UDK 517.563:512.831
Stručni članak

TRANSFORMIRANJE SINUSA I KOSINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENATA

Nada VUČETIĆ i Svetozar PETROVIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Za transformiranje sinusa i kosinusa višestrukih argumenata ili njihovih linearnih kombinacija u polinome po potencijama sinusa ili kosinusa, ili obratno, potrebno je konstruirati odgovarajuće matrice koeficijenata. U ovom radu se ukazuje na mogućnost izračunavanja elemenata tih matrica rekurzijom.

1. UVOD

»U geodeziji i kartografiji često se primjenjuju aproksimacije raznih izraza s pomoću linearnih kombinacija trigonometrijskih funkcija sinus ili kosinus višestrukih kutova« (Lapaine, 1991.b). Potreba za transformiranjem takvih linearnih kombinacija u polinome po potencijama sinusa ili kosinusa pojavljuje se najčešće pri implementaciji na računalu, obično radi povećanja numeričke efikasnosti, ali i pri teorijskim razmatranjima. Pri takvim razmatranjima još češće se pojavljuje potreba za obratnom transformacijom.

Sve navedene transformacije pregledno su dane u matričnom obliku u (Lapaine, 1991.a i 1991.b). Da bi se te transformacije i praktično primijenile, potrebno je poznavati pripadne matrice numeričkih koeficijenata. Ako se radi o višestrukim argumentima, čija je višestrukost najviše do 10, odgovarajuće numeričke vrijednosti mogu se jednostavno preuzeti iz navedenih radova. Kada se radi o većoj višestrukosti, ili primjerice o izradbi programa za računalo koji bi, ovisno o traženoj točnosti, trebao veću ili manju matricu koeficijenata, njihovo računanje može se provesti po formulama navedenim također u (Lapaine, 1991a i 1991.b). U tim se formulama elementi traženih matrica izražavaju s pomoću binomnih koeficijenata. Ako se podsjetimo da se binomni koeficijenti, osim po definiciji, mogu računati i rekurzijom (»Pascalov trokut«), jasno je da i za elemente navedenih matrica moraju također postojati neke slične rekurzije. Primjena rekurzije, umjesto eksplicitnih formula, često je pogodnija za programiranje, a u slučaju »velikih« matrica dolazi do izražaja i veća efikasnost, tj. manji broj potrebnih računskih operacija. Ovaj rad nudi odgovarajuće relacije za izračunavanje elemenata matrica transformacije rekurzijom.

* Nada Vučetić, dipl. inž., dr. Svetozar Petrović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

2. RAČUNANJE ELEMENATA MATRICA TRANSFORMACIJE REKURZIJOM

Ograničit ćemo se na sljedeće matrice:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & -20 & 0 & 16 \\ -1 & 0 & 18 & 0 & -48 & 0 & 32 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{1}$$

(Lapaine, 1991.a), formule (2.5) i (2.8),

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{4}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{10}{16} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{10}{32} & 0 & \frac{15}{32} & 0 & \frac{6}{32} & 0 & \frac{1}{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2}$$

(Lapaine, 1991.a), formula (4.2) i

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 16 \\ 0 & 6 & 0 & -32 & 0 & 32 \\ -1 & 0 & 24 & 0 & -80 & 0 & 64 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{3}$$

(Lapaine, 1991.b), formule (2.5) i (2.10).

Pri zapisu ovih matrica preuzeli smo iz (Lapaine, 1991.a i 1991.b) konvenciju da praznine u gornjem trokutu označuju da na tim mjestima stoje nule. Također ćemo od tamo preuzeti i (u matričnom računu neuobičajeno) notaciju po kojoj se prvi redak (odnosno stupac) nazivaju nultim. Sve naše matrice su dakle oblika

$$C_n = \begin{bmatrix} c_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{10} & c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n0} & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Budući da se u svim matricama koje nam trebaju, iznad glavne dijagonale, nalaze same nule, potrebno je dati relacije jedino za izračunavanje elemenata donjeg trokuta. To izračunavanje želimo provoditi rekurzijom, što znači da će se neki elementi matrice morati izračunati po eksplicitnim formulama (»izravno«), a svi ostali će biti izraženi s pomoću prethodno izračunanih. Pokažimo to najprije na primjeru matrice (1). Nju ćemo popunjivati redak po redak. Početni (u našoj notaciji nulti) element retka izračuna se po formuli

$$a_{i0} = 2\left(\frac{i+1}{2} - \left[\frac{i+1}{2}\right]\right)(-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]} \quad (i = 0,1, \dots, n), \tag{5}$$

gdje [x] označuje najveći cijeli broj koji je manji od x ili jednak njemu. Za ostale elemente matrice (1) vrijedi rekurzija

$$a_{ij} = 2a_{i-1,j-1} - a_{i-2,j} \qquad (i = 2, 3, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, i). \tag{6}$$

