UDK 528.91:528.235
Pregledni članak

KONFORMNO PRESLIKAVANJE ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU I OBRATNO PRIMJENOM TRIGONOMETRIJSKIH REDOVA

Nedjeljko FRANČULA, Damjan JOVIČIĆ, Blanka ŽARINAC-FRANČULA i Miljenko LAPAINE — Zagreb*

SAŽETAK: U radu se istražuje primjena trigonometrijskih redova za određivanje geografske širine pri konformnom preslikavanju sfere na rotacijski elipsoid i rotacijskog elipsoida na sferu. Umjesto uobičajene primjene redova trigonometrijske funkcije sinus višestrukih kutova predlažu se odgavarajući redovi potencija funkcije sinus dvostrukoga kuta.

1. UVOD

Kartografske projekcije mogu se definirati kao izravna preslikavanja elipsoida u ravninu ili kao dvostruka preslikavanja, kada se najprije elipsoid preslika na sferu, a zatim ona u ravninu. U mnogim je slučajevima način dvostrukog preslikavanja jednostavniji i djelotvorniji i sa stajališta postizanja minimalnih deformacija projekcije i s obzirom na ekonomičnost rada i vremena (Vahrameeva i dr. 1986).

U ovome se radu razmatra konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida na sferu. Izvodi se osnovna relacija koja povezuje geografske širine na sferi i rotacijskom elipsoidu pri konformnom preslikavanju. Posebna pažnja poklanja se numeričkim određivanjima geografskih širina radi što djelotvornije primjene računala. Pritom se poznati razvoji u redove trigonometrijske funkcije sinus višestrukih kutova zamjenjuju odgovarajućim redovima potencija funkcije sinus dvostrukoga kuta.

2. GEOGRAFSKA PARAMETRIZACIJA SFERE

Sfera u $\mathbb{R}^3$ polumjera $R>0$ sa središtem u ishodištu je skup:

$$\mathscr{S} = \{(X, Y, Z) : X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2\}.$$

* Prof. dr. Nedjeljko Frančula, mr. Damjan Jovičić, mr. Blanka Žarinac-Frančula, mr. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

Neka je $\omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $r : \omega \to \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama:

$$X = R \cos\varphi \cos\lambda, \qquad Y = R \cos\varphi \sin\lambda, \qquad Z = R \sin\varphi. \tag{2.1}$$

Tada je

$$r' = \begin{bmatrix} X_\varphi & X_\lambda \\ Y_\varphi & Y_\lambda \\ Z_\varphi & Z_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\sin\varphi\cos\lambda & -R\cos\varphi\sin\lambda \\ -R\sin\varphi\sin\lambda & R\cos\varphi\cos\lambda \\ R\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$e = X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2 = R^2, \qquad f = X_\varphi X_\lambda + Y_\varphi Y_\lambda + Z_\varphi Z_\lambda = 0.$$

$$g = X_\lambda^2 + Y_\lambda^2 + Z_\lambda^2 = R^2 \cos^2\varphi, \tag{2.3}$$

$$ds^2 = e\,d\varphi^2 + 2f\,d\varphi\,d\lambda + g\,d\lambda^2 = R^2\,d\varphi^2 + R^2\cos^2\varphi\,d\lambda^2. \tag{2.4}$$

Parametri φ i λ nazivaju se *geografskom širinom*, odnosno *duljinom*, parametarske φ-krivulje *meridijanima*, a λ-krivulje *paralelama*. Takva parametrizacija sfere $\mathscr{S}$ pomoću mreže meridijana i paralela najčešće se koristi u geodeziji i kartografiji.

3. GEOGRAFSKA PARAMETRIZACIJA ROTACIJSKOG ELIPSOIDA

Rotacijski elipsod u $\mathbb{R}^3$ sa središtem u ishodištu i poluosima a i b je skup

$$\mathscr{E} = \{(X, Y, Z) : X^2/a^2 + Y^2/a^2 + Z^2/b^2 = 1\}.$$

Neka je $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i $R : \Omega \to \mathbb{R}^3, R(\Phi, \Lambda) = (X, Y, Z)$ preslikavanje zadano s:

$$X = N\cos\Phi\cos\Lambda, \quad Y = N\cos\Phi\sin\Lambda, \quad Z = \frac{b^2}{a^2} N \sin\Phi, \tag{3.1}$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\Phi + b^2\sin^2\Phi}}. \tag{3.2}$$

