UDK 528.181
Pregledni članak

SEKVENCIJALNI POSTUPAK IZJEDNAČENJA GEODETSKIH MREŽA

Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. U ovom je radu predočen postupak sekvencijalnog izjednačenja geodetskih mreža, utemeljen na primjeni linearnog modela Gauss-Markova i načela najmanjih kvadrata. Provedena je usporedba klasičnog postupka izjednačenja mreže sa sekvencijalnim postupkom u slučaju kada se u izjednačenje uključuju nova ili izostavljaju već izjednačena merenja, a broj nepoznanica ostaje stalan. U prilogu je primjer sekvencijalnog izjednačenja nivelmanske mreže u oba karakteristična slučaja.

1. UVOD

Nakon provedenog izjednačenja geodetskih mreža može se naknadno pojaviti potreba za ponovnim izjednačenjem. Razlozi koji uzrokuju ovu potrebu, uz uvjet stalnosti broja nepoznanica, mogu biti: dostupnost novih naknadno provedenih mjerenja, naknadno uočena pogrešnost pojedinih mjerenja već obuhvaćenih prethodnim izjednačenjem ili sromne mogućnosti računala u pogledu istodobne obrade opsežnog broja podataka, posebice velikog broja mjerenja.

Promjenom mjerenja uključenih u izjednačenje mijenjaju se i definitivne (izjednačene) vrijednosti nepoznanica s pripadnom ocjenom točnosti. Stoga je neophodno ponavljanje postupka izjednačenja kako bi se odredile nove definitivne veličine. Njihovo određivanje može se provesti na dva načina. Prvi se temelji na ponavljanju klasičnog postupka izjednačenja mreže (Höpcke, 1980), dok se drugi temelji na primjeni tzv. sekvencijalnih postupaka izjednačenja (Mikhail i Ackerman, 1976; Baran, 1982; Pelzer, 1985).

Ponavljanje klasičnog postupka pretpostavlja provođenje cijelog izjednačenja od formiranja jednadžbi popravaka ažuriranih mjerenja, pa do definitivne kontrole izjednačenja. Sekvencijalni postupci pri određivanju novih definitivnih veličina, prvenstveno nepoznanica i pripadne matrice kofaktora, polaze od definitivnih veličina dobivenih prethodnim izjednačenjem.

Postupak sekvencijalnog u odnosu na ponavljanje klasičnog izjednačenja ima, u određenim slučajevima, stanovite prednosti. Naime, klasični postupak

* Mr. Nevio Rožić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

nije ekonomičan glede opsega računanja, osobito za veći broj nepoznanica, jer ne uzima u obzir prethodno obavljeno izjednačenje. Ponavljanjem klasičnog postupka moguća je pojava novih pogrešaka, kao i nepotrebna opterećenost računala, usprkos eventualnoj primjeni programske podrške. Nepoznanice i pripadna matrica kofaktora pri ponovnom izjednačenju malo se mijenjaju u odnosu na iste veličine iz prethodnog izjednačenja, jer su njihove promjene posljedica relativno malog broja novouvedenih ili isključenih mjerenja.

2. KLASIČNI POSTUPAK IZJEDNAČENJA

Suvremeni postupci izjednačenja geodetskih mreža (Caspary, 1988) temelje se na linearnom Gauss-Markovljevom modelu koji, primijenjen na podatke mjerenja ostvarene u geodetskoj mreži, ima oblik jednadžbi popravaka posrednih mjerenja

$$\underset{n\times 1}{v} = \underset{n\times u}{A}\;\underset{u\times 1}{x} - \underset{n\times 1}{l}, \quad \ldots \underset{n\times n}{P}, \tag{1}$$

gdje su:

v — vektor popravaka mjerenja,
A — matrica koeficijenata jednadžbi popravaka,
x — vektor nepoznanica ili nepoznatih parametara modela,
l — vektor prikraćenih mjerenja,
P — matrica težina mjerenja,
n — broj mjerenja,
u — broj nepoznanica.

Izjednačenje mjerenja i nepoznanica, primjenom sustava jednadžbi (1), moguće je samo uz prisutnost stanovitog broja prekobrojnih mjerenja

$$f = n - u, \tag{2}$$

tj. uklonjen defekt konfiguracije (Welsch, 1978) i uvođenje dodatnih podataka neophodnih za definiciju datuma mreže (Caspary, 1988). Primjenom načela najmanjih kvadrata

$$v^t P v = \text{minimum}, \tag{3}$$

uklanja se višeznačnost rješenja sustava (1), te je nakon sastavljanja normalnih jednadžbi

$$N x - n = 0, \tag{4}$$

gdje je matrica koeficijenata normalnih jednadžbi

$$N = A^t P A \tag{5}$$

i vektor apsolutnih članova

$$n = A^t P l, \tag{6}$$

određen vektor nepoznanica

$$x = Q_{xx}\, n. \tag{7}$$

Matrica kofaktora Q_{xx} određena je, prema odabranoj definiciji datuma, invertiranjem matrice N, uz primjenu Cayleyeve regularne inverzije u slučaju definicije konvencionalnog datuma ili pseudoinverzije u slučaju optimalnog datuma.

