UDK 528.33:528.022.088.3
Pregledni članak

ISPITIVANJE PRIMJENE FERREROVE FORMULE ZA OCJENU VANJSKE TOČNOSTI MREŽE U KOJOJ SU MJERENI PRAVCI GIRUSNOM METODOM

Brankica CIGROVSKI-DETELIĆ — Zagreb*

SAŽETAK: Ispitivan je utjecaj algebarske korelacije na točnost računanja srednje pogreške po Ferrerovoj formuli, za mrežu u kojoj su pravci mjereni girusnom metodom. Utvrđeno je da zanemarivanje korelacije, između nesuglasica u zatvaranju trokuta i mjerenih pravaca, značajno mijenja vrijednost srednje greške, uz razinu signifikantnosti $\alpha = 0.05$. Ferrerova formula pritom ne daje strogo, već približno rješenje, pa ocjenu točnosti koreliranih mjerenja treba računati po strogom postupku, tj. rješenjem figurnih uvjetnih jednadžbi uz uvjet Σ vv = minimum. Uz razinu signifikantnosti $\alpha = 0.01$, Ferrerova formula daje zadovoljavajuću točnost, odnosno u tom se slučaju smije zanemariti utjecaj algebarske korelacije na točnost primjene ove formule.

1. UVOD

Kao što je poznato, za sve preciznije geodetske radove potrebno je ocijeniti točnost mjerenih veličina prije izjednačenja. Za kutna mjerenja u triangulacijskim mrežama viših redova potrebno je, osim stajališnih izjednačenja kojima se ocjenjuje preciznost mjerenja, odrediti i vanjsku točnost, i to na temelju nesuglasica u zatvaranju trokuta. Ta se točnost određuje po poznatoj Ferrerovoj formuli, bez obzira na metodu mjerenja kutnih veličina u mreži.

1.1. *Ferrerova formula*

Ferrerova formula prema Čubraniću (1974), glasi:

$$m_{F_1} = \sqrt{\frac{w^T w}{6n}} \tag{1}$$

$$m_{F_2} = \sqrt{\frac{w^T w}{3n}} \tag{2}$$

* Mr. Brankica Cigrovski-Detelić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26.

U formulama (1) i (2) m_{F1} označuje srednju pogrešku mjerenog pravca, m_{F2} srednju pogrešku mjerenoga kuta, w vektor nesuglasica u zatvaranju trokuta i n broj trokutova u mreži. Prema Pravilniku (1951) (čl. 87), srednje pogreške mjerenog pravca, odnosno kuta moraju se računati po formulama (1) i (2) za sve mreže koje sadrže deset ili više trokutova.

Iz oblika Ferrerove formule vidljivo je da za njenu ispravnu primjenu nesuglasice w u zatvaranju trokuta moraju biti međusobno neovisne veličine. Samo u tom slučaju formula je u skladu s teorijom najmanjih kvadrata. To će prema Čubraniću (1970) biti slučaj u triangulaciji I. reda, gdje se kutovi mjere Schreiberovom metodom i u gradskim trigonometrijskim mrežama gdje se kutovi mjere metodom zatvaranja horizonta, ako se uzimaju u obzir neizjednačeni kutovi na stajalištu. Izjednačeni kutovi postaju, naime, korelirane veličine.

Pravci mjereni girusnom metodom ostaju, prema Čubraniću (1970), i nakon stajališnog izjednačenja algebarski nekorelirane veličine, ali se kutovi potrebni za račun nesuglasica, određuju razlikom odgovarajućih pravaca, pa postaju (algebarski) korelirane veličine. Ferrerova formula u tom slučaju više ne daje strogo rješenje. Srednju kvadratnu pogrešku mjerenog pravca treba u tom slučaju računati po strogoj formuli, uzimajući u obzir korelaciju između nesuglasica i pravaca mjerenih girusnom metodom. Isto tako, po strogoj formuli treba računati ocjenu točnosti ako se nesuglasice određuju iz izjednačenih kutova mjerenih metodom zatvaranja horizonta, uzimajući u obzir korelaciju izjednačenih i mjerenih kutova.

Budući da je u radu analizirana točnost dijela triangulacijske mreže II. reda Republike Hrvatske (B. Cigrovski-Detelić, 1989. i 1991), u kojoj su pravci mjereni girusnom metodom, podrobnije će se razmotriti samo taj slučaj.

