

LOGARITAMSKO-EKSPONENCIJALNE OVISNOSTI TOČNOSTI IZOŠTRAVANJA I SREDNJE POGREŠKE VIZURNOG PRAVCA USLIJED PARALAKSE NITNOGA KRIŽA DURBINA O DULJINI VIZURE

Krsto ŠIMIČIĆ i Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAZETAK: U ovome se radu predlaže primjena logaritamsko-eksponencijalne funkcije za modeliranje ovisnosti točnosti izoštravanja, te pogreške vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure. Postupak određivanja nepoznatih parametara primjenom metode najmanjih kvadrata ilustrira se na nekoliko primjera izvedenih na osnovi provedenih opažanja teodolitima WILD T3, WILD T2 i ZEISS THEO 010A preko mora u ljetnom razdoblju.

1. UVOD

Ispitivanja ukupnih atmosferskih utjecaja, u određenim uvjetima, na točnost izoštravanja, odnosno na pogrešku vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina, prikazana su u radovima Šimičića (1987, 1989). Mjerenja su obavljena u terenskim uvjetima, na različitim udaljenostima i u različito doba dana (svakog sata od 6,00 do 20,00 sati) tijekom ljeta 1984. i 1985. godine. Opažanja su provedena po vedrom i sunčanom vremenu, bez vjetrova ili s vrlo slabim maestralom. Izmjerena temperatura zraka, u hladu, bila je:

u	6,00	8,00	10,00	12,00	16,00	18,00	20,00	sati
	20	23	27	30	29	26	25	°C

(Izlazak sunca u 6,30 sati, a zalazak u 20,30 sati po ljetnom ukaznom vremenu.)

Korišteni su teodoliti WILD T3 br. 8623, WILD T2 br. 72704 i ZEISS THEO 010A br. 301513. Opažalo se na udaljenostima od 10 m, 40 m, 100 m, 500 m, 1500 m, 4700 m i 7650 m, preko mora, na otoku Rabu. Vizurna marka za veće udaljenosti (500 m i dalje) bio je toranj Sv. Marije u Rabu, a na kraćim udaljenostima — značka tvornice WILD. Opažano je pri optimalnom položaju okulara, određenom točnijom metodom (Benčić, 1990). Izoštravanje slike mjernog objekta obavljeno je metodom najpovoljnije oštine slike (metoda A) i metodom poništavanja paralakse (metoda B).

* Doc. dr. Krsto Šimičić i mr. Miljenko Lapaine, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

Rezultati svih mjerenja predočeni su u tablicama 22 do 27 u radu (Šimičić, 1987). Ako se oni prikažu grafički u koordinatnom sustavu u ravnini tako da se na horizontalnu os nanese duljine vizura, a na vertikalnu točnosti izoštravanja ili srednje pogreške vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina, tada se za bilo koji od upotrijebljenih instrumenata dobije skup točaka koje su približno raspoređene uzduž neke logaritamske krivulje (sl. 1).



Slika 1: Prilagođivanje logaritamske i eksponencijalne funkcije

Logaritamska krivulja dosta dobro opisuje točnost izoštravanja i srednju pogrešku vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina. Međutim, u ovome će se radu pokazati da se uz malu modifikaciju i neznatno povećanje numeričkog posla, primjenom logaritamsko-eksponencijalnog modela, može dobiti bolje prilagođivanje krivulje mjerenim podacima.

2. PRILAGOĐIVANJE LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Neka su t_1, t_2, \dots, t_n zadane vrijednosti, a y_1, y_2, \dots, y_n mjerene veličine. Pretpostavlja se funkcionalna ovisnost između mjerenih veličina u općem obliku

$$y = a + b \ln(t) \quad (2.1)$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ovi nepoznati parametri procijenit će se primjenom metode najmanjih kvadrata uz pretpostavku da su sva mjerenja nekorelirana i jednake točnosti. Označi se

$$\hat{v}_i = \hat{a} + \hat{b} \ln(t_i) - y_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

te odredi a i b , tako da bude

$$\sum \hat{v}^2 = \text{minimum} \quad (2.3)$$

Nužan uvjet za postizanje minimuma (2.3) je

$$\begin{bmatrix} n & \sum \ln(t_i) \\ \sum \ln(t_i) & \sum \ln^2(t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \ln(t_i) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

odakle se dobiva

$$\hat{b} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(\ln(t_i) - \bar{l})}{\sum (\ln(t_i) - \bar{l})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{l} \quad (2.5)$$

gdje je označeno

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \quad \bar{l} = \frac{\sum \ln(t_i)}{n} \quad (2.6)$$

Nakon što se odrede procijenjeni parametri \hat{a} i \hat{b} , mogu se izračunati procijenjena odstupanja \hat{v}_i , $i=1, \dots, n$ prema relaciji (2.2), te jedinična srednja pogreška (referentna srednja pogreška) i srednje pogreške procijenjenih parametara na uobičajeni način, kako se to radi pri posrednom, odnosno parametarskom izjednačenju.

