

KOMBINACIJA TERESTRIČKIH MJERENJA I MJERENJA S POMOĆU SATELITA

Bojan STOPAR — Ljubljana*

SAZETAK: U članku su prikazane mogućnosti kombiniranja klasičnih geodetskih mjerenja s mjerenjima s pomoću satelita. Predočen je kratak pregled afine transformacije koordinatnih sustava. Prikazan je pregled triju osnovnih mogućnosti: trodimenzionalne, dvodimenzionalne i jednodimenzionalne kombinacije klasičnih i satelitskih podataka. Dan je rezultat izjednačenja mikromreže Dobravica izmjerene na klasičan način i GPS opažanjima. Prikazan je i rezultat terestrički i s pomoću GPS satelita opažane mikromreže Dobravica.

1. UVOD

U posljednjim godinama pojavile su se trodimenzionalne satelitske tehnike za navigaciju, koje su našle široku uporabu i u geodeziji (Transit, Global Positioning System). Pojavom tih tehnika postala je aktualna i primjena transformacija položaja točaka iz geocentričnih satelitskih koordinatnih sustava u nacionalne koordinatne sustave, koji nisu geocentrični.

Problem — kako kombinirati satelitska (GPS) opažanja s klasičnim geodetskim mjerenjima sastoji se od dvaju različitih problema. Stoga i traži dva različita rješenja:

- prvo rješenje je određivanje najboljih mogućih vrijednosti sedam vanjskih transformacijskih parametara između satelitskog i državnoga koordinatnog sustava,
- drugo rješenje je određivanje najbolje unutarnje kombinacije obaju koordinatnih sustava, što znači smanjenje popravaka koordinata na najmanju moguću vrijednost.

Sa stohastičkih razloga, rješenje koje jamči najbolje vrijednosti vanjskih transformacijskih parametara nije i rješenje koje jamči najbolju moguću kombinaciju obaju koordinatnih sustava. Stoga se oba rješenja moraju rabiti usporedno. Prvo rješenje traži kompletno trodimenzionalno rješenje s geoidnim undulacijama, odnosno ortometrijskim visinama, a drugo rješenje moglo bi se najbolje obaviti u dvije dimenzije, bez uporabe visina. Na taj

* Mr. Bojan Stopar, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, Jamova 2.

način nesigurnost visina ne bi mogla utjecati na zbroj kvadrata popravaka. Teorijska opravdanost takvog postupka zajamčena je time što vanjski parametri (mjerilo, translacije i rotacije koordinatnog sustava) ne utječu na unutarnji oblik mreže (Wolf, 1982).

2. TRANSFORMACIJE KOORDINATNIH SUSTAVA

Pojavom tehnika određivanja položaja s pomoću satelita i primjenom tih tehnika na mnogim područjima gdje je potrebna trodimenzionalna informacija, transformacija trodimenzionalnih koordinata postat će jedan od najčešćih zadataka.

Postoji više transformacija među referentnim koordinatnim sustavima. Najčešće se upotrebljavaju Molodensky-Badekasova i Burša-Wolfova transformacija. Obje su transformacije jednako vrijedne, a razlikuju se jedino u točki oko koje se izvodi transformacija koordinatnih sustava. Obje su affine transformacije, u kojima se transformiraju pravci u pravce i zadržava uspoorednost pravaca. Kod affine transformacije mreže pojavljuje se promjena veličine, oblika, položaja i orijentacije mreže.

Pri velikim mrežama, s mnogo zajedničkih točaka u oba koordinatna sustava, pojavljuju se često i lokalne promjene mjerila, koje su funkcija položaja. Takva transformacija je mnogo kompliciranija od obične affine transformacije i jako smanjuje broj prekobrojnih točaka. Osim toga, potrebno je u takvoj mreži veoma pažljivo eliminirati sve lokalne distorzije i sustavne greške u mreži.

Transformacija u koje je faktor mjerila jednak u svim pravcima naziva se Helmertova transformacija. U ove transformacije kutovi se ne mijenjaju. Mijenjaju se duljine i položaji točaka u mreži.