Pri ponavljanju izjednačenja koristi se isti postupak. Međutim, neophodno je razlučiti dva karakteristična slučaja koji pritom mogu nastati. Ako je u prethodnom izjednačenju korišten sustav jednadžbi popravaka

$$v_1 = A_1 x - l_1, \quad \ldots P_1, \tag{8}$$

kojim je obuhvaćen broj mjerenja n_1, uz broj prekobrojnih mjerenja f_1, tada se pri ponovnom izjednačenju uspostavlja sustav (1), kojemu su u odnosu na sustav (8) dodana nova mjerenja ili se neka već izjednačena mjerenja iz sustava (8) izostavljaju.

a) Uključivanje novih mjerenja

Uključivanjem novih mjerenja u izjednačenje sustavu jednadžbi (8) dodaje se sustav jednadžbi popravaka

$$v_2 = A_2 x - l_2, \quad \ldots P_2, \tag{9}$$

kojim je obuhvaćen broj novouvedenih mjerenja n_2. Ukupni broj mjerenja uključenih u izjednačenje tada je

$$n = n_1 + n_2, \tag{10}$$

dok je broj prekobrojnih mjerenja

$$f = f_1 + n_2. \tag{11}$$

Sustavi jednadžbi (8) i (9) čine cjeloviti sustav jednadžbi popravaka

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad \ldots P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

ali uz provedeno horizontalno rastavljanje pripadnih vektora i matrica. Pritom su broj i vrst nepoznanica, u vektoru nepoznanica x, ostali isti. Prema izrazu (3) uvodi se načelo minimuma koji se, uslijed rastavljanja, može izraziti ovako:

$$v^t P v = [v^t_1, v^t_2] P \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v^t_2 P_1 v_1 + v^t_1 P_2 v_2. \tag{13}$$

b) Izostavljanje mjerenja

Pojedina mjerenja, obuhvaćena prethodnim izjednačenjem, mogu se izostaviti pri ponavljanju izjednačenja. Stoga se provodi horizontalno rastavljanje u sklopu sustava jednadžbi (8), tako da prvi dio sustava odgovara sustavu jednadžbi popravaka pri ponovljenom izjednačenju, a drugi mjerenjima koja se iz izjednačenja izostavljaju

$$\begin{bmatrix} v \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A_2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}, \quad \ldots P_1 = \begin{bmatrix} P & \\ & P_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Neophodno je paziti na minimum prekobrojnih mjerenja, jer nakon izostavljanja broja mjerenja n_2 mora biti zadovoljeno

$$f = n - u > 0, \tag{15}$$

ako je ukupni broj mjerenja

$$n = n_1 - n_2. \tag{16}$$

Načelo minimuma (3) primijenjeno na sustav (14), uslijed rastavljanja, je

$$v_1^t P_1 v_1 = [v^t, v_2^t] P_1 \begin{bmatrix} v \\ v_2 \end{bmatrix} = v^t P v + v_2^t P_2 v_2. \tag{17}$$

Budući da se pri ponovnom izjednačenju zahtijeva

$$v^t P v = \text{minimum},$$

iz izraza (17) slijedi

$$v^t P v = v_1^t P_1 v_1 - v_2^t P_2 v_2 = \text{minimum}. \tag{18}$$

Načelo minimuma, izvedeno s obzirom na rastavljanje pripadnih vektora i matrica (izrazi (13) i (18)), može se poopćiti uvođenjem alternativnog predznaka ($\pm$)

$$v^t P v = v_1^t P_1 v_1 \pm v_2^t P_2 v_2, \tag{19}$$

tako da istodobno odgovara i jednom i drugom opisanom slučaju. Uvrštavanjem izraza (8) i (9) u izraz (19), slijedi zbroj kvadrata popravaka

$$v^t P v = (A_1 x - l_1)^t P_1 (A_1 x - l_1) \pm (A_2 x - l_2)^t P_2 (A_2 x - l_2), \tag{20}$$

kojim su radi uvjeta minimuma, uz oznake

$$N_{11} = A_1^t P_1 A_1, \tag{21}$$

$$N_{22} = A_2^t P_2 A_2, \tag{22}$$

$$n_{11} = A_1^t P_1 l_1, \tag{23}$$

$$n_{22} = A_2^t P_2 l_2, \tag{24}$$

određene pripadne normalne jednadžbe

$$(N_{11} \pm N_{22}) x - (n_{11} \pm n_{22}) = 0. \tag{25}$$

Matrica koeficijenata normalnih jednadžbi je

$$N = N_{11} \pm N_{22} \tag{26}$$

i vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi

$$n = n_{11} \pm n_{22}. \tag{27}$$

Kako je postupak sastavljanja normalnih jednadžbi u cijelosti ponovljen, neophodno je i ponovno određivanje inverzije matrice N. Kao u prethodnom izjednačenju, tražena inverzija se, prema odabranoj definiciji datuma, određuje Cayleyevom inverzijom ili pseudoinverzijom, tj.

$$Q_{xx} = N^{-1} = (N_{11} \pm N_{22})^{-1}. \tag{28}$$

Time je određen i definitivni vektor nepoznanica

$$x = (N_{11} \pm N_{22})^{-1} (n_{11} \pm n_{22}). \tag{29}$$

Vidljivo je da se izjednačene veličine iz prethodnog izjednačenja u ponovljenom postupku ne koriste, te da se ponovno provode svi koraci izjednačenja uključujući i računski najopsežnije rješavanje normalnih jednadžbi. Neophodno je istaknuti da definitivne veličine iz prethodnog izjednačenja, određene samo na postavu sustava jednadžbi popravaka (8), nisu jednake rezultatima određenim izrazima (28) i (29). Stoga je potrebno uvesti i formalno različite oznake u prethodnom izjednačenju od oznaka koje se koriste pri ponovnom izjednačenju. Stoga se uvodi sustav jednadžbi popravaka, koji je ekvivalentan sustavu (8), tj.

$$v_p = A_1 x_p - l_1, \quad \dots P_1. \tag{30}$$

Pripadne normalne jednadžbe su

$$N_{11} x_p - n_{11} = 0, \tag{31}$$

dok je vektor nepoznanica

$$x_p = N_{11}^{-1} n_{11} \tag{32}$$

i matrica kofaktora

$$Q_{11} = N_{11}^{-1}. \tag{33}$$

Usporedba izraza (32) i (33) s izrazima (28) i (29) jasno pokazuje različitost definitivnih veličina, iako su matrice A_1, N_{11} i vektor l_1 u oba postupka numerički jednaki.

