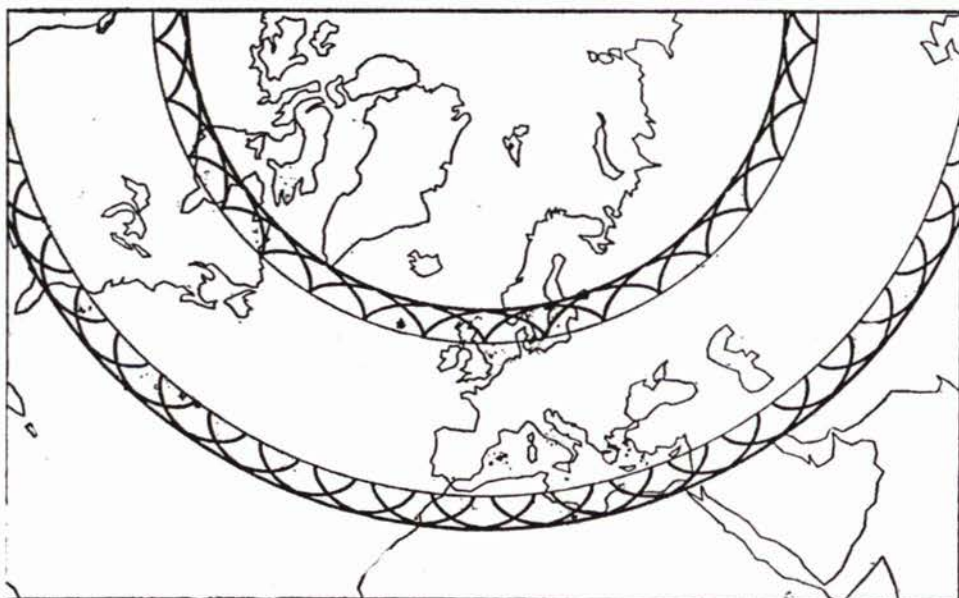
a to znači da za geografske širine određene relacijom (7.26) krivulja $\lambda=\lambda(\varphi)$ uzduž koje u uspravnoj gnomonskoj perspektivnoj projekciji nema deformacija duljina ima stacionarnu točku. Neka je sada

$$\cos(\varphi - \alpha) = d/R. \quad (7.28)$$

Tada diferencijalna jednadžba (7.24) prelazi u

$$d\varphi = 0, \quad (7.29)$$

a to znači da su paralele određene s (7.28) krivulje uzduž kojih u uspravnoj gnomonskoj perspektivnoj konusnoj projekciji nema deformacija duljina.



Slika 7. Upravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: krivulje uzduž kojih nema deformacija duljina

Takve paralele obično se u matematičkoj kartografiji nazivaju standardnim paralelama. Lako se može vidjeti da su to upravo one paralele uzduž kojih stožac siječe sferu. Zaista, ako u jednadžbu izvodnice stošca (3.1) uvrstimo pravokutne koordinate $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ točke T na sferi u promatranom osnom presjeku, dobivamo relaciju

$$R \cos \varphi \cos \alpha + R \sin \varphi \sin \alpha = R \cos (\varphi - \alpha) = d \quad (7.30)$$

koja je ekvivalentna izrazu (7.28). Krivulje uzduž kojih u uspravnoj gnomonskoj perspektivno konusnoj projekciji nema deformacije duljina grafički su pokazane na slici 7. Područja u kojima postoje spomenute krivulje određena su relacijama

$$\varphi \in [\alpha - \arctg \sqrt{(R/d)^2 - 1}, \alpha + \arctg \sqrt{(R/d)^2 - 1}],$$

ili

$$\varphi \in [\alpha - \arctg \sqrt{R/d - 1}, \alpha + \arctg \sqrt{R/d - 1}]. \quad (7.31)$$

8. EKVIDEFORMATE KUTOVA I POVRŠINA

Poznato je da za svaku kartografsku projekciju vrijedi relacija:

$$\sigma = \sin \frac{\max |\Omega|}{2} = \frac{A - B}{A + B}, \quad (8.1)$$

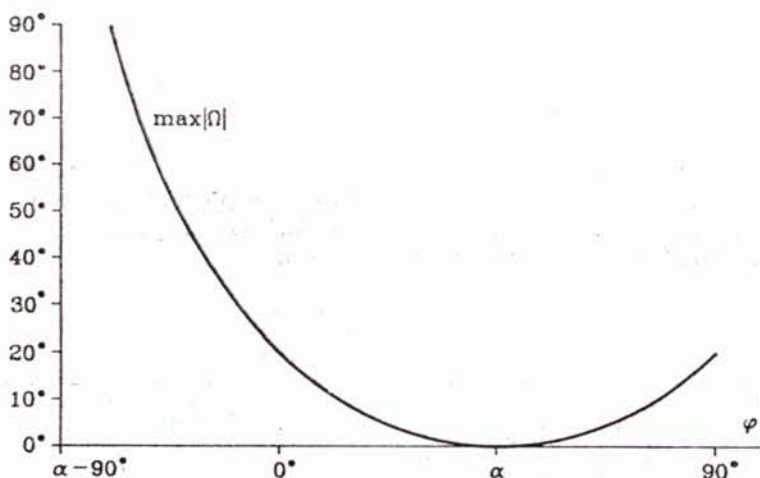
gdje smo s Ω označili razliku bilo kojega kuta u ravnini projekcije i njegovog iznosa na originalnoj plohi. Za uspravnu gnomonsku perspektivno konusnu projekciju izraz (8.1) može se transformirati u