2. STROGA FORMULA ZA ODREĐIVANJE SREDNJE POGREŠKE MJERENOG PRAVCA IZ NESUGLASICA U ZATVARANJU TROKUTA, AKO SU PRAVCI MJERENI GIRUSNOM METODOM

Kao što je već napomenuto, za strogo rješenje problema potrebno je uzeti u obzir korelaciju između nesuglasica i pravaca mjerenih girusnom metodom, te srednju kvadratnu pogrešku mjerenog pravca m_s (prema Mihailoviću, 1969) računati po formuli:

$$m_s = \sqrt{\frac{w^T Q_w^{-1} w}{n}} \tag{3}$$

gdje je n broj trokutova, a Q_w korelacijska matrica kojom je definirana ovisnost nesuglasica w i pravaca mjerenih girusnom metodom.

Kutna odstupanja u trokutu w_i određuju se kao funkcije mjerenih veličina po formuli:

$$w_i = \Sigma \beta_i - (180^\circ + \varepsilon_i) \tag{4}$$

U formuli (4) ε_i je sferni eksces, a kutovi β_i su korelirane veličine mjerenih pravaca α_i, tj. pojedini kutovi β_i određuju se razlikom odgovarajućih mjerenih pravaca α_i. Ako se korelacija kutova β_i i mjerenih pravaca α_i izrazi korelacijskom matricom $Q_{\alpha,\beta}$, onda se korelacijska matrica Q_w nesuglasica w_i i mjerenih pravaca α_i može izraziti u obliku:

$$Q_w = A_\beta^T Q_{\alpha,\beta} A_\beta = A_\alpha^T Q A_\alpha = A_\alpha^T A_\alpha = N \tag{5}$$

gdje je A_β matrica figurnih uvjetnih jednadžbi pri izjednačenju po kutovima, a A_α matrica figurnih uvjetnih jednadžbi za izjednačenje po pravcima.

Nesuglasice w_i su funkcije mjerenih pravaca α_i, a korelacijska matrica Q je, za neovisno mjerene pravce, jednaka inverznoj matrici težina p^{-1} za mjerenja različite točnosti, odnosno jediničnoj matrici E za mjerenja jednake točnosti, tj:.

$$Q = p^{-1} = E \tag{6}$$

Kako su promatrana mjerenja u mreži mjerenja jednake točnosti, matrica Q bit će jednaka jedinično jmatrici E, a korelacijska matrica nesuglasica i mjerenih pravaca Q_w bit će jednaka matrici normalnih jednadžbi tj.:

$$Q_w = A_\alpha^T A_\alpha = N \tag{7}$$

Pri izjednačenju nekoreliranih mjerenja jednake točnosti metodom uvjetnih mjerenja, srednja kvadratna pogreška pojedinog mjerenja određuje se po poznatoj formuli:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{r}} \tag{8}$$

gdje je r broj uvjeta, a v vektor popravaka određen uz uvjet $v^T v$ = minimum. Ako je ocjena točnosti određena iz nesuglasica w po formuli (3), u skladu s teorijom najmanjih kvadrata, tada za mjerenja jednake točnosti mora biti zadovoljena jednakost:

$$v^T v = w^T Q_w^{-1} w$$

odnosno

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{r}} = \sqrt{\frac{w^T Q_w^{-1} w}{n}} \qquad r = n \tag{9}$$

To znači da u trigonometrijskim mrežama gdje su mjereni pravci girusnom metodom za određivanje srednje pogreške mjerenog pravca iz nesuglasica treba koristiti strogu formulu (3), a ne Ferrerovu (1) koja daje približne rezultate, jer se zanemaruje algebarska korelacija nesuglasica i mjerenih pravaca. U tom smislu formula (3) je univerzalna i uvijek primjenljiva. Ferredova formula je samo specijalan slučaj formule (3) ako su nesuglasice w međusobno neovisne veličine. Tada je Q_w = 6E odnosno:

$$Q_w^{-1} = \frac{1}{6} E \tag{10}$$

pa formula (3) prelazi u poznati oblik Ferrerove formule (1).

Za računanje srednje pogreške mjerenog pravca po strogoj formuli (3) potrebno je invertirati matricu Q_w = N. Kako je, u vrijeme kada su obavljena mjerenja u mreži, najveći problem izjednačenja većih mreža bilo upravo rješenje normalnih jednadžbi, odnosno invertiranje matrica većih formata, razumljivo je da se ocjena točnosti »a priori« nije određivala po strogoj formuli, već je i Pravilnikom (1951) propisana samo Ferrerova formula.