Parametri Φ i Λ nazivaju se *geografskom širinom*, odnosno *duljinom*, a formulama (3.1) definirana je parametrizacija rotacijskog elipsoida $\mathscr{E}$. Parametarske Φ-krivulje nazivaju se *meridijanima*, a Λ-krivulje *paralelama* na elipsoidu. Funkcija N definirana s (3.2) naziva se *polumjerom zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu*. Nadalje,

$$R' = \begin{bmatrix} X_\Phi & X_\Lambda \\ Y_\Phi & Y_\Lambda \\ Z_\Phi & Z_\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M\sin\Phi\cos\Lambda & -N\cos\Phi\sin\Lambda \\ -M\sin\Phi\sin\Lambda & N\cos\Phi\cos\Lambda \\ M\cos\Phi & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$M = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2\cos^2\Phi + b^2\sin^2\Phi)^3}}. \tag{3.4}$$

$$E = X_\Phi^2 + Y_\Phi^2 + Z_\Phi^2 = M^2, \quad F = X_\Phi X_\Lambda + Y_\Phi Y_\Lambda + Z_\Phi Z_\Lambda = 0,$$

$$G = X_\Lambda^2 + Y_\Lambda^2 + Z_\Lambda^2 = N^2 \cos^2 \Phi, \tag{3.5}$$

$$dS^2 = E d\Phi^2 + 2F d\Phi\, d\Lambda + G d\Lambda^2 = M^2 d\Phi^2 + N^2 \cos^2 \Phi d\Lambda^2. \tag{3.6}$$

Funkcija M definirana s (3.4) naziva se *polumjerom zakrivljenosti meridijana.*

4. KONFORMNO PRESLIKAVANJE IZMEĐU ROTACIJSKOG ELIPSOIDA I SFERE

Neka je $\omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$ i preslikavanje $r : \omega \to \mathbb{R}^3$, $r(\varphi, \lambda) = (X, Y, Z)$ zadano formulama (2.1) geografska parametrizacija sfere $\mathscr{S}$. Neka je $\Omega = \omega$ i preslikavanje $R : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $R(\Phi, \Lambda) = (X, Y, Z)$ zadano s (3.1) parametrizacija rotacijskog elipsoida $\mathscr{E}$.

Želimo definirati konformno preslikavanje k sa sfere $\mathscr{S}$ na elipsoid $\mathscr{E}$. Da bi preslikavanje k bilo konformno, nužno je i dovoljno da lokalno mjerilo duljina uzduž paralela

$$\mu = \frac{ds}{dS} = \frac{R d\varphi}{M d\Phi} \tag{4.1}$$

bude jednako lokalnom mjerilu duljina uzduž meridijana

$$\mu = \frac{ds}{dS} = \frac{R \cos\varphi\, d\lambda}{N \cos\Phi\, d\Lambda}. \tag{4.2}$$

Pretpostavimo li da preslikavanje $k : \mathscr{S} \to \mathscr{E}$ ima svojstvo

$$\lambda = \Lambda, \tag{4.3}$$

tada se na osnovi relacija (4.1) i (4.2) može napisati izraz:

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{M d\Phi}{N \cos\Phi} \tag{4.4}$$

koji predstavlja vezu između geografskih širina φ i Φ pri konformnom preslikavanju sfere na elipsoid. Očevidno je da se dobiva sasvim jednaka relacija i pri konformnom preslikavanju elipsoida na sferu uz pretpostavku (4.3). Ako se u relaciju (4.4) uvrste vrijednosti funkcija M i N definiranih s (3.4) i (3.2) dobiva se:

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b^2 d\Phi}{(a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi) \cos\Phi}. \tag{4.5}$$

Uz uobičajenu oznaku

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2, \tag{4.6}$$

relacija (4.5) može se transformirati u

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(1 - e^2)\, d\Phi}{(1 - e^2 \sin^2 \Phi) \cos\Phi}, \tag{4.7}$$

što nakon integriranja daje

$$ln\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=ln\text{tg}\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)+\frac{e}{2}\,ln\,\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\sin\Phi}+ln\,\text{C}. \tag{4.8}$$

Postavimo li dodatni uvjet da se ekvator elipsoida preslika u ekvator sfere, tj.