$$\sigma = \frac{1 - \cos(\varphi - \alpha)}{1 + \cos(\varphi - \alpha)} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi - \alpha}{2}\right), \quad (8.2)$$

odnosno

$$\max |\Omega| = 2 \operatorname{arc} \sin \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi - \alpha}{2}\right). \quad (8.3)$$

Funkcionalna ovisnost veličine $\max|\Omega|$ o geografskoj širini φ grafički je pokazana na slici 8. Iz izraza (8.2) ili (8.3) vidi se da su za ovu projekciju ekvi-



Slika 8. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ovisnost maksimalne deformacije kutova o geografskoj širini φ

deformate kutova paralele. Da bi se za zadani σ mogla nacrtati odgovarajuća ekvideformata kutova (sl. 10), treba iz jednadžbe (8.2) izraziti širinu φ :

$$\varphi = \alpha \pm \operatorname{arc} \cos \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} = \alpha \pm 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\sigma}. \quad (8.4)$$

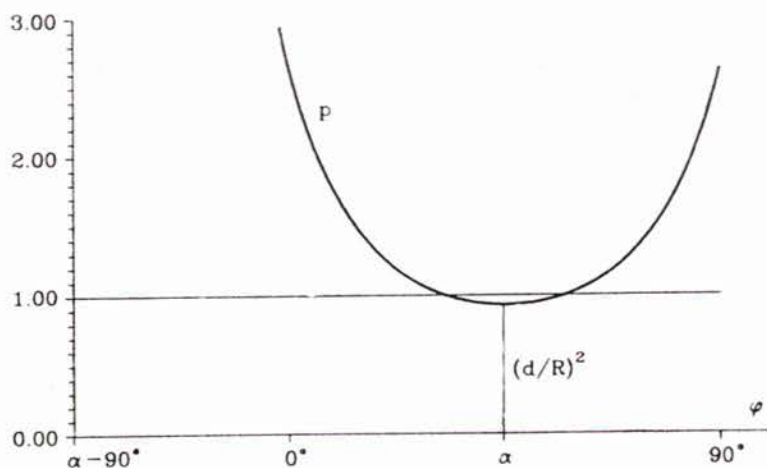
Iz izraza (8.3) proizlazi da se u ovoj projekciji kutovi preslikavaju u pravoj veličini samo uzduž paralele $\varphi = \alpha$.

Za svaku se kartografsku projekciju lokalno mjerilo površina p može izraziti u obliku

$$p = AB. \quad (8.5)$$

Za uspravnu gnomonsku perspektivno konusnu projekciju je dakle

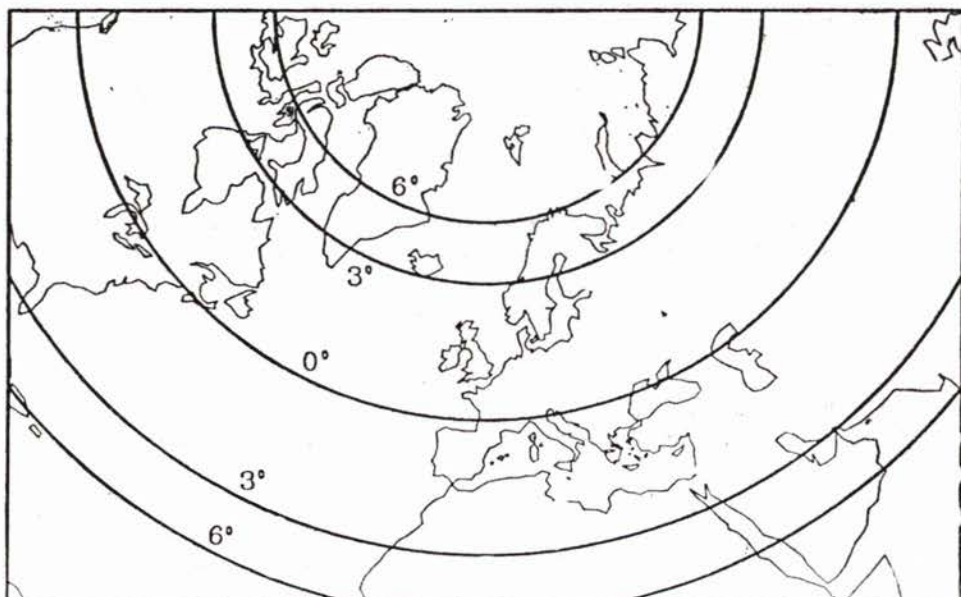
$$p = \frac{d^2}{R^2 \cos^3(\varphi - \alpha)}. \quad (8.6)$$