Da bi se utvrdilo kolika je pogreška pritom učinjena, u ovom je radu ocijenjena točnost mjerenja po formulama (1) i (3) za dio triangulacijske mreže II. reda Hrvatske (sl. 1) te analizirani dobiveni rezultati.

3. OCJENA TOČNOSTI MREŽE PO FORMULAMA (1) i (3)

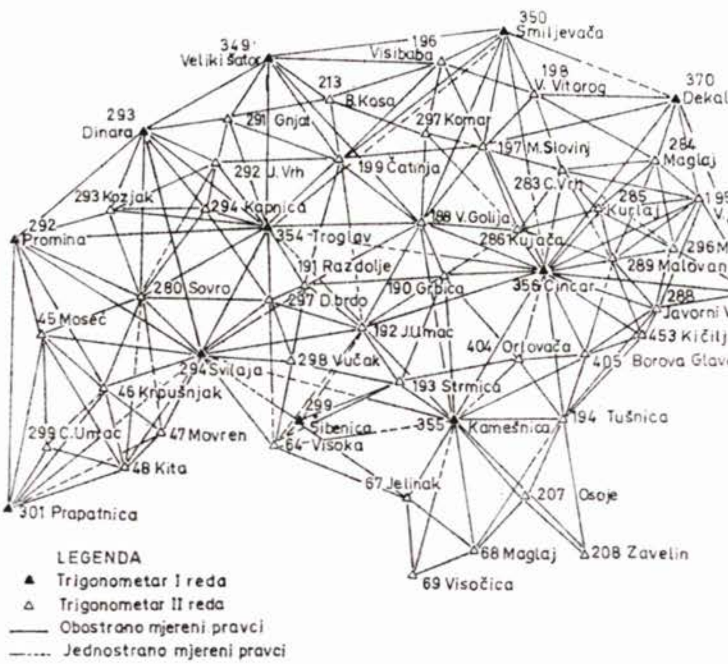
3.1. *Opis mreže*

Mreža se sastoji od 53 točke koje su međusobno povezane sa 166 obostranih pravaca (sl. 1).

Broj figurnih uvjeta će, prema Čubraniću (1974), biti:

$$f = l - P + 1, \tag{11}$$

gdje l označuje broj obostrano mjerenih pravaca, a P broj točaka u mreži. Za mrežu prikazanu na slici 1., f = 114.



Slika 1: Skica trigonometrijske mreže M 1:1 000 000

Kako bi odabir neovisnih figura za ovako veliku mrežu bio gotovo nemoguć samo na osnovi skice, postupilo se na sljedeći način:

Na temelju podataka mjerenja, primjenom posebnog programa (B. Cigrovski i dr., 1984) sastavljeni su svi mogući trokutovi u mreži, a odabir neo-