$$\varphi=0 \Leftrightarrow \Phi=0, \tag{4.9}$$

proizlazi da mora biti $ln\text{C}=0$, tj. integracijska konstanta $\text{C}=1$. Uz ovaj uvjet, izraz (4.8) prelazi u

$$ln\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=ln\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)+\frac{e}{2}\,ln\,\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\sin\Phi}, \tag{4.10}$$

odnosno nakon antilogaritmiranja:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\sin\Phi}\right)^{\frac{e}{2}}. \tag{4.11}$$

5. KONFORMNO PRESLIKAVANJE ROTACIJSKOG ELIPSOIDA NA SFERU

Za poznatu geografsku širinu Φ na elipsoidu, geografska širina φ na sferi može se izračunati iz izraza koji se jednostavno dobije iz (4.11):

$$\varphi=2\text{arctg}\left[\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\,\text{sio}\,\Phi}\right)^{\frac{e}{2}}\right]-\frac{\pi}{2}. \tag{5.1}$$

Da bi se pojednostavilo računanje, Adams (1921) je razvojem u red dobio izraz oblika:

$$\varphi=\Phi+b_2\sin 2\Phi+b_4\sin 4\Phi+b_6\sin 6\Phi+b_8\sin 8\Phi+\ldots \tag{5.2}$$

gdje su koeficijenti b_i određeni prema:

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{5}{24}e^4+\frac{3}{32}e^6+\frac{281}{5760}e^8+\ldots\right)\\
b_4 &= \frac{5}{48}e^4+\frac{7}{80}e^6+\frac{697}{11520}e^8+\ldots\\
b_6 &\ldots -\left(\frac{13}{480}e^6+\frac{461}{13440}e^8+\ldots\right)\\
b_8 &= \frac{1237}{161280}e^8+\ldots
\end{aligned} \tag{5.3}$$

(također Kavrajskij 1958, Snyder 1987). Međutim, primjena izraza u obliku linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija sinusa višestrukih kutova (5.2) imala je prednost pred drugačijim zapisima nekada, u doba logaritamskih tablica. Danas se pri radu s računalom prednost daje zapisu u obliku polinoma:

$$b_2 \sin 2\Phi + b_4 \sin 4\Phi + b_6 \sin 6\Phi + b_8 \sin 8\Phi =$$
$$= \sin 2\Phi\,(c_1 + c_2 \cos 2\Phi + c_3 \cos^2 2\Phi + c^4 \cos^3 2\Phi), \qquad (5.4)$$

gdje se novi koeficijenti c_i mogu izraziti pomoću b_i na slijedeći način (Snyder 1987, Lapaine 1991):

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = -\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{15}e^6 + \frac{73}{5040}e^8 + \ldots\right) \\
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{5}{24}e^4 + \frac{7}{40}e^6 + \frac{607}{6720}e^8 + \ldots \\
c_3 &= 4b_6 = -\left(\frac{13}{120}e^6 + \frac{461}{3360}e^8 + \ldots\right) \\
c_4 &= 8b_8 = \frac{1237}{20160}e^8 + \ldots
\end{aligned} \qquad (5.5)$$

Naposljetku, izraz (5.4) treba modificirati na poznati način, tako da se potenciranja zamijene množenjima te je konačno:

$$\varphi = \Phi + \sin 2\Phi\,(c_1 + \cos 2\Phi\,(c_2 + \cos 2\Phi\,(c_3 + c_4 \cos 2\Phi))) + \ldots \qquad (5.6)$$

Na taj se način izbjegava višestruko pozivanje trigonometrijskih funkcija i time ubrzava izvođenje, odnosno skraćuje vrijeme računanja.

6. KONFORMNO PRESLIKAVANJE SFERE NA ROTACIJSKI ELIPSOID

Za poznatu geografsku širinu φ na sferi, iz izraza (4.11) ne može se izravno izračunati odgovarajuća geografski širina Φ na elipsoidu. Adams (1921) je razvojem u red dobio izraz oblika:

$$\Phi = \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi + \ldots \qquad (6.1)$$

gdje su koeficijenti b_i određeni prema:

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8 + \ldots \\
b_4 &= \frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11520}e^8 + \ldots \\
b_6 &= \frac{7}{120}e^6 + \frac{81}{1120}e^8 + \ldots \\
b_8 &= \frac{4279}{161280}e^8 + \ldots
\end{aligned} \qquad (6.2)$$