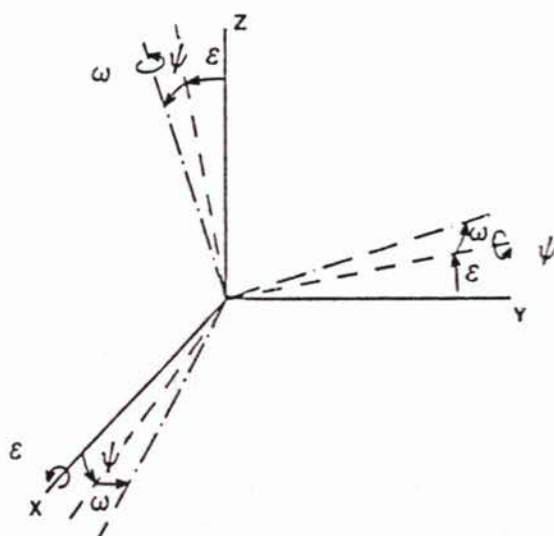
Uopćena afina transformacija, za male kutove rotacija, može se prikazati relacijom:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 + \Delta) \begin{pmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

gdje su R_x , R_y , R_z (mali) kutovi rotacije oko osi X, Y i Z. X, Y i Z su koordinate točke koja se transformira, $(1 + \Delta)$ je promjena mjerila TX, TY i TZ su translacije koordinatnog sustava XYZ u odnosu na koordinatni sustav xyz. Postupak transformacije je iterativan. Sustav jednadžbi (2.1), u slučaju malih rotacija, gotovo je linearan i obično je dostatna jedna iteracija, a u slučaju slabih približnih vrijednosti transformacijskih parametara konvergira jako brzo.

2.1. Matrice rotacije

Postupak rotiranja koordinatnih sustava može se izvesti na više načina. Najčešće se upotrebljava niz kardanskih rotacija, koji je predstavljen proizvodom kardanskih matrica rotacije $R = R_z(\omega)$, $R_y(\psi)$, $R_x(\epsilon)$. Kardanske rotacije predočene su na slici 1.



Slika 1. Transformacija koordinata

Kardanske matrice rotacije oko osi X, Y i Z dane su izrazima:

$$R_Z(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_Y(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{pmatrix}$$

$$R_X(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Općenito, redosljed rotacija nije komutativan. Redosljed rotacija je bitan, ali se pri malim kutovima rotacija, umjesto proizvoda triju kardanskih matrica rotacije može uvesti matrica koja ima oblik:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \delta\omega & -\delta\Psi \\ -\delta\omega & 1 & \delta\varepsilon \\ \delta\Psi & -\delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Općenito se ta matrica može primijeniti za kutove rotacije do veličine 3". Kutovi rotacija mogu biti i veći pri duljinama koje su male u odnosu na polumjer Zemlje (Harvey, 1986).

2.2. Matrice kovarijanci

U izjednačenju mora biti kao funkcionalni model pravilno definiran i stohastički model. Zna se da matrica kovarijanci može ne predstavljati stvarne ocjene točnosti, ali može biti dobro približenje.

Pri transformaciji stohastičkog modela može pomoći zakon o prirastu grešaka. Taj je zakon izveden iz funkcionalnog modela, jer stvarni model prirasta grešaka nije poznat.

Matrica kofaktora transformiranih koordinata je:

$$Q_T = J Q_0 J^T \quad (2.4)$$

gdje je Q_T matrica kofaktora transformiranih koordinata, Q_0 matrica kofaktora originalnih koordinata i J Jakobijeva matrica.

3. KOMBINACIJA MREŽA IZMJERENIH NA KLASIČAN NAČIN I S POMOCU SATELITA

Mreže izmjerene na klasičan način i s pomoću satelita mogu se kombinirati na različite načine. Kombinacija satelitskih i terestričkih opažanja ovisi o terestričkim podacima, kojima se raspolaže. Kao što je već spomenuto, zbog nedostatno točnog poznavanja geoidne undulacije, optimalna kombinacija je u 2D.