3. SEKVENCIJALNI POSTUPAK IZJEDNAČENJA

Osnovna zamisao na kojoj se temelji sekvencijalni postupak izjednačenja geodetskih mreža jest izvođenje rekurzivnih formula za određivanje definitivnih veličina pri ponovnom izjednačenju iz definitivnih veličina prethodnog izjednačenja. Definitivnim se veličinama pritom prvenstveno smatraju vektor nepoznanica x i pripadna matrica kofaktora Q_{xx}. Ujedno se određuju pripadne vrijednosti popravaka, izjednačenih mjerenja i ocjene točnosti.

Osnovno načelo sekvencijalnog postupka izjednačenja određeno je izrazom (19). To je poopćeni uvjet minimuma prilagođen uključivanju novih ili izostavljanju postojećih mjerenja. Budući da je vektor nepoznanica x_p određen izrazom (32) u sklopu prethodnog izjednačenja, veoma dobra procjena (približna vrijednost) vektora nepoznanica pri ponavljanju izjednačenja, uslijed utjecaja malog broja novih ili izostavljenih mjerenja, određuje se pripadni popravak tog vektora dx (Linkwitz, 1968), tako da je

$$x = x_p + dx. \tag{34}$$

Uvrštenjem tako definiranog vektora nepoznanica u sustav jednadžbi popravaka (8)

$$v_1 = A_1 x_p + A_1 dx - l_1, \tag{35}$$

izraženi su popravci mjerenja v_1. Budući da su od ranije poznati popravci v_p, određeni izrazom (30), što su također veoma dobre procjene popravaka v_1, može se uvesti

$$v_1 = v_p + dv_1 \tag{36}$$

Iz izraza (35) i (36) slijedi

$$v_p + dv_1 = A_1 x_p + A_1 dx - l_1, \tag{37}$$

a usporedba s izrazom (8) određuje

$$dv_1 = A_1 dx, \quad \ldots P_1. \tag{38}$$

Ovaj izraz pokazuje da vektor nepoznanica dx dovodi i do odgovarajućeg popravka dv_1 kojim se korigiraju popravci mjerenja v_p iz prethodnog izjednačenja.

Popravci mjerenja određeni izrazom (36) uvode se u poopćeni uvjet minimuma, tj.

$$v^t P v = (v_p + dv_1)^t P_1 (v_p + dv_1) \pm v_2^t P_2 v_2. \tag{39}$$

Nakon transponiranja i množenja

$$v^t P v = v_p^t P_1 v_p + dv_1^t P_1 v_p + v_p^t P_1 dv_1 + dv_1^t P_1 dv_1 \pm v_2^t P_2 v_2, \tag{40}$$

uslijed jednakosti bilinearnih oblika

$$dv_1^t P_1 dv_p = v_p^t P_1 dv_1, \tag{41}$$

slijedi

$$v^t P v = v_p^t P_1 v_p + 2\, dv_1^t P_1 v_p + dv_1^t P_1 dv_1 \pm v_2^t P_2 v_2. \tag{42}$$

Drugi član ovog izraza s desne strane znaka jednakosti jednak je nuli. Naime, uvrštenjem transponiranog izraza (38) u taj član slijedi

$$2\, dv_1^t P_1 v_p = 2\, dx^t A_1^t P_1 v_p = 0, \tag{43}$$

jer je kontrola računanja popravaka mjerenja u prethodnom izjednačenju (Feil, 1989)

$$A_1^t P_1 v_p = 0. \tag{44}$$

Tako izraz (40) poprima oblik

$$v^t P v = v_p^t P_1 v_p + dv_1^t P_1 dv_1 \pm v_2^t P_2 v_2. \tag{45}$$

Kako je u prethodnom izjednačenju bio zadovoljen uvjet

$$v_p^t P_1 v_p = \text{minimum}, \tag{46}$$

pri ponovljenom izjednačenju također mora biti, uslijed izraza (19), zadovoljeno

$$\Phi = dv_1^t P_1 dv_1 \pm v_2^t P_2 v_2 = \text{minimum}. \tag{47}$$

Vektor nepoznanica određen izrazom (34) neophodno je uvesti i u sustav jednadžbi popravaka (9)

$$v_2 = A_2 x_p + A_2 dx - l_2, \quad \ldots P_2. \tag{48}$$

Definiranjem reduciranog vektora prikraćenih mjerenja

$$-L = A_2 x_p - l_2, \tag{49}$$

sustav jednadžbi popravaka novouvedenih ili isključenih mjerenja je

$$v_2 = A_2 dx - L, \quad \dots P_2. \tag{50}$$

Sustavi jednadžbi određeni izrazima (38) i (50) određuju cjeloviti sustav jednadžbi popravaka u sekvencijalnom izjednačenju

$$\begin{bmatrix} dv_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} dx - \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}, \quad \dots P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \tag{51}$$

koji odgovara poopćenom uvjetu minimuma danog izrazom (47).