(također Kavrajskij 1958, Snyder 1987). Međutim, kao što je već spomenuto, primjena izraza u obliku linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija sinusa višestrukih kutova (6.1) imala je prednost pred drugačijim zapisima u doba logaritamskih tablica. Pri radu s računalom prednost se daje zapisu u obliku polinoma:

$$b_2 \sin 2\varphi + b_4 \sin 4\varphi + b_6 \sin 6\varphi + b_8 \sin 8\varphi =$$
$$= \sin 2\varphi \, (c_1 + c_2 \cos 2\varphi + c_3 \cos^2 2\varphi + c_4 \cos^3 2\varphi), \tag{6.3}$$

gdje se novi koeficijenti c_i mogu izraziti pomoću b_i na slijedeći način (vidi Snyder 1987, Lapaine 1991):

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_6 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{40}e^6 - \frac{73}{2016}e^8 + \ldots \\ c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{7}{24}e^4 + \frac{29}{120}e^6 + \frac{233}{6720}e^8 + \ldots \\ c_3 &= 4b_6 = \frac{7}{30}e^6 + \frac{81}{280}e^8 + \ldots \\ c_4 &= 8b_8 = \frac{4279}{20160}e^8 + \ldots \end{aligned} \tag{6.4}$$

Za praktičnu primjenu pomoću računala, izraz (6.3) treba modificirati tako da se potenciranje zamijene množenjima, tj. konačna je formula oblika:

$$\Phi = \varphi + \sin 2\varphi \, (c_1 + \cos 2\varphi \, (c_2 + \cos 2\varphi \, (c_3 + c_4 \cos 2\varphi))) + \ldots \tag{6.5}$$

7. OVISNOST TOČNOSTI ODREĐIVANJA GEOGRAFSKE ŠIRINE NA ELIPSOIDU I SFERI PRI KONFORMNOM PRESLIKAVANJU O BROJU ČLANOVA REDA

Ako se geografska širina φ na sferi računa primjenom formula (5.2) ili (5.6), ili geografska širina na elipsoidu po izrazima (6.1), odnosno (6.5), pojavljuju se neizbježne pogreške koje nastaju zanemarivanjem nenapisanih članova reda. Zbog dobro izražene konvergencije, ta se pogreška može procijeniti na osnovi veličine prvoga zanemarenog člana. S obzirom na to da je on u oba izraza (5.2) i (6.1) reda veličine e^{10}, učinjena će pogreška pri primjeni formula (5.2), (5.6), (6.1) ili (6.5) za Besselov elipsoid biti sigurno manja od

$$e^{10} \approx 10^{-11} \approx 8^\circ \cdot 10^{-10} \approx 3'' \cdot 10^{-6}. \tag{7.1}$$

Za točniju procjenu trebalo bi poznavati i koeficijente uz članove s e^{10}.

Ako je za konkretnu primjenu ova točnost prevelika, mogu se u izrazima (5.2), odnosno (6.1), zanemariti odgovarajući članovi i time povećati učinkovitost računanja. Ukoliko pak procijenjena točnost ne bi bila zadovoljavajuća, bit će potrebno izvesti izraze za slijedeće članove redova ili postupiti na neki drugi način (vidi npr. Lapaine 1992).

8. PRIKAZ KOEFICIJENATA U REDOVIMA POMOĆU TREĆE SPLJOŠTENOSTI

U geodetskoj se literaturi vrlo često susreću redovi trigonometrijskih funkcija. Koeficijenti u tim redovima su beskonačni redovi potencija. Gotovo redovito ti se koeficijenti zapisuju u obliku beskonačnih redova potencija ekscentriciteta e ili e'. Međutim, prije više od stotinu godina Helmert (1880) je uočio da se isti koeficijenti mogu prikazati i u obliku beskonačnih redova potencija raznih drugih parametara, ovisno o kojima spomenuti redovi konvergiraju brže ili sporije.