Tablica 1. Pregled nesuglasica

Broj trokuta	Točke u trokutu			Nesuglasica w (″)	Ovisne figure*
1	2			3	4
1	292P,	293D,	354T	−3.673	
2	293D	354T,	349VŠ	1.231	
3	292P,	294S,	45M	0.111	
4	294S,	45M,	48K	−2.962	
5	301P,	45M,	48K	0.471	
6	292P,	294S,	280S	1.058	
7	292P,	45M,	280S	2.154	
8	294S,	45M,	280S	−3.685	*
9	292P,	293D,	280S	1.575	
10	294S,	354T,	280S	−0.193	
11	293D,	354T,	280S	−1.340	
12	292P,	354T,	280S	3.908	*
13	293D,	349VŠ	291G	3.384	
14	293D,	354T,	291G	−1.507	
15	354T,	349VŠ,	291G	−2.464	*
16	349VŠ,	199Č,	291G	−2.427	
17	354T,	199Č,	291G	1.360	
18	349VŠ,	354T,	199G	−0.791	*
19	350S,	197MS,	199Č	3.563	
20	197MS,	188VG,	199Č	1.672	
21	197MS,	188VG,	199Č	1.760	
22	350S,	196V,	199Č	0.768	
23	349VŠ,	196V,	199Č	−1.586	
24	350S,	196V,	197MS	2.140	
25	196V,	197MS	199Č	0.770	*
26	350S,	188VG,	199Č	−4.981	
27	350S,	197MS,	188VG	−0.654	*
28	355K,	356C,	188VG	1.309	
29	355K,	188VG,	192JU	5.570	
30	356C,	188VG,	192JU	4.361	
31	356C,	188VG,	197MS	4.490	
32	356C,	370D,	197MS	−4.073	
33	356C,	370D,	195VS	4.935	
34	356C,	195VS,	288JV	1.562	
35	371R,	195VS,	288JV	−4.986	
36	356C,	194T,	288JV	−1.587	
37	371R,	288JV,	406LJ	−0.628	
38	294S,	47M,	48K	0.422	
39	292P,	293K,	280S	3.547	
40	292P,	293D,	293K	3.596	
41	293D,	280S,	293K	−3.387	*
42	293D,	292JV,	293K	3.017	
43	292JV,	293K,	294K	0.075	
44	293D,	293K,	294K	1.250	
45	293D,	292JV,	294K	4.191	*
46	280S,	293K,	294K	0.742	
47	354T,	293K,	280S	0.761	
48	354T,	293K,	294K	0.857	
49	354T,	292JV,	293K	1.426	
50	293D,	354T,	293K	3.278	*
51	199Č,	291G,	292JV	0.316	
52	354T,	199Č,	292JV	3.127	
53	355K,	192JU,	193S	1.637	
54	354T,	280S,	294K	0.446	*
55	293D,	291G,	292JV	2.720	*

Tablica 1. Pregled nesuglasica

1	2			1	4
56	354T,	291G,	292JV	5.914	*
57	354T,	292JV,	294K	2.209	*
58	354T,	294K,	297DB	0.098	
59	280S,	294K,	297DB	6.245	
60	293D,	280S,	294K	3.894	*
61	354T,	280S,	297DB	6.789	*
62	292D,	354T,	294K	3.669	*
63	293D,	354T,	292JV	2.237	*
64	354T,	191R,	297DB	5.569	
65	191R,	297DB,	298V	2.083	
66	191R,	192JU,	297DB	0.444	
67	294S,	297DB,	298V	0.846	
68	355K,	356C,	194T	1.847	
69	355K,	356C,	192JU	3.098	*
70	355K,	68M,	69V	2.221	
71	67J,	68M,	69V	2.155	
72	349VŠ,	188VG,	199Č	1.902	
73	294S,	45M,	46K	0.487	
74	294S,	46K,	48K	4.226	
75	292P,	46K,	280S	4.400	
76	45M,	46K,	280S	1.789	
77	292P,	45M,	46K	1.256	*
78	294S,	46K,	280S	3.713	*
79	45M,	46K,	48K	2.361	*
80	292P,	294S,	46K	0.700	*
81	301P,	45M,	299CU	0.822	
82	301P,	48K,	299CU	0.407	
83	45M,	48K,	299CU	−0.933	*
84	294S,	46K,	45M	−1.462	
85	46K,	47M,	46K	−1.762	*
86	294S,	354T,	297DB	−1.208	
87	294S,	192JU,	299DB	4.142	
88	354T,	191R,	199Č	−6.352	
89	188VG,	191R,	192JU	0.563	
90	354T,	188VG,	191R	−8.815	
91	355K,	190G,	192JU	−0.873	
92	355K,	190G,	188VG	−0.861	
93	355K,	190G,	193S	−1.590	
94	190G,	193S,	404O	2.538	
95	349VŠ,	213BK,	291G	−0.799	
96	188VG,	191R,	199Č	0.046	*
97	188VG,	190G,	192JU	5.582	*
98	190G,	191R,	192JU	2.918	
99	190G,	191R,	188VG	2.228	*
100	190G,	192JU,	193S	−1.000	*
101	199Č,	213BK,	291G	−0.414	
102	349VŠ,	199Č,	213BK	3.174	*
103	349VŠ,	196V,	213BK	−2.257	
104	196V,	213BK,	287K	−3.874	
105	196V,	199Č,	213BK	2.062	*
106	350S,	196V,	198VV	−0.487	
107	196V,	197MS,	198VV	5.382	
108	350S,	197MS,	198VV	2.755	*
109	370D,	198VV,	284M	−1.297	
110	198VV,	283CV,	284M	−0.520	
111	197MS,	198VV,	283CV	1.374	
112	283CV,	284M,	285K	0.635	
113	195VS,	283CV,	284M	6.238	
114	195VS,	283CV,	285K	0.494	