Ovaj uvjet je uz izraze (38) i (50)

$$\Phi = (A_1 dx)^t P_1 (A_1 dx) \pm (A_2 dx - L)^t P_2 (A_2 dx - L), \tag{52}$$

te nakon transponiranja i množenja

$$\Phi = dx^t A_1^t P_1 A_1 dx \pm (dx^t A_2^t P_2 A_2 dx - L^t P_2 A_2 dx - dx^t A_2^t P_2 L + L^t P_2 L). \tag{53}$$

Zadržavanjem oznaka uvedenih izrazima (21) i (22), uz

$$-\bar{n}_{22} = -A_2^t P_2 L, \tag{54}$$

te traženjem minimuma funkcije Φ, dane izrazom (53), određene su normalne jednadžbe

$$(N_{11} \pm N_{22}) dx \mp \bar{n}_{22} = 0. \tag{55}$$

Vektor nepoznanica dx tada je

$$dx = (N_{11} \pm N_{22})^{-1} (\pm \bar{n}_{22}). \tag{56}$$

Ovim izrazom još uvijek nije definiran rekurzivni izraz za određivanje definitivne vrijednosti vektora nepoznanica x na temelju vektora nepoznanica x_p. Naime, nije riješen problem određivanja inverzije matrice koeficijenata normalnih jednadžbi danih izrazom (55), koji se pri ponavljanju klasičnog postupka izjednačenja rješava prema izrazu (28). Takav postupak nije učinkovit, pa se korisno može primijeniti relacija kojom je definirana inverzija zbroja ili razlike dviju kvadratnih i simetričnih matrica (Mikhail i Ackerman, 1976), uz uvjet da se poznaje inverzija prve matrice u zbroju odnosno razlici. Za matricu koeficijenata, uzevši u obzir oba karakteristična slučaja, normalnih jednadžbi, određenu u izrazu (55), uz uvođenje izraza (22)

$$(N_{11} \pm N_{22}) = (N_{11} \pm A_2^t P_2 A_2), \tag{57}$$

određena je prema (Mikhail i Ackerman, 1976) inverzija

$$(N_{11} \pm A_2^t P_2 A_2)^{-1} = N_{11}^{-1} \mp N_{11}^{-1} A_2^t (P_2^{-1} \pm A_2 N_{11}^{-1} A_2^t)^{-1} A_2 N_{11}^{-1}. \tag{58}$$

Inverzija se može smatrati regularnom bez obzira na eventualnu singularnost matrice N_{11}, jer je u slučaju definicije odgovarajućeg datuma mreže određena prethodnim izjednačenjem, tj. izrazom (33). Iako je na prvi pogled, određivanje inverzije računski složeno, u praktičnom pogledu se jednostavno provodi, jer su matrice P_2, odnosno $(P_2^{-1} \pm A_2 N_{11}^{-1} A_2^t)$ malog formata. U slučaju dodavanja, odnosno oduzimanja samo jednog mjerenja — to su skalari. Uvođenjem izraza (33) u izraz (58) i supstitucije

$$B = (P_2^{-1} \pm A_2 Q_{11} A_2^t), \tag{59}$$

slijedi

$$(N_{11} \pm A_2^t P_2 A_2)^{-1} = Q_{11} \mp Q_{11} A_2^t B^{-1} A_2 Q_{11} = Q_{xx}. \tag{60}$$

Uvrštenjem ove inverzije u izraz (56)

$$dx = \pm Q_{11} \bar{n}_{22} \mp Q_{11} A_2^t B^{-1} A_2 Q_{11} \bar{n}_{22}, \tag{61}$$

te istodobnim dodavanjem i oduzimanjem člana $Q_{11}A_2^tB^{-1}L$, čime se prethodna jednadžba ne mijenja, slijedi

$$dx = Q_{11} A_2^t B^{-1} L - Q_{11} A_2^t B^{-1} L \pm Q_{11} \bar{n}_{22} \mp Q_{11} A_2^t B^{-1} A_2 Q_{11} \bar{n}_{22}. \tag{62}$$

Drugi, odnosno prvi, po redu član u prethodnoj jednadžbi (Höpcke, 1980) može se transformirati uvođenjem u produkt jedinične matrice

$$I = P_2^{-1} P_2, \tag{63}$$

pripadnog formata, tj.

$$Q_{11} A_2^t B^{-1} L = Q_{11} A_2^t B^{-1} I L = Q_{11} A_2^t B^{-1} P_2^{-1} P_2 L. \tag{64}$$

Stoga je izraz (62), nakon uvrštenja izraza (54) i odgovarajućeg izlučivanja

$$dx = \pm Q_{11} A_2^t B^{-1} L \mp Q_{11} A_2^t B^{-1} (P_2^{-1} \mp A_2 Q_{11} A_2^t) P_2 L \pm Q_{11} A_2^t P_2 L. \tag{65}$$

Uslijed izraza (59) posljednja se dva člana u ovoj jednadžbi poništavaju, te je naposljetku

$$dx = \pm Q_{11} A_2^t B^{-1} L. \tag{66}$$

Uz supstituciju

$$F = Q_{11} A_2^t B^{-1} \tag{67}$$

i izraz (34), definitivni oblik rekurzivne formule za određivanje vektora nepoznanica je

$$x = x_p \pm F L. \tag{68}$$

Matrica kofaktora Q_{dxdx} određuje se primjenom zakona o prirastu kofaktora na izraz (34)

$$Q_{xx} = Q_{11} + Q_{dxdx}. \tag{69}$$

Budući da je matrica kofaktora Q_{xx} određena izrazom (60), slijedi

$$Q_{dxdx} = Q_{xx} - Q_{11} = \mp Q_{11} A_2^t B^{-1} A_2 Q_{xx}, \tag{70}$$

pa je uz supstituciju (67)