Posebno prikladnom pokazala se primjena parametra n koji se naziva treća spljoštenost, a definira kao

$$n = \frac{a - b}{a + b}, \tag{8.1}$$

gdje su a i b poluosi rotacijskog elipsoida. Pomoću treće spljoštenosti n, Krüger (1912) je dao i prikaz koeficijenata b_i koji se pojavljuju u izrazu (5.2) pri konformnom preslikavanju rotacijskog elipsoida na sferu (također König i Weise 1951):

$$\begin{aligned}
b_2 &= -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{82}{45}n^4 + \ldots \\
b_4 &= \frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 + \ldots \\
b_6 &= -\frac{26}{15}n^3 + \frac{34}{21}n^4 + \ldots \\
b_8 &= \frac{1237}{630}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Kako smo već ranije primijetili, sa stajališta djelotvornosti primjene računala, od oblika (5.2) pogodniji je zapis (5.6) čiji se koeficijenti sada mogu izraziti na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{46}{15}n^3 - \frac{1084}{315}n^4 + \ldots \\
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{10}{3}n^2 - \frac{32}{15}n^3 - \frac{376}{35}n^4 + \ldots \\
c_3 &= 4b_6 = -\frac{104}{15}n^3 + \frac{136}{21}n^4 + \ldots \\
c_4 &= 8b = \frac{4948}{315}n^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Isto tako, Krüger (1912) je pomoću treće spljoštenosti n izveo i prikaz koeficijenata b_i koji se pojavljuju u izrazu (6.1) pri konformnom preslikavanju sfere na rotacijski elipsoid (također König i Weise 1951):

$$b_2 = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
b_4 &= \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{15}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \ldots \\
b_6 &= \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 + - \\
b_8 &= \frac{4279}{630}n^4 + -
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

S obzirom na to da je sa stajališta učinkovitosti primjene računala, od oblika (6.1) pogodniji zapis (6.5), i njegove ćemo koeficijente sada izraziti pomoću treće spljoštenosti n:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_6 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{46}{15}n^3 - \frac{1084}{315}n^4 + \ldots \\
c_2 &= 2b_4 - 4b_8 = \frac{10}{3}n^2 - \frac{32}{15}n^3 - \frac{376}{35}n^4 + \ldots \\
c_3 &= 4b_6 = -\frac{104}{15}n^3 + \frac{136}{21}n^4 + \cdots \\
c_4 &= 8b_8 = \frac{4948}{315}n^4 + \ldots
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Naposljetku se može primijetiti: iako su zapisi koeficijenata b_i, odnosno c_i, u obliku redova potencija parametra n (8.2)—(8.5) nešto jednostavniji od odgovarajućih zapisa u obliku redova potencija ekscentriciteta e (5.3), (5.5), (6.2) i (6.4), sa stajališta efikasnosti računanja, ova prednost nije znatna, to više što se koeficijenti za pojedini elipsoid računaju samo jedanput.

LITERATURA

Adams, O. S. (1921): Latitude developments connected with geodesy and cartography with tables, including a table for Lambert Equal-Area Meridional projection. U.S. Coast and Geodetic Survey Spec. Pub. No. 76.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der Höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorieen. B. G. Teubner, Leipzig.

Kavrajskij, V. V. (1958): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vypusk 1, Obščaja teorija kartografičeskih proekcij. Izdanie Upravlenija načal'nika Gidrografičeskoj služby VMF.

König, R. i Weise, K. H. (1951): Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie und Kartographie, Erster Band. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. Potsdam: Veröffentlichung des Königlich Preuszischen Geodätischen Institutes, Neue Folge No. 52. B. G. Teubner, Leipzig.

Lapaine, M. (1991): Transformiranje linearne kombinacije sinusa višestrukih kutova. Geodetski list, 10—12, 1991, 387—396.

Lapaine, M. (1992): Novi algoritmi pri konformnom preslikavanju između rotacionog elipsoida i sfere. Rukopis.

Snyder, J. P. (1987): Map Projections — A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395. U. S. Government Printing Office, Washington.
Vahrameeva, L. A., Bugaevskij, L. M. i Kazakova, Z. L. (1986): Matematičeskaja kartografija. Nedra, Moskva.

CONFORMAL MAPPING OF A ROTATIONAL ELLIPSOID ONTO A SPHERE AND VICE VERSA BY USING TRIGONOMETRIC SERIES

The paper investigates the application of trigonometric series in determination of geographic latitude in conformal mapping of a rotational ellipsoid to a sphere and vice versa. In place of the usual application of sines of multiple angles, the application of series in powers of double angle sines is proposed.

Primljeno: 1991-12-09