3.1. Kombiniranje klasično izmjerene i satelitske mreže u 3D

Za računanje koordinata točaka, izmjerenih terestrički u 3D koordinatnom sustavu moraju biti na raspolaganju svi terestrički podaci, koji se odnose na referentni elipsoid. Moraju postojati horizontalni kutovi ili pravci, zenitne udaljenosti, koso mjerene duljine, nivelirane visinske razlike i geoidne visine iznad referentnog elipsoida. GPS opažanja u suštini su trodimenzionalna tako da nisu potrebne nikakve dodatne informacije.

Prije zajedničkog izjednačenja (transformacije u koordinatni sustav terestričke mreže) obje se mreže izjednačuju, sa svim raspoloživim opažanjima, kao jednostavne mreže. Nakon što se ustanovi da u mrežama nema grubih grešaka, može se obaviti zajedničko izjednačenje.

Matematički model za kombinirano izjednačenje obje mreže u 3D može se napisati (Welsch, 1986):

$${}_T\mathbf{X} + {}_T\mathbf{v} - ({}_S\mathbf{X} + \mathbf{s}\mathbf{v}) + \mathbf{G}\mathbf{p} = 0 \quad (3.1)$$

odnosno

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{d} = 0 \quad (3.2)$$

gdje su ${}_T\mathbf{X}$ koordinate točaka terestrički izmjerene mreže, ${}_S\mathbf{X}$ koordinate točaka GPS mreže, \mathbf{G} je matrica koeficijenata transformacijskih parametara, a \mathbf{p} vektor transformacijskih parametara:

$$\mathbf{p} = [T_X, T_Y, T_Z, \epsilon, \Psi, \omega, \Delta] \quad (3.3)$$

Matrica \mathbf{A} , vektori \mathbf{v} i \mathbf{d} imaju oblik:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & [0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v} = [{}_T V_{x_1}, {}_T V_{y_1}, {}_T V_{z_1}, {}_S V_{x_1}, {}_S V_{y_1}, {}_S V_{z_1}, \cdot] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{d} = [{}_T X - {}_S X, {}_T Y - {}_S Y, {}_T Z - {}_S Z, \cdot] \quad (3.6)$$

Za postupak kombiniranog izjednačenja ulazni podaci su izjednačene vrijednosti koordinata točaka, u oba koordinatna sustava, s danim matricama kofaktora za svaku točku. Zajednička matrica kofaktora za pojedinu točku je veličine 6×6 :

$$Q = \begin{pmatrix} rQ & 0 \\ 0 & sQ \end{pmatrix} = W^{-1} \quad (3.7)$$

Ako koordinate u pojedinim koordinatnim sustavima nisu korelirane, matrica kofaktora je dijagonalna matrica:

$$Q = \text{diag} [r^2s_x, r^2s_y, r^2s_z, s^2s_x, s^2s_y, s^2s_z] \quad (3.8)$$

Srednja greška jedinice težine je:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}}{r}} \quad (3.9)$$

gdje je $r = n - u = \text{broj zajedničkih točaka} \times 3 - 7$.

Matrice kofaktora su:

$$Q_c = AQA^T \Rightarrow W_c = Q_c^{-1} \quad (3.10)$$

$$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \quad (3.11)$$

$$Q_{vv} = QA^T W_c A Q - QA^T W_c G_{\Delta\Delta} G^T W_c A Q \quad (3.12)$$

$$Q_{TT} = Q - Q_{vv} \quad (3.13)$$

Srednja greška transformacijskih parametara je:

$$m_{\Delta\Delta} = m_0 \sqrt{q_{\Delta\Delta i}} \quad (3.14)$$

Rezultat izjednačenja je transformacija GPS koordinata iz WGS-84 u državni geodetski koordinatni sustav s matricom kofaktora, odnosno matricom težina:

$$Q_x = r+sQ, P_x = Q_x^{-1} \quad (3.15)$$

Lako se može uočiti da su težine zajedničko izjednačenih koordinata izravno zbrojene težine koordinata u pojedinim koordinatnim sustavima.