$$Q_{dxdx} = \mp F A_2 Q_{11}.$$

Stoga je definitivni oblik rekurzivne formule za određivanje matrice kofaktora Q_{xx}

$$Q_{xx} = Q_{11} \mp F A_2 Q_{11}. \tag{71}$$

Određivanjem vektora nepoznanica i pripadne matrice kofaktora rekurzivnim načinom određeno je rješenje primjereno postupku sekvencijalnog izjednačenja. Popravci mjerenja određuju se na temelju sustava jednadžbi (51) čime je omogućeno određivanje izjednačenih vrijednosti mjerenja kao i računanje zbroja kvadrata popravaka neophodnog za ocjenu točnosti. U slučaju da popravci za mjerenja iz prethodnog izjednačenja nisu potrebni, zbroj kvadrata popravaka određuje se na temelju izraza (45) i (47). U izrazu (45) prvi je član $v^t_p P_1 v_p$ poznat iz prethodnog izjednačenja, dok se zbroj kvadrata popravaka Φ jednostavno određuje transformacijom izraza (53). Nakon izlučivanja slijeva vektora dx^t iz prvog, drugog i četvrtog člana, te produkta $L^t P_2$ iz trećeg i petog člana, slijedi

$$\Phi = dx^t (A^t_1 P_1 A_1 dx \pm (A^t_2 P_2 A_2 dx - A^t_2 P_2 L_2)) \mp L^t P_2 (A_2 dx - L). \tag{72}$$

Uslijed izraza (49) i (55)

$$\Phi = \mp L^t_2 P_2 v_2 \tag{73}$$

tako da je

$$v^t P v = v^t_p P_1 v_p \mp L^t_2 P_2 v_2. \tag{74}$$

Primjenom izraza (74), osnovni kriterij ocjene točnosti mjerenja određen je referentnom srednjom pogreškom

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{v^t P v}{f}}. \tag{75}$$

Jednostavno se izvodi i ocjena točnosti izjednačenih mjerenja primjenom zakona o prirastu kofaktora na funkciju izjednačenih mjerenja (Feil, 1989). Označivši matricu kofaktora izjednačenih mjerenja

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{l_1l_1} & Q_{l_1l_2} \\ Q_{l_2l_1} & Q_{l_2l_2} \end{bmatrix} \tag{76}$$

i primjenom prirasta kofaktora

$$\bar{Q} = A Q_{xx} A^t = [A_1, A_2] Q_{xx} \begin{bmatrix} A^t_1 \\ A^t_2 \end{bmatrix}, \tag{77}$$

slijedi

$$Q_{l_1l_1} = A_1 Q_{xx} A^t_1, \tag{78}$$

$$Q_{l_2l_2} = A_2 Q_{xx} A^t_2. \tag{79}$$

Na kraju treba napomenuti da se sekvencijalni postupak izjednačenja učinkovito može primijeniti samo u slučaju kada broj nepoznanica pri svakom narednom izjednačenju ostaje stalan. Prema klasifikaciji sekvencijalnih izjednačenja (Baran, 1982) njihova je primjena moguća i u slučaju kada se uz mjerenja mijenja i broj nepoznanica (Swiatek, 1983).

Za razliku od prikaza sekvencijalnog postupka izjednačenja (Pelzer, 1985), a temeljenog na radu (Linkwitz, 1968), u izloženom je postupku sekvencijalno izjednačenje izvedeno uz dosljednu primjenu posrednih mjerenja, tj. Gauss-Markovljevog modela i načela najmanjih kvadrata. U (Pelzer, 1985) prikazan je odgovarajući postupak sekvencijalnog izjednačenja izveden iz transformacije posrednih na izjednačenje koreliranih uvjetnih mjerenja. Određene modifikacije sekvencijalnog izjednačenja, temeljene na transformaciji sustava normalnih jednadžbi, predočene su u (Linkwitz, 1968; Wolf, 1968. i Höpcke, 1980), dok je u (Mikhail i Ackerman, 1976) obuhvaćeno samo sekvencijalno izjednačenje uvjetnih mjerenja. Osim toga, u ovom je radu postupak poopćen, jer obuhvaća oba karakteristična slučaja sekvencijalnog postupka izjednačenja a to je slučaj dodavanja novih kao i uklanjanja postojećih mjerenja.

4. ZNAČAJKE I PRIMJENA SEKVENCIJALNOG POSTUPKA IZJEDNAČENJA

Analiza sekvencijalnog postupka izjednačenja ukazuje na određene značajke:

— Sekvencijalno izjednačenje rezultira strogim rješenjem rekurzivnog oblika koje je u suglasju s načelom najmanjih kvadrata, a utemeljeno na linearnom Gauss-Markovljevom modelu kao osnovici za suvremenu obradu podataka.

— Rekurzivnost izvedenih formula omogućuje korištenje definitivnih veličina iz prethodnog izjednačenja uz njihovo ažuriranje za utjecaj novouvedenih ili izostavljenih mjerenja.

— Sekvencijalni postupak izjednačenja jednako se uspješno primjenjuje bez obzira na uvedenu definiciju datuma mreža. Jedini preduvjet za njegovu primjenu jest poznavanje vektora nepoznanica i pripadne matrice kofaktora iz prethodnog izjednačenja. Prema uvedenoj definiciji datuma (Rožić, 1991), matrica kofaktora je u prethodnom izjednačenju određena kao Cayleyeva inverzija ili pseudoinverzija a ta činjenica ne utječe na učinkovitost primjene algoritama.