Slika 9. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ovisnost lokalnog mjerila površina p o geografskoj širini φ

Ova funkcionalna ovisnost pokazana je grafički na slici 9. Iz posljednjeg se izraza vidi da su za ovu projekciju i ekvideformate površina paralele. Da bi se za zadani p mogla nacrtati odgovarajuća ekvideformata površina (sl. 11), treba iz jednadžbe (8.6) izraziti geografsku širinu φ :

$$\varphi = \alpha \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{d^2}{pR^2}}. \quad (8.7)$$



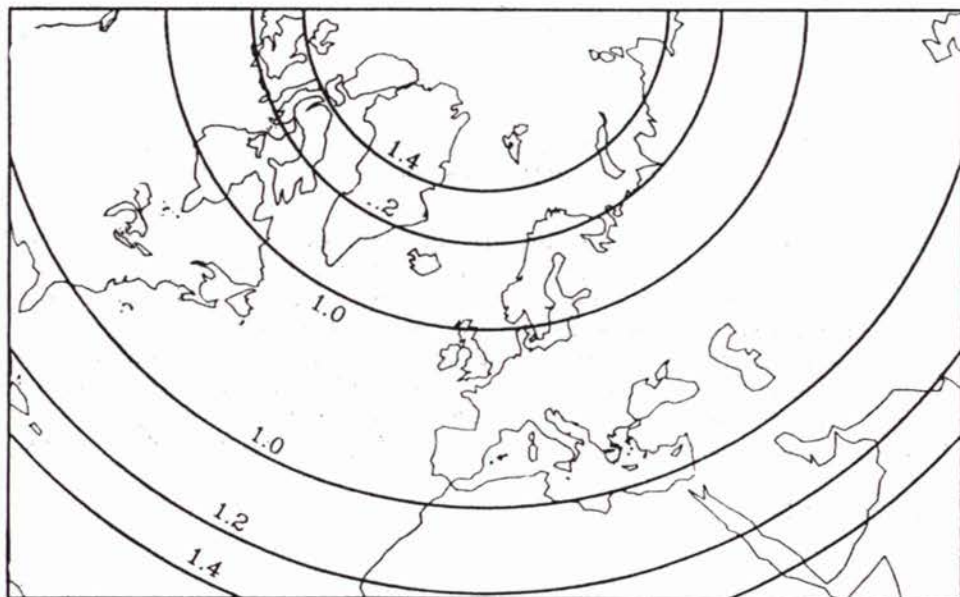
Slika 10. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ekvideformate kutova

U specijalnom slučaju, kad stožac dodiruje sferu, (8.7) se pojednostavnjuje u:

$$\varphi = \alpha \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{p}}. \quad (8.8)$$

Uvjet da u nekoj točki projekcije nema deformacije površina glasi $p=1$, što onda za uspravnu gnomonsku perspektivnu konusnu projekciju poprima oblik

$$\cos^3(\varphi - \alpha) = d^2/R^2. \quad (8.9)$$



Slika 11. Uspravna gnomonska perspektivno konusna projekcija: ekvideformate površina

Rješenje jednadžbe (8.9) može se napisati u eksplicitnom obliku

$$\varphi = \alpha \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{d^2}{R^2}}, \quad (8.10)$$

što znači da općenito postoje dvije paralele uzduž kojih nema deformacija površina (sl. 9). U specijalnom slučaju, kad stožac dodiruje sferu, iz relacije (8.10) proizlazi

$$\varphi = \alpha, \quad (8.11)$$

tj. samo uzduž paralele u kojoj stožac tangira sferu nema deformacija površina.

LITERATURA

- Lambert, J. H. (1772): Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. Dritter Teil im Verlag der Buchhandlung der Realschule, Berlin.
- Lapaine, M. (1991): Suvremeni pristup kartografskim projekcijama. Magistarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Lapaine, M., Frančula, N. (1991): Perspective Conical Projection of the Barth — A General Approach. First International Conference on Computational Graphics and Visualization Technique, COMPUGRAPHICS '91, 16—20. 9. 1991., Sesimbra, Portugal, Proceedings (Ed. H. P. Santo), Vol. I, 109—118.
- Lapaine, M. (1992): Raspodjela deformacija pri perspektivnoj konusnoj projekciji. Proceedings of the 37th International Annual Gathering KoREMA, 14th Symposium on Measurement, Faculty of Electrical Engineering. University of Zagreb, 283—288.
- Tissot, A. (1881): Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques. Gauthier-Villars, Paris.

NORMAL ASPECT OF GNOMONIC PERSPECTIVE CONICAL PROJECTION OF THE SPHERE

The work deals with setting up the equations of normal aspect of gnomonic perspective conical projections. The extreme values of local linear deformations and main directions are being then researched for these projections. The absence of local deformation in all directions is being closely examined and determination of the directions along which there are no azimuth or linear deformations is being considered in details. The equations of constant distortions curves of angles and areas are being derived. All theoretical researches are illustrated by means of adequate graphic presentations.

Primljeno: 1992-02-20