3.2. Kombiniranje klasično izmjerene i satelitske mreže u 2D

Iako je GPS sustav po svojoj prirodi trodimenzionalan, optimalna kombinacija GPS opažanja s klasičnim opažanjima može se postići zajedničkim izjednačenjem u 2D. Pri terestričkim opažanjima pojavljuju se lokalne, sistemske i slučajne greške geoidne undulacije (ako se uopće poznaje njezina vrijednost). Stoga je želja da se izbjegne njezina uporaba u izjednačenju.

Tražene 2D GPS koordinate mogu se dobiti eliminacijom parametra visine. Dvodimenzionalne GPS koordinate mogu se dobiti jedino transformacijom 3D koordinata u 2D referentni sustav. Glavna prednost rješenja u 2D je u tomu što postoji dobro definiran referentni XY koordinatni sustav (državni Gauß-Krügerov koordinatni sustav). Pri transformaciji u 2D koordinatni

sustav teškoća je u tomu što su GPS opažanja međusobno (funkcionalno i stohastički) jako korelirana. Pri eliminiranju parametra visine gubi se znatan dio informacije.

Osnovica za transformaciju 3D koordinata u 2D predstavljaju u 3D izjednačene koordinate GPS opažanja, kao samostalne mreže. Na taj se način dobiju koordinate pojedinih točaka mreže s odgovarajućom matricom kovarijanci koordinata točaka mreže.

Postupak transformacije 3D koordinata u 2D koordinatni sustav je sljedeći:

1. Pravokutne izjednačene geodetske koordinate (u, v, w) točaka GPS mreže, transformiraju se u elipsoidne geodetske koordinate (L, B, h) . Transformira se i odgovarajuća matrica kofaktora.

2. Eliminira se parametar visine. U uporabi su dva postupka (Wolf, 1982):

— algebarska eliminacija parametra visine iz elipsoidnih geodetskih koordinata (L, B, h) i

— geometrijska eliminacija parametra visine.

Kvalitetnije rješenje jest algebarska eliminacija, jer se tako ne gubi dio informacije. Algebarska eliminacija obavlja se eliminacijom parametra visine iz normalnih jednadžbi trodimenzionalnih rješenja. Ta se eliminacija može izvesti Gaušovim algoritmom za rješenje sustava linearnih jednadžbi.

Geometrijska eliminacija visine za pojedinu točku obavi se jednostavno izostavljanjem parametra visine iz elipsoidnih geodetskih koordinata (L, B, h) u (L, B) .

3. Elipsoidne geografske koordinate $(L, B)_{\text{WGS-84}}$ mogu se transformirati u Gauß-Kruegerove koordinate $(x, y)_{\text{WGS-84}}$ na elipsoidu WGS-84.

4. Ravninskom transformacijom mogu se Gauß-Kruegerove koordinate $(x, y)_{\text{BESS}}$. Ta se transformacija obavlja s pomoću poznatih koordinata točaka u oba koordinatna sustava.

Ovaj postupak nije bez teškoća. Osobito je teško odrediti transformacijske parametre stohastičkog dijela informacije.

Dalje je postupak zajedničkog izjednačenja terestričkih i GPS opažanja jednak postupku pri zajedničkom izjednačenju u 3D.

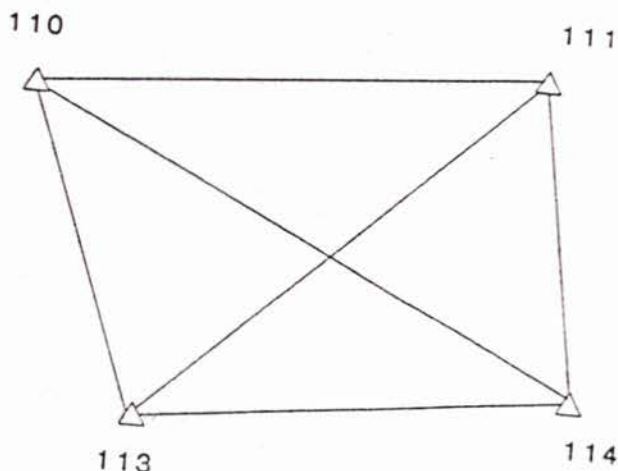
3.3. Jednodimenzionalno kombiniranje klasično izmjerene i satelitske mreže