— Sekvencijalni postupak izjednačenja omogućuje kontinuirano dodavanje novih ili ispuštanje postojećih podataka (mjerenja) iz modela uz gotovo trenutačno određivanje definitivnih veličina i pripadne ocjene točnosti.

— Algoritam sekvencijalnog izjednačenja je programibilan, te se jednostavno može uobličiti u nekom od viših programskih jezika. Primjenom računala i takve programske podrške, sa stalnim dotokom novih informacija (mjerenja), omogućena je »trenutačna« obrada podataka te određivanje definitivnih veličina i ocjene točnosti.

— Sekvencijalnim postupkom izjednačenja moguće je raščanjivanje utjecaja pojedinih mjerenja na nepoznanice i pripadnu točnost. Ova je mogućnost posebno važna pri analizi geometrijske konfiguracije geodetskih mreža.

— Sekvencijalnim izjednačenjem jednostavno se određuje točnost »a posteriori« novouvedenih mjerenja, što, ako postoji mogućnost primjene programske podrške i računala pri samoj izmjeri mreže u »on-line« načinu rada, može poslužiti kao kriterij njihove kvalitete.

— Sekvencijalni postupak izjednačenja djelotvoran je pri dodavanju ili isključivanju malog broja mjerenja (jedno ili dva). Nepovoljan je utjecaj gomilanja pogrešaka uslijed nedostatnog broja značajnih decimalnih mesta. Višestrukim ponavljanjem izjednačenja, ove pogreške mogu poprimiti velike iznose.

Navedene značajke postupka sekvencijalnog izjednačenja određuju i područje primjene. Iako se osnovna primjena može naći u sklopu obrade podataka geodetskih mreža, važno područje primjene nalazi se pri obradi podataka mjerenja različitih fizikalnih veličina, npr. temperature tlaka i sl. U takvim je slučajevima, uglavnom uslijed primjene automatiziranih mjernih instrumenata osiguran stalan priljev novih mjerenja. Sekvencijalno izjednačenje tada omogućuje, u svakom trenutku, određivanje definitivnih vrijednosti nepoznanica. Idealnu kombinaciju pritom čini mjerni instrument neposredno povezan s računalom i pripadnom programskom podrškom.

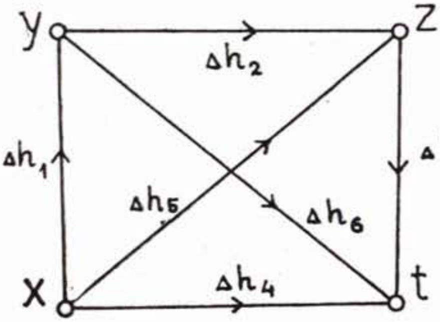
Pri obradi geodetskih mreža sekvencijalno izjednačenje ima primjenu na nekoliko područja; prvenstveno u sklopu dizajna trećeg reda (Ninkov, 1988), tj. poboljšanja točnosti već uspostavljenih geodetskih mreža. Stanovito ograničenje predstavlja to što se u sklopu sekvencijalnog izjednačenja matrice težina prethodno izjednačenih mreža ne smiju mijenjati (statički model dizajna trećeg reda) i da broj nepoznanica mora ostati stalan.

Primjena sekvencijalnog izjednačenja moguća je i u sklopu dizajna prvog reda. Naime, programskom simulacijom projekta geodetske mreže i primjenom sekvencijalnog izjednačenja moguće je raščlanjivanje utjecaja svakoga pojedinog mjerenja na položajnu točnost mreže, a glede njene geometrijske konfiguracie. Takav je postupak u određenoj mjeri empirijskoga karaktera, međutim mogućnosti definiranja bitno različitih geometrijskih konfiguracija iste mreže, s obzirom na terenske uvjete, zadatak koji se mrežom rješava i vrst mjerenja, nisu velike. Stoga se i primjenom takve »empirijske« simulacije, tj. postupka koji nije potpuno teorijski egzaktan, mogu ostvariti povoljni rezultati.

Primjena sekvencijalnog izjednačenja moguća je i u terenskim uvjetima gdje pruža zanimljive mogućnosti u pogledu »trenutačne« ocjene točnosti mjerenja »a posteriori« i uvida na utjecaj svakoga pojedinog mjerenja na nepoznanice i položajnu točnost. Pretpostavka za takav »on-line« način rada jest prijenosno računalo (lap-top) koje je spojeno s mjernim instrumentom, te tako osiguran izravan prijenos podataka mjerenja (Rožić, 1992.a) i trenutačna obrada. Ovakav oblik primjene sekvencijalnog izjednačenja može se preporučiti posebno pri uspostavi ili izmjeri geodetskih mreža posebnih namjena (Rožić, 1991). Dakako, pri takvom načinu rada važan je i »realan« tj. iskustveni pristup u analizi točnosti mjerenja, kako se prihvaćanje ili odbacivanje mjerenja na temelju kriterija »a posteriori« ocjene točnosti podaci ne bi na umjetni način »podešavali«.

5. PRIMJER

a) Izjednačenje mjerenja Δh_1, Δh_2, Δh_3 i Δh_4, u mreži geometrijskog nivelmana (sl. 1), uz definiciju optimalnog datuma. Visinske razlike i približne vrijednosti nepoznanica izražene su u metrima, a popravci u milimetrima.