Relacija (6) nije primjenljiva na a_{11}, jer relacija

$$a_{11} = 2a_{00} - a_{-11}$$

nema smisla (budući da a_{-11} ne postoji), pa a_{11} također treba izravno zadati:

$$a_{11} = 1. \tag{7}$$

Relacije (5), (6) i (7) lako se dokažu na temelju formule (2.3) iz (Lapaine, 1991.a).

Dakako, u praktičnom programiranju relacija (5) može se zamijeniti s

$$a_{i0} = \begin{cases} 0 & \text{ako je i neparan} \\ (-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]} & \text{ako je i paran} \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \dots, n), \tag{8}$$

ili još bolje receptom:

- za neparne i uopće ne treba računati a_{i0}, jer su i onako 0,
- za parne i je a_{i0} naizmjence jednak 1 i —1.

Isto tako, pri računanju elemenata na dijagonali prema (6) izvodi se suvišna operacija oduzimanja nule, pa ih je djelotvornije računati ovako

$$a_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = 1 \\ 2a_{i-1,i-1} & \text{za } i = 2, 3, \dots, n \end{cases}, \tag{9}$$

gdje pri praktičnom programiranju $2a_{i-1,\ i-1}$ dakako treba zamijeniti s $a_{i-1,i-1} + a_{i-1,i-1}$. Svi ostali elementi retka, između početnog i dijagonalnog, računat će se primjenom rekurzije (6), a kako su svi oni elementi a_{ij} donjeg trokuta za koje je i+j neparan broj jednaki nuli, njih se uopće neće računati, što je pri programiranju lako izvedivo, jer se radi o svakom drugom elementu.

Potpuno analogno formulama (5), (6) i (7) za matricu (1), može se na temelju (2.3) iz (Lapaine, 1991.b) izvesti

$$b_{i0} = 2\left(\frac{i+1}{2} - \left[\frac{i+1}{2}\right]\right)(-1)^{\left[\frac{i+1}{2}\right]} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{10}$$

$$b_{ij} = 2b_{i-1,j-1} - b_{i-2,j} \quad (i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, i), \tag{11}$$

$$b_{11} = 2 \tag{12}$$

za matricu (3). Formule (10) i (11) potpuno su identične s (5) odnosno (6), jedino se (12) razlikuje od (7). Pri praktičnom programiranju za formule (10), (11) i (12) vrijede iste opaske kao za (5), (6) i (7).

Za matricu (2) vrijede malo drugačije relacije nego za (1) i (3). Označimo

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} a'_{00} & & & & & \\ a'_{10} & a'_{11} & & & & \\ a'_{20} & a'_{21} & a'_{22} & & & \\ a'_{30} & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n0} & a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & \ldots & a'_{nn} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Formula (4.3) iz (Lapaine, 1991.a), koja bi trebala davati elemente matrice A_n^{-1} vrijedi samo za neparne n, dok se za svaki n (paran i neparan) može napisati formula

$$\cos^n \alpha = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\alpha,$$

iz koje se lako izvede:

$$d_{i0} = \begin{cases} 0 & \text{ako je i neparan} \\ 2^{1-i}\dbinom{i}{\frac{i}{2}} & \text{ako je i paran} \end{cases} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{14}$$

$$d_{11} = 1, \tag{15}$$

$$d_{ij} = \frac{d_{i-1,j-1} + d_{i-1,j+1}}{2} \quad (i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, i), \tag{16}$$

$$a'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} d_{ij} & \text{za } j = 0, 1 \\ d_{ij} & \text{za } j = 2, 3, \ldots, n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Pri praktičnom programiranju vrijede slične opaske kao za matrice (1) i (3); elemente koji su jednaki nuli ne treba uopće računati, a elemente na dijagonali, umjesto rekurzijom (16), može se računati s pomoću

$$d_{ii}=\begin{cases}1 & \text{za } i=1\\ \frac{1}{2}d_{i-1,i-1} & \text{za } i=2,3,\ldots,n\end{cases}. \tag{18}$$

Nadalje, ako se elemente matrice A_n^{-1} želi dobiti u obliku razlomaka (a ne decimalnom), onda se njihov nastanak može opisati na sljedeći jednostavan način:

- nazivnik za nulti redak je $\frac{1}{2}$, a za svaki sljedeći dvaput veći nego za prethodni,
- brojnici su uzeti iz desne polovice Pascalova trokuta (čija je rekurzivna konstrukcija općepoznata):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

gdje središnje, »raspolovljene« članove treba tako i uzeti, tj. kao dvaput manje.