Jednodimenzionalno uspoređivanje terestričkih i GPS opažanja može poslužiti jedino kao pomoć u kontroli visinskih mreža. S obzirom na relativno veliku točnost GPS opažanja, što je neovisno o duljinama, mogu se GPS opažanja koristiti i za neovisnu kontrolu i približnu ocjenu točnosti nivelmanskih mreža. Pritom se pojavljuje problem poznavanja geoida i dobro definiranoga referentnoga koordinatnog sustava. Ipak se mogu međusobno uspoređivati visinske razlike nivelirane i određene GPS opažanjima.

4. MIKROMREŽA DOBRAVICA

Prva praktična opažanja s GPS prijamicima obavljena su u mikromreži Dobravica, u blizini Ljubljane. Mrežu čine četiri točke, koje sastavljaju geo-

detski četverokut, sa stranama duljine 1 km do 2 km (sl. 2). Točke su stabilizirane betonskim stupovima.



Slika 2. Mikromreža Dobravica

Terestrička mjerenja u mreži bila su redovita periodična mjerenja radi praćenja tektonskih pomicanja na području mikromreže. Opažanja s GPS prijamnicima bila su namijenjena prije svega testiranju prijamnika i analizi izmjerenih podataka.

4.1 Terestrička opažanja

Terestrička opažanja obavljena su vrlo pažljivo instrumentima koji svojom radnom točnošću odgovaraju za rješenje zadatka. Duljine su izmjerene obostrano daljinomjerom KERN ME 5000. Kutna opažanja bila su obavljena elektronskim teodolitom KERN E2 u šest girusa. Srednja greška kutnih opažanja iznosi $m_{\theta}'' = \pm 0.40''$, a srednja greška izmjerenih duljina $m_{\theta,dl} = \pm 0.4$ mm. Terestrička mreža bila je izjednačena kao slobodna mreža u ravnini točke 111. Rezultati izjednačenja terestričke mreže su:

Točka br.	Definitivne koordinate		Srednje pogreške	
	Y	X	mY	mX
111	10972.2030	10407.7430	.0011	.0010
114	11112.9557	9404.1454	.0011	.0010
110	9293.4956	10273.4897	.0010	.0029
113	9645.0254	9323.0632	.0013	.0023

4.2 GPS opažanja

Opažanje mreže GPS prijamnicima bilo je obavljeno u isto vrijeme kao i terestrička opažanja. Mreža je izmjerena GPS prijamnicima ASHTECH LD-XII. Izmjereni vektori izračunani su ASHTECH-ovim programskim paketom GPPS. Korištena je frekvencija L1 i broadcast efemeride.

GPS mreža je proračunana kao slobodna mreža u 3D programom FILLNET. Program ne koristi matricu kovarijanci pojedinih vektora, koje su izračunane s proračunom vektora iz GPS opažanja. Program koristi za računanje težina u program unijete željene srednje pogreške pojedinih koordinata. Za izjednačenje slobodne mreže mora se jedna od točaka fiksirati (točka 114); izjednačeni položaji ostalih točaka izračunani su relativno na fiksiranu točku. Rezultat izjednačenja slobodne GPS mreže glasi:

		LAT.	LON.	ELEV.	STD. ERRORS(m)		
1.	D114	45 56 01.31134	345 26 33.10749	528.799	0.000	0.000	0.000
2.	D110	45 56 28.78402	345 27 58.02225	499.440	0.003	0.003	0.003
3.	D113	45 55 58.13833	345 27 41.19204	564.109	0.003	0.003	0.003
4.	D111	45 56 33.75967	345 26 40.17180	490.599	0.002	0.002	0.002