Na taj je način izveo Šimičić (1987, 1989) prilagođivanje logaritamske funkcije vrijednostima točnosti izoštavanja, te srednjim pogreškama vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa za rezultate mjerenja u 6,00 sati (tablica 33. i slike 34. i 35. u radu Šimičića (1989)).

Opisani algoritam ugrađen je i u neke programske proizvode, kao što su primjerice Family Regression (REGSS) za stolno računalo HP 9845 ili GRAPHER za IBM i njima kompatibilna osobna računala. Prema rasporedu točaka (sl. 1) može se zaključiti da bi im se relativno dobro mogla prilagoditi i odgovarajuća eksponencijalna funkcija. Međutim, primjena spomenutih komercijalnih programa dala je neuporabljive rezultate. Naime, ugrađeni modeli eksponencijalnih funkcija nisu dostatno općeniti, te se za naša daljnja istraživanja ukazala potreba za razvojem vlastitog softvera čija se matematička podloga opisuje u sljedeća dva poglavlja.

3. PRILAGOĐIVANJE EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Neka su t_1, t_2, \dots, t_n zadane vrijednosti, a y_1, y_2, \dots, y_n mjerene veličine. Pretpostavlja se funkcionalna ovisnost između zadanih vrijednosti i mjerenih veličina u općem obliku

$$y = a + b e^{qt} = a + b \exp(qt) \quad (3.1)$$

gdje su a , b i q nepoznati parametri. Ovi nepoznati parametri procijenit će se primjenom metode najmanjih kvadrata uz pretpostavku da su sva mjerenja nekorelirana i jednake točnosti. S obzirom na to da parametar q sudjeluje u (3.1) u nelinearnom obliku, privremeno se pretpostavlja da je njegova procijenjena vrijednost \hat{q} poznata. Označi se

$$\hat{v}_i = \hat{a} + \hat{b} \exp(\hat{q}t_i) - y_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

te odrede \hat{a} i \hat{b} tako da bude

$$\sum \hat{v}_i^2 = \text{minimum} \quad (3.3)$$

Nužan uvjet za postizanje minimuma (3.3) je

$$\begin{bmatrix} n & \sum \exp(\hat{q}t_i) \\ \sum \exp(\hat{q}t_i) & \sum \exp(2\hat{q}t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \exp(\hat{q}t_i) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

odakle se dobiva

$$\hat{b} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(\exp(\hat{q}t_i) - \bar{e})}{\sum (\exp(\hat{q}t_i) - \bar{e})^2} \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{e} \quad (3.5)$$

gdje se označi

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \bar{e} = \frac{\sum \exp(\hat{q}t_i)}{n} \quad (3.6)$$

Nakon što se odredi ovisnost procijenjenih parametara \hat{a} i \hat{b} o q , uvrsti se (3.5) u (3.3), te se uočava da se problem sveo na traženje minimuma jedne nelinearne funkcije. Taj se problem može riješiti primjenom neke od poznatih numeričkih metoda. Jedan aproksimativni postupak za određivanje nepoznatih parametara u modelu (3.1) tzv. indirektnom primjenom metode najmanjih kvadrata predložio je Späth (1973).

Naša ispitivanja su pokazala da se za prilagođivanje eksponencijalne funkcije vrijednostima točnosti izoštravanja, kao i srednjim pogreškama vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina za rezultate opažanja preko mora (tablice 22–24 u radu Šimičića, 1987) može uzeti za procijenjenu vrijednost parametra $\hat{q} = -0.01$.

Slika 1. je karakteristična za prilagođivanje logaritamske i eksponencijalne funkcije vrijednostima točnosti izoštravanja i srednjim pogreškama vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina. Obje se funkcije ponašaju podjednako dobro, no čini se da se još bolje rješenje nalazi negdje između njih. Stoga će se u idućem poglavlju razmotriti mogućnost prilagođivanja logaritamsko-eksponencijalnog modela.