Slika 1. Skica nivelmanske mreže

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100.2585 \\ 110.3500 \\ 115.4300 \\ 121.5600 \end{bmatrix}, \quad h_p = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.0958 \\ 5.0853 \\ 6.1282 \\ 21.3003 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} d_1 = 10.5 \text{ km} \\ d_2 = 8.4 \text{ km} \\ d_3 = 9.1 \text{ km} \\ d_4 = 9.5 \text{ km} \end{matrix}$$

$$\overset{A_1}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{-l_1}{\begin{bmatrix} -4.3 \\ -5.3 \\ 1.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}} \overset{P_1}{\begin{bmatrix} 0.95 & & & \\ & 1.19 & & \\ & & 1.10 & \\ & & & 1.05 \end{bmatrix}} \overset{N_{11} = A_1^t P_1 A_1}{\begin{bmatrix} 2.01 & -0.95 & 0.00 & -1.05 \\ -0.95 & 2.14 & -1.19 & 0.00 \\ 0.00 & -1.19 & 2.29 & -1.10 \\ -1.05 & 0.00 & -1.10 & 2.15 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{-n_{11} = A_1^t P_1 l_1}{\begin{bmatrix} 2.832 \\ 2.214 \\ -8.288 \\ 3.241 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{Q_{11} = N_{11}^{+}}{\begin{bmatrix} 0.30837 & -0.07733 & -0.17589 & -0.05516 \\ -0.07733 & 0.29297 & -0.04079 & -0.17486 \\ -0.17589 & -0.04079 & 0.27729 & -0.06062 \\ -0.05516 & -0.17486 & -0.06062 & 0.29064 \end{bmatrix}} \overset{x_p}{\begin{bmatrix} -1.98 \\ -0.20 \\ 3.08 \\ -0.90 \end{bmatrix}} \overset{x_0}{\begin{bmatrix} 100.2585 \\ 110.3500 \\ 115.4300 \\ 121.5600 \end{bmatrix}} \overset{\bar{x}_p = x_0 + x_p}{\begin{bmatrix} 100.2565 \\ 110.3498 \\ 115.4331 \\ 121.5591 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{h_p}{\begin{bmatrix} 10.0958 \\ 5.0853 \\ 6.1282 \\ 21.3003 \end{bmatrix}} \overset{v_p}{\begin{bmatrix} -2.52 \\ -2.02 \\ -2.18 \\ 2.28 \end{bmatrix}} = \overset{\bar{h}_p = h_p + v_p}{\begin{bmatrix} 10.09328 \\ 5.08328 \\ 6.12602 \\ 21.30258 \end{bmatrix}} \quad \begin{matrix} v_p^t P_1 v_p = 21.600 \\ m_0 = \pm 4.65 \text{ mm}/\sqrt{10 \text{ km}}. \end{matrix}$$

b) Sekvencijalno izjednačenje mreže (sl. 1), s novouvedenim mjerenjima Δh_5 i Δh_6 u odnosu na prethodno izjednačenje u primjeru a)

$$\begin{bmatrix}\Delta h_5\\ \Delta h_6\end{bmatrix} = \overset{h_2^I}{\begin{bmatrix}15.1699\\ 11.2102\end{bmatrix}} \qquad \begin{matrix} d_5 = 13.4\ \text{km}\\ d_6 = 14.0\ \text{km}\end{matrix}$$

$$\overset{A_2}{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}} \overset{-l_2}{\begin{bmatrix}1.6\\ -0.2\end{bmatrix}} \quad \overset{-L_I = A_1 x_p - l_2}{\begin{bmatrix}6.66\\ -0.90\end{bmatrix}} \quad \overset{P_2}{\begin{bmatrix}0.75 & 0.00\\ 0.00 & 0.71\end{bmatrix}} \overset{B_1 = P_2^{-1} + A_2 Q_{11} A_2^t}{\begin{bmatrix}2.27744 & -0.04200\\ -0.04200 & 2.33333\end{bmatrix}}$$

$$\overset{F_I = Q_{11} A_2^t B_I^{-1}}{\begin{bmatrix}-0.21253 & 0.00567\\ 0.01235 & -0.20028\\ 0.19890 & -0.00492\\ 0.00128 & 0.19952\end{bmatrix}} \overset{Q_{dx_I dx_I} = -F_I A_2 Q_{11}}{\begin{bmatrix}-0.10304 & 0.01042 & 0.09643 & -0.00380\\ 0.01042 & -0.09415 & -0.00957 & 0.09330\\ 0.09643 & -0.00957 & -0.09023 & 0.00337\\ -0.00380 & 0.09330 & 0.00338 & -0.09288\end{bmatrix}}$$

$$\overset{dx_I = FL_I}{\begin{bmatrix}1.42\\ -0.26\\ -1.33\\ 0.17\end{bmatrix}} \overset{\bar{x}_p}{\begin{bmatrix}100.2565\\ 110.3498\\ 115.4331\\ 121.5591\end{bmatrix}} \overset{x_I = dx_I + \bar{x}_p}{\begin{bmatrix}100.2579\\ 110.3495\\ 115.4318\\ 121.5593\end{bmatrix}} \overset{Q_{x_I x_I} = Q_{11} + Q_{dx_I dx_I}}{\begin{bmatrix}0.20533 & -0.06691 & -0.07946 & -0.05896\\ -0.06691 & 0.19883 & -0.05036 & -0.08156\\ -0.07946 & -0.05036 & 0.18706 & -0.05724\\ -0.05896 & -0.08156 & -0.05724 & 0.19777\end{bmatrix}}$$

$$\overset{dv_1^I}{\begin{bmatrix}-1.68\\ -1.07\\ 1.50\\ -1.25\end{bmatrix}} + \overset{\bar{h}_p}{\begin{bmatrix}10.09328\\ 5.08328\\ 6.12602\\ 21.30258\end{bmatrix}} = \overset{\bar{h}_1^I}{\begin{bmatrix}10.09160\\ 5.08222\\ 6.12752\\ 21.30133\end{bmatrix}} \qquad \begin{matrix} v_p^t P_1 v_p = 21.600\\ -L^t P_2 v_2 = 19.758\\ v^t P v = 41.358\end{matrix}$$