Tablica 1. Pregled nesuglasica

1	2			3	4
115	195VS,	284M,	285K	6.098	*
116	356C,	283CV,	285K	1.411	
117	356C,	283CV,	286K	−1.411	
118	283CV,	285K,	286K	−1.805	
119	356C,	285K,	286K	1.804	*
120	285K,	286K,	289M	−8.261	
121	356C,	286K,	289M	−0.281	
122	355K,	194T,	405BG	−6.107	
123	188VG,	197MS,	286K	3.708	
124	356C,	188VG,	286K	−1.221	*
125	195VS,	285K,	296M	2.189	
126	285K,	289M,	296M	7.237	
127	195VS,	285K,	289M	3.194	
128	195VS,	289M,	296M	3.443	*
129	284M,	285K,	289M	3.490	
130	284M,	289M,	296M	5.503	
131	284M,	285K,	296M	1.785	*
132	195VS,	284M,	296M	6.221	*
133	356C,	195VS,	285K	−3.495	
134	356C,	195VS,	289M	−4.659	*
135	356C,	288JV,	289M	7.592	
136	356C,	289M,	453K	5.610	
137	288JV,	289M,	453K	−4.527	
138	288JV,	289M,	296M	−2.230	
139	195VS,	288JV,	296M	−4.394	*
140	195VS,	288JV,	289M	−0.442	*
141	370D,	195VS,	284M	3.901	
142	370D,	197MS,	198VV	−1.021	
143	356C,	197MS,	283CV	−8.857	*
144	356C,	195VS,	283CV	−1.589	*
145	288JV,	405BG,	453K	−3.897	
146	194T,	288JV,	453K	−6.307	
147	194T,	288JV,	405BG	1.056	
148	194T,	405BG,	453K	−1.602	*
149	356C,	405BG,	453K	1.741	
150	355K,	194T,	405BG	−6.107	
151	194T,	404O,	405BG	−4.645	
152	356C,	194T,	405BG	−2.372	*
153	356C,	194T,	453K	−0.784	*
154	356C,	188VG,	190G	5.893	
155	356C,	190G,	192JU	−6.684	*
156	355K,	356C,	190G	−1.013	*
157	194T,	207O,	208Z	3.295	
158	355K,	194T,	207O	−0.778	
159	355K,	68M,	207O	0.255	
160	292P,	354T,	293K	−1.980	*
161	294S,	64V,	298V	3.730	
162	355K,	207O,	208Z	2.187	Σ*=48

$m_{(1)} = 1.34''$; $m_{(3)} = 1.65''$; $f_b = f_n = 162 - 48 = 114$

$f_b = f_n$ — formula (11)

$$F_0 = \frac{m^2_{(3)}}{m^2_{(1)}} = 1.52; \; F_{0.95} = 1.37; \; F_{0.99} = 1.55$$

$F_0 = F_{(1-\alpha)}(f_b/f_n)$ — tablica VIII. u [Pavlić (1970)], visnih na temelju kojih su određene srednje pogreške po formulama (1) i (3), proveden je zajedno s inventiranjem matrice Q_w.

Neovisne figure odabrane su slučajnim izborom. Za svaku ovisnu figuru se, pri redukciji koja se provodi u rješavanju normalnih jednadžbi, u ovom slučaju metodom Choleskog, na dijagonali pojavljuje dijeljenje s ništicom. Vrijednost nesuglasice za tu figuru ne sudjeluje u određivanju točnosti mreže, što je u tablici 1. naznačeno oznakom * (ukupno 48). Vrijednosti srednjih pogrešaka mjerenih pravaca računane su po formulama (1) i (3) samo na temelju neovisnih figura.

Broj neovisnih figura, određen na ovaj način, radi kontrole uspoređuje se s onim izračunanima po formuli (11) prema broju točaka i broju obostranih linija u mreži.

U tablici 1. je pregled svih nesuglasica i vrijednosti srednjih pogrešaka računanih po formulama (1) i (3). Vidljivo je da formule (1) i (3) ne daju identične rezultate.

U tablici 1. su oznake:

$m_{(1)}$ — srednja pogreška računana po formuli (1)
$m_{(3)}$ — srednja pogreška računana po formuli (3)
f_b — broj stupnjeva slobode u brojniku test-veličine F
f_n — broj stupnjeva slobode u nazivniku test-veličine F.