4. PRILAGOĐIVANJE LOGARITAMSKO-EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Neka su t_1, t_2, \dots, t_n zadane vrijednosti, a y_1, y_2, \dots, y_n mjerene veličine. Pretpostavimo funkcionalnu ovisnost između zadanih vrijednosti i mjerenih veličina u općem obliku

$$y = a + b e^{qt} + c \ln(t) \quad (4.1)$$

gdje su a, b i c nepoznati, a q unaprijed poznat parametar. Nepoznati parametri procijenit će se primjenom metode najmanjih kvadrata uz pretpostavku da su sva mjerenja nekorelirana i jednake točnosti. Označimo

$$\hat{v}_i = \hat{a} + \hat{b} \exp(qt_i) + \hat{c} \ln(t_i) - y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

te odredimo \hat{a}, \hat{b} i \hat{c} tako da bude

$$\sum \hat{v}_i^2 = \text{minimum} \quad (4.3)$$

Nužan uvjet za postizanje minimuma (4.3) je

$$\begin{bmatrix} n & \sum \exp(qt_i) & \sum \ln(t_i) \\ \sum \exp(qt_i) & \sum \exp(2qt_i) & \sum \ln(t_i) \exp(qt_i) \\ \sum \ln(t_i) & \sum \ln(t_i) \exp(qt_i) & \sum \ln^2(t_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \exp(qt_i) \\ \sum y_i \ln(t_i) \end{bmatrix}$$

odakle se dobiva

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{e} - \hat{c} \bar{l} \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

gdje je označeno

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \bar{e} = \frac{\sum \exp(qt_i)}{n}, \quad \bar{l} = \frac{\sum \ln(t_i)}{n}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum \exp(qt_i) - \bar{e}^2 \\ S_{12} &= \sum (\ln(t_i) - \bar{l})(\exp(qt_i) - \bar{e}) \\ S_{22} &= \sum (\ln(t_i) - \bar{l})^2 \\ S_{13} &= \sum (y_i - \bar{y})(\exp(qt_i) - \bar{e}) \\ S_{23} &= \sum (y_i - \bar{y})(\ln(t_i) - \bar{l}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Rješavanjem linearnog sustava (4.5) dobiju se procijenjeni parametri \hat{b} i \hat{c} :

$$\hat{b} = \frac{S_{13} S_{22} - S_{23} S_{12}}{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}, \quad \hat{c} = \frac{S_{11} S_{23} - S_{13} S_{12}}{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}, \quad (4.8)$$

te zatim \hat{a} prema (4.4). Nakon što se odrede procijenjeni parametri \hat{a} , \hat{b} i \hat{c} , mogu se izračunati procijenjena odstupanja \hat{v}_i , $i=1, \dots, n$ prema relaciji (4.2), te jedinična srednja greška (referentna srednja pogreška) i srednje greške procijenjenih parametara na uobičajeni način.

5. PRIMJERI

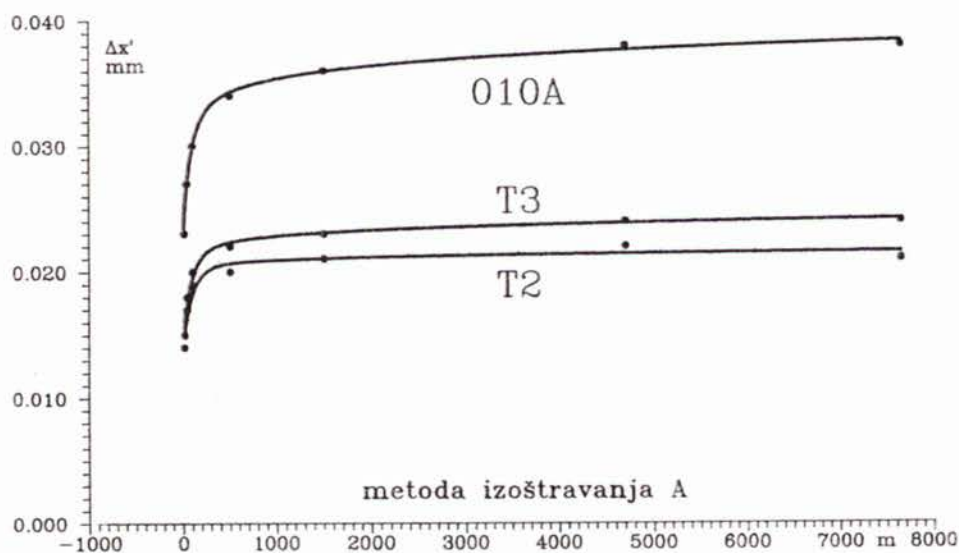
Provedena ispitivanja su pokazala da se ovisnost točnosti izoštravanja, te srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina za rezultate opažanja preko mora (tablice 22–24 u radu Šimičića (1987)) o duljini vizure može vrlo dobro opisati logaritamsko-eksponencijalnom funkcijom oblika:

$$y = a + b e^{-0.01s} + c \ln(s) \quad (5.1)$$

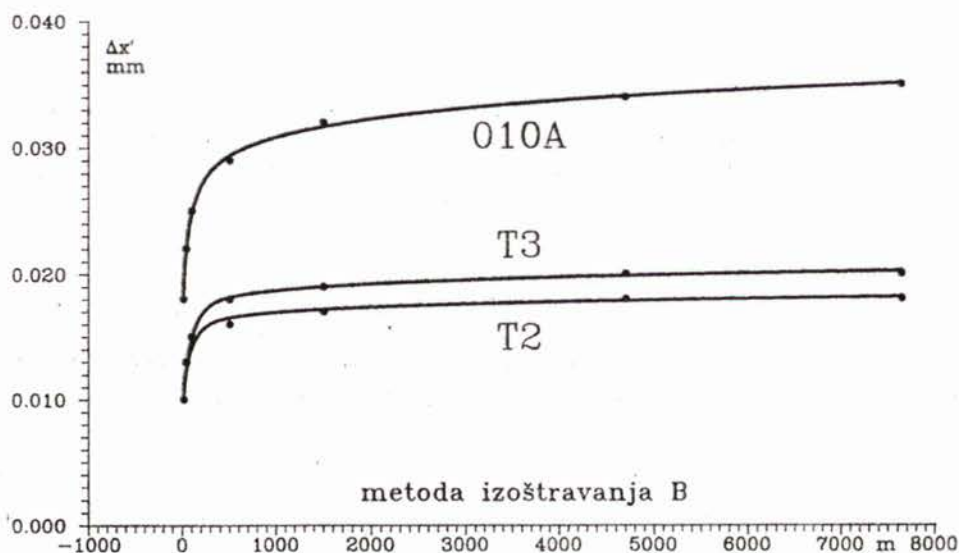
gdje s predstavlja duljinu vizure, a y točnost izoštravanja $\Delta x'$, odnosno srednju pogrešku vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina m_p .

Na slikama 2a i 2b. predočene su logaritamsko-eksponencijalne krivulje koje pokazuju ovisnost točnosti izoštravanja o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro. Prikazane su krivulje koje odgovaraju teodolitima WILD T3 br. 8623, WILD T2 br. 72704 i ZEISS THEO 010A br. 801513, za dvije metode izoštravanja. Jednadžbe prilagođenih krivulja imaju oblik:

$$\Delta x' = a + b e^{-0.01s} + c \ln(s) \quad (5.2)$$



Slika 2a: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost točnosti izoštravanja metodom A o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6 sati ujutro



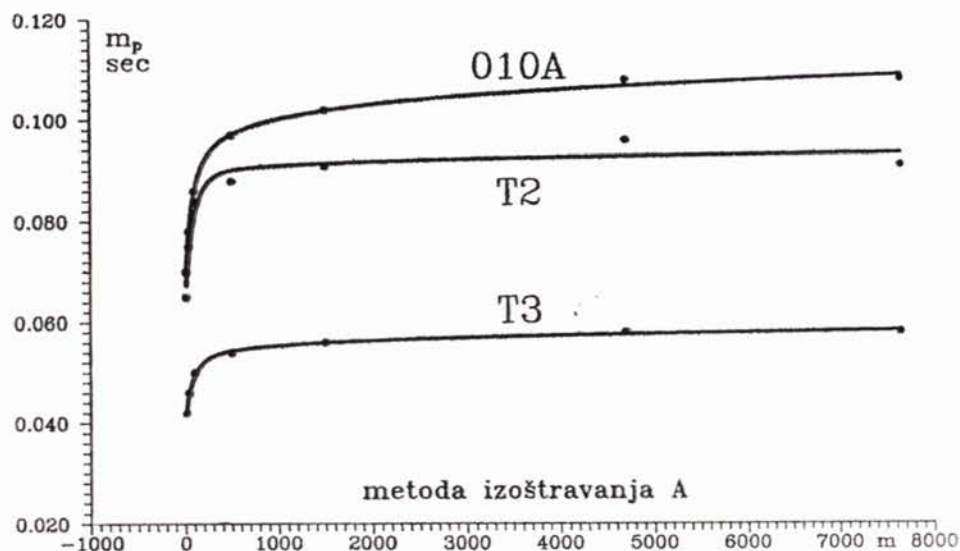
Slika 2b: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost točnosti izoštravanja metodom B o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro

dok su pripadni koeficijenti i jedinične srednje pogreške izračunani na način opisan u prethodnom poglavlju, te predočeni u tablici 1.

Na slikama 3a. i 3b. predočene su logaritamsko-eksponencijalne krivulje koje pokazuju ovisnost srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse

Tablica 1. Koeficijenti i jedinične srednje pogreške logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti točnosti izoštravanja o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro

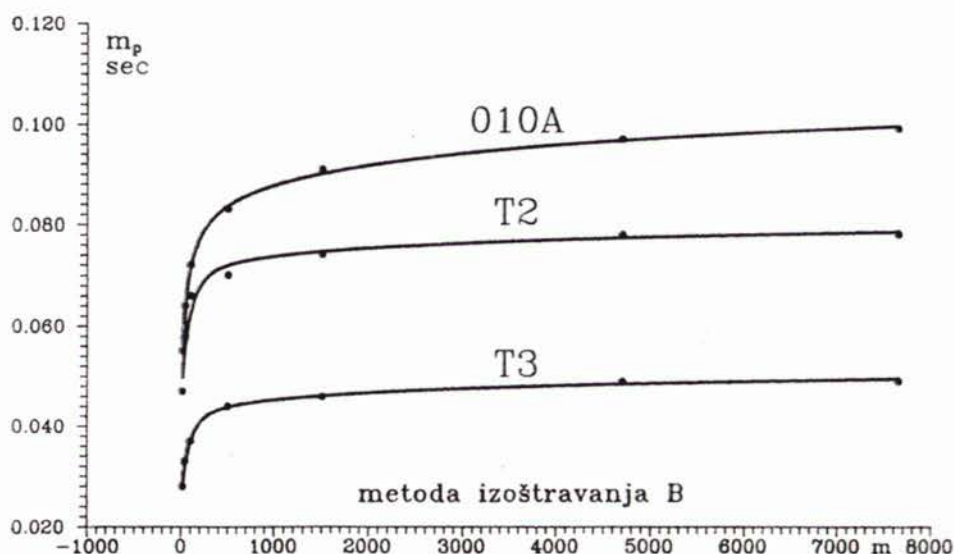
	a	b	c	m_0 (mm)
Metoda izoštravanja A				
T3	0.0182	-0.0047	0.0007	0.0005
T2	0.0186	-0.0051	0.0003	0.0008
010A	0.0251	-0.0057	0.0015	0.0004
Metoda izoštravanja B				
T3	0.0135	-0.0055	0.0007	0.0003
T2	0.0129	-0.0039	0.0006	0.0007
010A	0.0163	-0.0033	0.0021	0.0003



Slika 3a: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno vrijeme u 6,00 sati ujutro pri primjeni metode izoštravanja A

nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno vrijeme u 6,00 sati ujutro. Prikazane su krivulje koje odgovaraju teodolitima WILD T3 br. 8623, WILD T2 br. 72704 i ZEISS THEO 010A br. 801513, za dvije metode izoštravanja. Jednadžbe prilagođenih krivulja imaju oblik:

$$m_p = a + b e^{-0.01s} + c \ln(s) \quad (5.3)$$



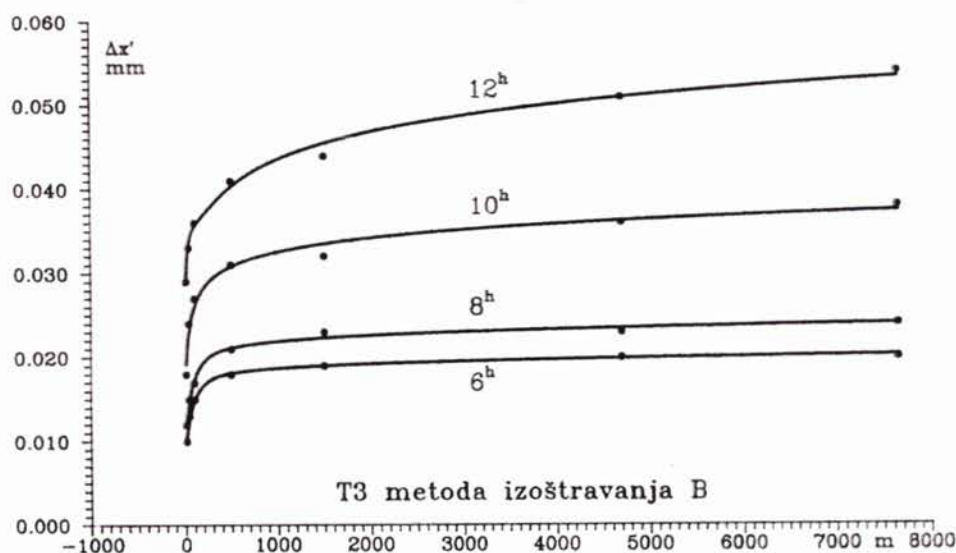
Slika 3b: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno vrijeme u 6,00 sati ujutro pri primjeni metode izoštavanja B

a pripadni koeficijenti i jedinične srednje greške izračunani su na način opisan u prethodnom poglavlju te predloženi u tablici 2.

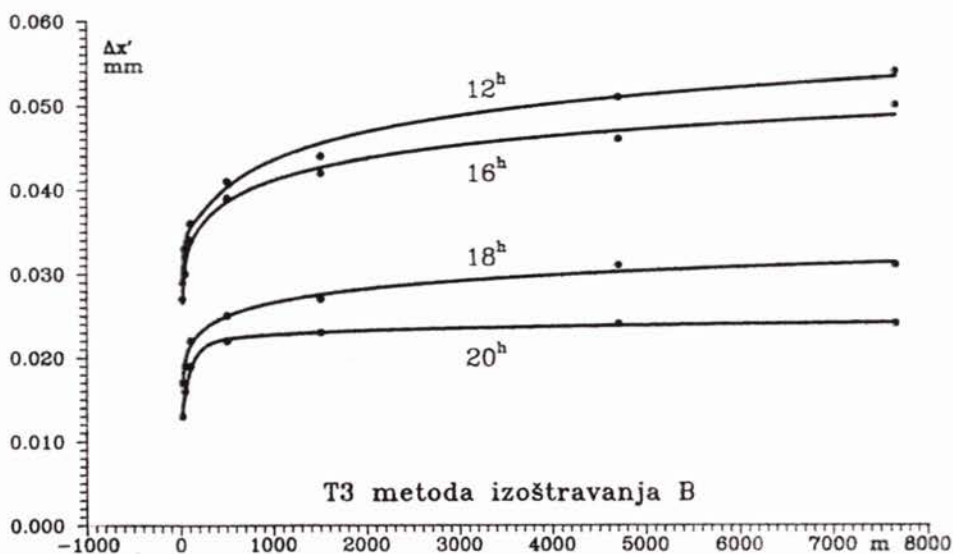
Tablica 2. Koeficijenti i jedinične srednje pogreške logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro

	a	b	c	m_0 (")
Metoda izoštavanja A				
T3	0.0457	-0.0074	0.0014	0.0004
T2	0.0834	-0.0207	0.0011	0.0030
010A	0.0708	-0.0120	0.0043	0.0008
Metoda izoštavanja B				
T3	0.0312	-0.0088	0.0020	0.0004
T2	0.0572	-0.0145	0.0024	0.0025
010A	0.0476	-0.0069	0.0058	0.0007

Na slikama 4a. i 4b. predložene su logaritamsko-eksponencijalne krivulje koje pokazuju ovisnost točnosti izoštavanja o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno doba od 6,00 sati ujutro do 20,00 sati navečer. Prikazane



Slika 4a: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost točnosti izoštravanja metodom B o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno doba od 6,00 do 12,00 sati teodolitom WILD T3



Slika 4b: Logaritamsko-eksponencijalna ovisnost točnosti izoštravanja metodom B o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetno vrijeme od 12,00 do 20,00 sati teodolitom WILD T3

su krivulje koje odgovaraju teodolitu WILD T3 br. 8623 za metodu izoštravanja B. Jednadžbe prilagođenih krivulja imaju oblik (5.1), a pripadni koeficijenti i jedinične srednje greške izračunani su na način opisan u prethodnom poglavlju te predočeni u tablici 3.