$$\overset{v_2^I}{\begin{bmatrix}3.91\\ -0.47\end{bmatrix}} + \overset{h_2^I}{\begin{bmatrix}15.1699\\ 11.2172\end{bmatrix}} = \overset{\bar{h}_2^I}{\begin{bmatrix}15.17381\\ 11.20973\end{bmatrix}} \qquad m_0 = \pm 3.71\ \text{mm}/\sqrt{10\ \text{km}}.$$

c) Sekvencijalno izjednačenje mreže (sl. 1), s isključenim mjerenjem Δh_6 u odnosu na prethodno izjednačenje u primjeru b)

$$[\Delta h_6] = \overset{\Delta h_2^{II}}{[11.2102]} \quad d_6 = 14.0\ \text{km}$$

$$\overset{A_2}{[0\ \ -1\ \ 0\ \ 1]} \overset{-l_2}{[-0.2]} \quad \overset{-L_{II} = A_2 dx_I - l_3}{[-0.466]} \quad \overset{P_2}{[0.71]} \quad \overset{B_{II} = P_2^{-1} - A_2 Q_{x_I x_I} A_2^t}{[0.84028]}$$

$$\overset{F_{II} = Q_{x_I x_I} A_2^t B_{II}^{-1}}{\begin{bmatrix}0.00945\\ -0.33369\\ -0.00820\\ 0.33243\end{bmatrix}} \quad \overset{Q_{dx_{II} dx_{II}} = F_I A_2 Q_{x_I x_I}}{\begin{bmatrix}0.00008 & -0.00265 & -0.00007 & 0.00264\\ -0.00265 & 0.09356 & 0.00230 & -0.09321\\ -0.00007 & 0.00230 & 0.00006 & -0.00229\\ 0.00264 & -0.09321 & -0.00229 & 0.09286\end{bmatrix}}$$

$$dx_{II} = -FL_{II} \quad x_I \quad x_{II} \quad Q_{x_{II}x_{II}} = Q_{x_I x_I} + Q_{dx_{II}dx_{II}}$$

$$\begin{bmatrix} -0.00 \\ 0.16 \\ 0.00 \\ -0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.2579 \\ 110.3495 \\ 115.4318 \\ 121.5593 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.2579 \\ 110.3497 \\ 115.4318 \\ 121.5591 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.20540 & -0.06956 & -0.07953 & -0.05632 \\ -0.06956 & 0.29239 & -0.04806 & -0.17477 \\ -0.07953 & -0.04806 & 0.18712 & -0.05953 \\ -0.05632 & -0.17477 & -0.05953 & 0.29063 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} dv_1^{II} & & \overline{h}_1^{I} & & \overline{h}_1^{II} \\ \begin{bmatrix} 0.16 \\ -0.15 \\ -0.16 \\ -0.15 \\ 0.01 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 10.09160 \\ 5.08222 \\ 6.12752 \\ 21.30133 \\ 15.17381 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 10.09176 \\ 5.08206 \\ 6.12736 \\ 21.30118 \\ 15.17382 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} v_p^t P_1 v_p = 41.358 \\ L' P_2 v_2 = -0.259 \\ v^t P v = 41.099 \end{array}$$

$$v_2^{II}$$

$$[-0.78] \qquad\qquad m_0 = \pm 4.53 \text{ mm}/\sqrt{10 \text{ km}}.$$

LITERATURA

Baran, W. (1982): Same new procedures of the sequential adjustment. Proceedings of the International symposium on geodetic networks and computations, München, 258/VIII, 69—79.

Caspary, W. F. (1988): Concepts of network and deformation analysis, The University of New South Wales, Kensigton, N. S. W., Australia, Monograph 11.

Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja — prvi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin — New York.

Linkwitz, K. (1968): Über die nachträgliche Berücksichtigung von Beobachtungen bei der Ausgleichung von Vermittelnden Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 11, 430—439.

Mikhail,E.,, Ackermann, F. (1976): Observations and least squares, Harper & Row Publishers, New York.

Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektovanja geodetskih mreža. Naučna knjiga, Beograd.

Pelzer, H. (1985): Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung II. Konrad Wittwer, Stuttgart.

Rožić, N. (1991): Priloog izjednačenju geodetskih mreža posebnih namjena. Magistarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Rožić, N. (1992): Izjednačenje geodetskih mreža s dodatnim fiktivnim mjerenjima. Geodetski list, 1—3.

Rožić, N. (1992.a): Automatska registracija i prijenost podataka mjerenja i pomoću REC-modula i uređaja WILD GIF10, Geodetski list, 4—6.

Swiatek, K. (1983): Zur sequentiellen Ausgleichung freier Netze. Allgemeine Vermessungs -Nachrichten, 10, 391—404.

Welsch, W. (1979): A review of the adjustment of free networks. Survey Review, 194, 167—180.

Wolf, H. (1968): Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn.

SEQUENTIAL ADJESTMENT OF GEODETIC NETWORKS

The paper presents the sequential adjustment procedure of geodetic networks, based on the linear Gauss-Markov model and least squares principle. A parallel analysis between the classical adjustment procedure and sequential procedure, in case of adding or subtracting some measurements with a fixed number of unknowns, is presented. In addition, examples of sequential adjustment in both cases are given.

Primljeno: 1992-03-24