ZAKLJUČAK

Za zahtjev točnosti $\alpha = 0.05$ ($p = 0.95$) srednje kvadratne greške računane po formulama (1) i (3) signifikantno se razlikuju ($F > F_{0.95}$), pa ocjenu točnosti, u tom slučaju, treba računati po strogoj formuli (3), tj. rješenjem figurnih uvjetnih jednadžbi uz uvjet Σ vv = minimum. Utjecaj algebarske korelacije značajno mijenja vrijednost srednje pogreške računane iz nesuglasica u zatvorenim figurama, ako se mjere pravci girusnom metodom, a ta se greška računa po Ferrerovoj formuli.

Ako se za ocjenu točnosti »a priori« zadovoljavajućim smatra zahtjev točnosti $\alpha = 0.01$, onda se može smatrati da se srednje greške, računane po formulama (1) i (3), signifikantno ne razlikuju, ($F < F_{0.99}$), pa se srednja pogreška mjerenog pravca može računati po Ferrerovoj formuli.

Međutim, kako utjecaj algebarske korelacije na ocjenu očnosi mreže ima sistematski karakter, srednje kvadratne pogreške koreliranih mjerenja treba računati po formuli (3), kojom se ta koreliranost uzima u obzir.

Takvim bi zahtjevom trebalo dopuniti Pravilnik za državni premjer koji za sve metode mjerenja horizontalnih kutova danas propisuje računanje srednje kvadratne pogreške samo po Ferrerovoj formuli ako se mreža sastoji od deset ili više trokutova.

Ali, uzimajući u obzir vrijeme kada su obavljena mjerenja u mreži (većina između 1946. i 1949. godine), uvjete rada, korištene instrumente i pribor, te tadašnje (a i današnje) propise, može se smatrati da je računanje ocjene točnosti »a priori« po Ferrerovoj formuli bilo potpuno korektno i primjereno mogućnostima.

Danas, međutim, kada se koriste suvremeniji i točniji instrumenti i elektronska obrada podataka, sva računanja, uključujući i ocjenu točnosti »a priori«, valja izvoditi strogo.

LITERATURA

Cigrovski-Detelić, B. (1989): Analiza točnosti mjerenja u dijelu trigonometrijske mreže II reda Republike Hrvatske, magistarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1989.

Cigrovski, B., Lapaine M., Petrović S. (19844): Operating with a Sparse Normal Equations Matrix. Simposium: Numerical Methodes and Approximation Theory, 68—72, Niš, 1984.

Cigrovski-Detelić, B. (1991): Kritički osvrt na ocjenu točnosti mjerenja u triangulaciji 2. reda Jugoslavije, Geodetski list, 1—3; 5—13, Zagreb 1991.

Čubranić, N. (1967): Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

Čubranić, N. (1970): Korelacija u geodeziji, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1970.

Čubranić, N. (1974): Viša geodezija I. Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.

Mihailović, K. (1969): Jedan kritički osvrt na primjenu Ferrerove formule, Geodetski list, 1—3, Zagreb, 1969.

Pavlić, I. (1970): Statistička teorija i primjena. Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

Pravilnik (1951) za državni premer, I, deo, Triangulacija, Knjiga prva. Glavna geodetska uprava pri Vladi FNRJ, Jugoslavensko štamparsko preduzeće, Beograd, 1951.

APPLICATION OF FERRER'S FORMULA FOR EVALUATING THE OUTER NETWORK ACCURACY WHERE DIRECTIONS ARE MEASURED BY THE ROUND OF HORIZONTAL ANGLES

Research has been carried out on the influence of algebra correlation upon the accuracy of calculating the mean error after Ferrer's formula for the network in which the directions are measured by the round of horizontal angles. When the correlation between the discordance in the closing of the triangles and the measured directions is neglected, the value of the mean error is changed significantly, the level of the significance being $\alpha = 0.05$. The Ferrero formula in this case does not give a precise but rather an approximate solution, the accuracy of evaluating the correlated measurements thus depending on the strictness of the procedure, i.e. the solution of the figure conditional equation presuming that Σ vv = minimum. The level of significance being $\alpha=0.01$, Ferrer's formula yields a sufficient degree of accuracy, e.e. in this case the influence of algebra correlation with the accuracy of applying the formula may be neglected.

Primljeno: 1991-12-11