Tablica 3. Koeficijenti i jedinične srednje greške logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti točnosti izoštravanja metodom B o duljini vizure za opažanja teodolitom WILD T3 preko mora u ljetnom razdoblju tijekom dana

sat	a	b	c	m ₀ (mm)
6	0.0135	-0.0055	0.0007	0.0003
8	0.0148	-0.0057	0.0010	0.0005
10	0.0159	-0.0025	0.0024	0.0012
12	0.0105	-0.0080	0.0048	0.0010
16	0.0152	+0.0029	0.0038	0.0011
18	0.0105	+0.0009	0.0023	0.0007
20	0.0181	-0.0071	0.0007	0.0003

6. ANALIZA REZULTATA

U ovome se radu razmatraju tri modela za analitičko predočivanje ovisnosti točnosti izoštravanja i srednje pogreške vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure:

logaritamski model

$$y = a + b \ln(s), \quad (6.1)$$

eksponencijalni model

$$y = a + b e^{-0.01s} \quad (6.2)$$

i logaritamsko-eksponencijalni model

$$y = a + b e^{-0.01s} + c \ln(s) \quad (6.3)$$

Istraživanje logaritamsko-eksponencijalnog modela bilo je motivirano time što se mjereni podaci uvijek nalaze negdje »između« logaritamskog i eksponencijalnog modela (sl. 1). Iako se iz tablice 1–3 i slika 2–4 jasno vidi da se s pomoću logaritamsko-eksponencijalnog modela (6.1) mogu vrlo dobro opisati promatrane pojave, postavlja se pitanje prednosti takvog modela pred jednostavnijima, kao što su logaritamski (6.2) ili eksponencijalni (6.3).

Iz tablica 4. i 5. uočava se da je jedinična srednja pogreška, tj. srednja pogreška pojedinog opažanja redovito najmanja pri logaritamsko-eksponencijalnom modelu. Razlika među srednjim pogreškama pri prilagođivanjima logaritamske ili eksponencijalne funkcije s jedne strane i logaritamsko-eksponencijalne funkcije s druge strane jasno je izražena za instrumente WILD T3 i ZEISS THEO 010A. Za instrument WILD T2 ta je razlika manja, i to bez obzira na to radi li se o ovisnosti točnosti izoštravanja ili o zavisnosti srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina i bez obzira na primijenjenu metodu izoštravanja. Upitno je utvrđivanje značajnosti uočenih razlika.

Jedan od mogućih odgovora na to pitanje jest primjena statističkog testiranja. Kao polazna ili nulta hipoteza uzet će se pretpostavka da je jedan od koeficijenata, b ili c, u izrazu (6.3) jednak ničiti, tj.:

$$H_0 : b = 0 \quad \text{ili} \quad H_0 : c = 0, \quad (6.4)$$

Tablica 4. Jedinične srednje pogreške logaritamskog, eksponencijalnog i logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti točnosti izoštravanja o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro

m ₀ (mm)			
Model	(6.1)	(6.2)	(6.3)
Metoda izoštravanja A			
T3	0.0008	0.0008	0.0005
T2	0.0011	0.0008	0.0008
010A	0.0009	0.0015	0.0004
Metoda izoštravanja B			
T3	0.0009	0.0008	0.0003
T2	0.0008	0.0008	0.0007
010A	0.0006	0.0021	0.0003

Tablica 5. Jedinične srednje pogreške logaritamskog, eksponencijalnog i logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro

m ₀ (")			
Model	(6.1)	(6.2)	(6.3)
Metoda izoštravanja A			
T3	0.0012	0.0015	0.0004
T2	0.0042	0.0030	0.0030
010A	0.0020	0.0043	0.0008
Metoda izoštravanja B			
T3	0.0014	0.0021	0.0004
T2	0.0031	0.0033	0.0025
010A	0.0012	0.0059	0.0007

dok će alternativna hipoteza biti

$$H_1 : b \neq 0, \text{ odnosno } H_1 : c \neq 0. \quad (6.5)$$

Veličine koje se testiraju su (vidi npr. Koch, 1980):

$$T_b = \hat{b}^2 / \hat{m}_b^2, \quad \text{odnosno} \quad T_c = \hat{c}^2 / \hat{m}_c^2 \quad (6.6)$$

dok se o prihvaćanju ili odbacivanju nulte hipoteze odlučuje na uobičajeni način, na temelju usporedbe izračunane vrijednosti T i tablične $F(1, n-3)$ uz izabranu razinu pouzdanosti α . Procijenjeni parametri \hat{b} i \hat{c} dani su izrazima (4.8), a lako se može pokazati da su njihove srednje pogreške \hat{m}_b i \hat{m}_c određene s:

$$\hat{m}_b^2 = \hat{m}_0^2 \frac{S_{22}}{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}, \quad \hat{m}_c^2 = \hat{m}_0^2 \frac{S_{11}}{S_{11} S_{22} - S_{12}^2} \quad (6.7)$$

gdje su S_{11} , S_{12} i S_{22} dani relacijama (4.7).