4.3 Kombinacija terestričke i GPS mreže

Za kombiniranje klasične i GPS mreže moraju se obje mreže transformirati u zajednički referentni koordinatni sustav. Kao zajednički koordinatni sustav izabran je lokalni koordinatni sustav terestričke mreže. Nakon geometrijske eliminacije elementa visine iz geodetskih (elipsoidnih) koordinata (B, L, h) u (B, L) te su koordinate točaka GPS mreže transformirane u Gauß-Kruegerov koordinatni sustav na elipsoidu WGS-84. Tako dobivene koordinate u ravnini transformirane su u koordinatni sustav terestričke mreže. Dobili smo:

Točka	Izjednačene vrijednosti koordinata		Srednje greške izjednačenih koordinata	
br.	Y	X	mYP	mXP
111	10972.1997	10407.7427	0.00081	0.00074
114	11112.9537	9404.1466	0.00081	0.00074
110	9293.4949	10273.4878	0.00075	0.00191
113	9645.0261	9323.0599	0.00095	0.00155

Transformacijski parametri			
ALFA(gon)	MJERILO	TY	TX
-0.371812	0.99999092	12.6081	-21.7576

Srednje greške transformacijskih parametara			
mALFA(gon)	mMJERILO	mTY	mTX
0.00007588	1.302 ppm	0.11698	0.10668

Budući da je riječ o slobodnoj mreži, transformacijski parametri nemaju posebno značenje. Zanimljivo je jedino mjerilo. Uočava se da su duljine dobivene GPS opažanjima veće od duljina u terestričkoj mreži.

Uz dodatni tip opažanja (GPS opažanjima) može se neovisno ocijeniti mjerilo u pojedinom koordinatnom sustavu. Srednje greške zajedno izjednačenih koordinata manje su od srednjih grešaka u pojedinim mrežama. To je posljedica toga što su težine zajedno izjednačenih koordinata izravno zbrojene težine koordinata u pojedinim koordinatnim sustavima.

Usporedba terestričkih i s pomoću GPS opažanja dobivenih visinskih razlika predočena je u tablici 1.

Tablica 1. Usporedba klasičnih i GPS visinskih razlika

Visinska razlika među točaka	Elipsoidne visinske razlike Δh	Terestričke visinske razlike ΔH	Razlike Δ ($\Delta h - \Delta H$)
110-113	64.669	64.6504	-0.0186
110-111	8.841	8.8225	-0.0185
114-111	38.200	38.1980	-0.0020
113-114	35.310	35.2821	-0.0279
113-111	73.510	73.4826	-0.0274

Uočava se da su (kao i duljine) i visinske razlike izračunane iz elipsoidnih visina točaka dobivenih GPS opažanjima veće od terestrički određenih visinskih razlika. To ukazuje na prisutnost sistematskih pogrešaka. Objašnjenje je u rasporedu GPS opažanja. Opažano je, kako je već rečeno, šest dana zaredom, u isto doba, što znači i pri (skoro) istim položajima satelita. Opažanjima u različitim dijelovima dana i pri različitim konstalacijama satelita dobili bi se sigurno manje homogeni rezultati, ali zato otklonile i moguće i očevidne sistematske pogreške u opažanjima.

LITERATURA

- Harvey, B. R. (1986): Transformation of 3D Co-ordinates. The Australian Surveyor, June 1986, Vol. 33, No. 2, 248–263.
- Steed J. (1990): A Practical Approach to Transformation Between Commonly Used Reference Systems. The Australian Surveyor, September 1990, Vol. 35, No. 3, 105–125.
- Welsch W. M. (1986): Problems of Accuracies in Combined Terrestrial and Satellite Control Network, Bulletin Geodesique, Vol. 60, 193–203.
- Wolf H. (1982): Stochastic Aspects in Combined Doppler and Triangulation Nets, Bulletin Geodesique, Vol. 56, 63–69.

COMBINATION OF TERRESTRIAL AND SATELLITE AIDED MEASUREMENTS

Possibilities of combination satellite aided network observations with terrestrial measurements are presented. Affine transformation of coordinate systems is briefly described. Three basic possibilities of combination satellite aided observations with terrestrial observations are given. Results of adjustment terrestrial measurements, satellite aided measurements and combined adjustment of terrestrial and satellite aided observations is given at the network Dobravica.