Za matrice (2.6) i (2.7) iz (Lapaine, 1991.a) odnosno (2.6) i (2.7) iz (Lapaine, 1991.b) također se mogu izvesti odgovarajuće rekurzije. Međutim, njihova primjena se ne isplati. Naime, te matrice su nastale iz matrica (2) i (3) odabirom samo neparnih ili samo parnih redaka i stupaca. Tako, primjerice, za matricu (2.7) iz (Lapaine, 1991.b):

$$F_n=\begin{bmatrix}2 & & & & & \\ -4 & 8 & & & & \\ 6 & -32 & 32 & & & \\ -8 & 80 & -192 & 128 & & \\ 10 & -160 & 672 & -1024 & 512 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}$$

vrijedi rekurzija

$$f_{ij}=4\,(f_{i-1,j-1}-f_{i-2,j-1}+f_{i-3,j-1}-\ldots f_{j-1,j-1})-f_{i-1,j}.$$

Lako se uviđa da (za dostatno veliku matricu F_n) primjena navedene rekurzije zahtijeva više računskih operacija nego konstrukcija matrice (3) i izbor njenih neparnih (sjetimo se da brojenje počinje od nultog) redaka i stupaca.

3. TRANSFORMIRANJE POLINOMA PO POTENCIJAMA SINUSA U LINEARNU KOMBINACIJU KOSINUSA I SINUSA VIŠESTRUKIH ARGUMENATA

Neka je zadana funkcija f oblika

$$f(\alpha)=c_0+c_1\sin\alpha+c_2\sin^2\alpha+\ldots+c_n\sin^n\alpha. \tag{19}$$

U (Lapaine, 1991.b) pokazano je da se ona može prevesti u oblik

$$f(\alpha) = b_0 + b_1 \sin\alpha + b_2 \cos 2\alpha + b_3 \sin 3\alpha + b_4 \cos 4\alpha + \ldots + b_n \cos n\alpha \tag{20}$$

ako je n paran, a ako je n neparan, onda uz b_n stoji sin umjesto cos. Za izražavanje koeficijenata $b_0, b_1, \ldots, b_n$ s pomoću $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nude se relacije (5.3) i (5.4) od kojih prva služi za računanje $b_1, b_3, b_5, \ldots$, a druga za b_0 b_2, $b_4, \ldots$.

Lako se uočava da se relacije (5.3) i (5.4) iz (Lapaine, 1991.b) mogu zamijeniti jednom relacijom:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & & & & & \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & & & & \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-4}{8} & 0 & \frac{1}{8} & & & \\ 0 & \frac{10}{16} & 0 & \frac{-5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & & \\ \frac{10}{32} & 0 & \frac{-15}{32} & 0 & \frac{6}{32} & 0 & \frac{-1}{32} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Potrebna matrica koeficijenata razlikuje se od matrice (2) jedino po predznacima u pojedinim stupcima. Prema tomu, konstrukcija matrice (2) rekurzijom, opisana u ovom radu, primjenljiva je i za konstrukciju matrice (21), dakako uz odgovarajuće usklađivanje predznaka, što ne predstavlja nikakav problem, jer prva dva stupca imaju pozitivne elemente, sljedeća dva negativne, i tako naizmjence.

LITERATURA

Lapaine, M. (1991. a): Transformiranje linearne kombinacije kosinusa višestrukih argumenata u polinom po potencijama kosinusa i obratno. Geodetski list, 7—9, 271—278.

Lapaine, M. (1991. b): Transformiranje linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova. Geodetski list, 10—12, 378—396.

TRANSFORMING SINES AND COSINES OF MULTIPLE ANGLES

In order to transform sines or cosines of multiple angles, or their linear combinations, into polynomials in sines or cosines, or conversely, it is necessary to construct appropriate matrices. This paper points to the possibility to compute the elements of these matrices by recursion.

Primljeno: 1992-04-13