Tablica 6. Procijenjene srednje pogreške parametara b i c logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti točnosti izoštravanja o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro i veličine za testiranje T_b i T_c

	\hat{m}_b	\hat{m}_c	T_b	T_c
Metoda izoštravanja A				
T3	0.0013	0.0002	12.1	10.7
T2	0.0023	0.0004	4.8	0.9
010A	0.0011	0.0002	27.4	81.1
Metoda izoštravanja B				
T3	0.0008	0.0001	42.9	35.0
T2	0.0020	0.0003	3.7	3.7
010A	0.0009	0.0001	14.7	262.6

U statističkim tablicama za F-razdiobu može se pročitati da je $F(1,4)=7.71$ uz razinu pouzdanosti $\alpha=0.05$. Iz podataka u tablicama 6. i 7. zaključuje se da se za instrumente WILD T3 i ZEISS THEO 010A, i to bez obzira na to radi li se o ovisnosti točnosti izoštravanja ili o ovisnosti srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina i bez obzira na primijenjenu metodu izoštravanja, ne može prihvatiti nulta hipoteza, tj. parametri b i c u logaritamsko-eksponencijalnom modelu nisu beznačajni.

Nasuprot tomu, za instrument WILD T2 nulta hipoteza nije oborena. To znači da se na temelju provedenog testiranja za ovaj instrument ne može tvrditi da je logaritamsko-eksponencijalni model bitno bolji od logaritamskog ili eksponencijalnog. S obzirom na to da su za ovaj instrument prilagođivanja za sva tri modela nešto lošija nego za druga dva instrumenta (tablice 4 i 5), može se zaključiti da je preostao jedan mali sistematski utjecaj koji primijenjeni modeli ne obuhvaćaju. Pronalaženje primjerenijeg modela za instrument WILD T2 mogao bi biti predmet budućih istraživanja.

Tablica 7. Procijenjene srednje pogreške parametara b i c logaritamsko-eksponencijalnog modela ovisnosti srednjih pogrešaka vizurnog pravca uslijed paralakse nitnoga križa durbina o duljini vizure za opažanja preko mora u ljetnom razdoblju u 6,00 sati ujutro i veličine za testiranje T_b i T_c

	\hat{m}_b	\hat{m}_c	T_b	T_c
Metoda izoštavanja A				
T3	0.0013	0.0002	33.4	53.7
T2	0.0089	0.0014	5.4	0.7
010A	0.0023	0.0004	26.9	146.7
Metoda izoštavanja B				
T3	0.0012	0.0002	50.9	118.7
T2	0.0072	0.0011	4.0	4.7
010A	0.0020	0.0003	11.6	355.6

LITERATURA

- Benčić, D. (1990): Geodetski instrumenti. Školska knjiga, Zagreb.
- Koch, K. H. (1980): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn.
- Späth, H. (1973): Algorithmen für elementare Ausgleichsmodelle. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien.
- Šimičić, K. (1987): Prilog ispitivanjima funkcije durbina geodetskih instrumenata. Disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.
- Šimičić, K. (1989): Točnost izoštavanja i srednja pogreška vizurnog pravca uslijed paralakse nitnog križa durbina u različitim uvjetima mjerenja na terenu. Geodetski list, 1–3, 1989, 13–22.

LOGARITHMIC-EXPONENTIAL DEPENDENCES OF THE ACCURACY OF FOCUSING AND OF THE MEAN SQUARE ERROR OF CROSS-HAIRS PARALLAXE ON THE VISUAL AXIS LENGTH

An application of logarithmic-exponential function for representing the dependence of the accuracy of focussing and of the mean square error of cross-hairs parallaxe on the visual axis length is proposed. The least squares method for the determination of unknown parameters is illustrated on the basis of the performed measurements with WILD T3, WILD T2 and ZEISS THEO 010A theodolites over the sea in the summer time.