UDK 528.33/.38:528.181
Pregledni članak

IZJEDNAČENJE GEODETSKIH MREŽA S DODATNIM FIKTIVNIM MJERENJIMA

Nevio ROŽIĆ — Zagreb*

SAŽETAK: U članku je prikazano izjednačenje geodetskih mreža pomoću Gauss-Markovoga funkcionalnog modela, tj. izjednačenja posrednih mjerenja, ali s dodatnim fiktivnim mjerenjima (pseudomjerenja). Pokazuje se da je opće rješenje izjednačenja uspješno primjenljivo pri definiranju optimalnog datuma (slobodne mreže), ali i pri definiranju različitih konvencionalnih datuma (neslobodne mreže). Izvedena je primjena općeg rješenja pri definiranju konvencionalnih datuma i istaknuta univerzalnost postupka izjednačenja pri izradi odgovarajućih programa na kompjutorima. Pokazano je da se, bez obzira na prisutnost defekta datuma, u izjednačenje ne moraju neophodno uvoditi postupci opće inverzije (pseudoinverzije), jer se isti rezultati dobivaju dosljednom primjenom postupka izjednačenja posrednih mjerenja.

1. UVOD

Primjena klasičnoga računskog postupka i nedostatak kompjutora, do početka sedamdesetih godina, nisu omogućivali definiranje datuma geodetskih mreža u sklopu izjednačenja (*Caspary 1988*). Definiranje datuma mreža uobičajeno se provodilo izvan izjednačenja, a koristilo se, zbog manjeg opsega računanja, uglavnom izjednačenje uvjetnih mjerenja ili različite približne metode izjednačenja.

Međutim, primjena matrične algebre i suvremenih kompjutora omogućili su djelotvornu upotrebu Gauss-Markovog modela za izjednačenje geodetskih mreža. Naime, funkcionalni dio (*Ninkov 1989*) ovog modela primijenjen na provedena mjerenja rezultira jednadžbama popravaka i omogućuje rješavanje problema definicije datuma. Primjenom Gauss-Markovog modela provodi se u sklopu postupka izjednačenja definiranje datuma mreža, tj. definira se odgovarajući referentni koordinatni sustav u kojem je određen položaj svih točaka mreže. Pritom je moguće, prema namjeni i problemu koji se mrežom rješava (*Yong-qi 1983*), definiranje optimalnog datuma (slobodne mreže) ili različitih konvencionalnih datuma (neslobodne mreže).

* Mr. Nevio Rožić, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26.

U primjeni ovog modela teži se izvođenju univerzalnog postupka izjednačenja koji se može efikasno koristiti bez obzira na traženu definiciju datuma mreže, koji je dobro prilagođen programiranju i obradi podataka na kompjutorima i koji slijedi postupak izjednačenja posrednih mjerenja. Iako su u suvremenoj literaturi (*Welsch 1979, Perović 1986, Caspary 1988*) poznata brojna predložena rješenja, od klasičnih do najmodernijih, može se pogodnim smatrati postupak izjednačenja posrednih mjerenja s dodatnim fiktivnim mjerenjima (tzv. pseudomjerenja).

2. DEFEKT GAUSS-MARKOVOGA FUNKCIONALNOG MODELA

Funkcionalni dio Gauss-Markovog modela, primijenjen na mjerenja koja su provedena u geodetskoj mreži, rezultira jednadžbama popravaka pri izjednačenju posrednih mjerenja. Prema *Höpcke 1980* i *Feil 1989*

$$\underset{n\times 1}{v} = \underset{n\times u}{A}\;\underset{u\times 1}{x} - \underset{n\times 1}{l}, \qquad \ldots \underset{n\times n}{P}, \tag{1}$$

gdje su:

n — broj mjerenja (pravaca, duljina ili visinskih razlika)
u — broj nepoznanica (koordinata točaka mreže)
v — vektor popravaka mjerenja
A — matrica koeficijenata jednadžbi popravaka
x — vektor nepoznanica
l — vektor prikraćenih mjerenja
P — dijagonalna matrica težina mjerenja (neovisna mjerenja).

Analiza jednadžbi popravaka, tj. matrice koeficijenata jednadžbi popravaka A, pokazuje prisutnost »defekta«. Naime, smatrajući nepoznanicama koordinate svih točaka mreže, pojavljuje se međusobna ovisnost vektora matrice A, tj. umanjenja njenog ranga

$$r = \text{rang}\, A < u. \tag{2}$$

Broj ovisnih vektora jednak je broju stupnjeva slobode gibanja mreže i matematički se izražava kao defekt d_D ove matrice, tj.

$$d_D = u - r. \tag{3}$$

Ovisnost vektora je posljedica neodređenosti datuma mreže, jer ni jedna točka mreže nije položajno definirana, tj. nije odabran odgovarajući referentni koordinatni sustav. Ovaj se defekt naziva deefktom datuma (d_D) i predstavlja tzv. vanjski defekt mreže (*Welsch 1979*). Za pojedine geodetske mreže unaprijed je poznat, jer je poznat broj stupnjeva slobode gibanja mreže ovisno o dimenzijama referentnoga koordinatnog sustava i vrsti provedenih mjerenja.

Analiza rednih vektora matrice koeficijenata jednadžbi popravaka također ukazuju na mogućnost pojave defekta. Naime, ako je broj provedenih mjerenja nedostatan za određivanje čvrste konfiguracije (geometrijske određenosti) mreže, jer provedena mjerenja ne omogućuju jednoznačno definiranje međusobnog položaja svih točaka mreže, nastaje tzv. unutarnji defekt ili defekt konfiguracije d_K. U praktičnom pogledu, defekt konfiguracije očituje se u nedostatku neophodnih prekobrojnih mjerenja ($n \leq r$). Ako je n broj neovisnih mjerenja provedenih pri izmjeri mreže, defekt konfiguracije je

$$d_K = r - n. \tag{4}$$

Zbroj defekta datuma i defekta konfiguracije određuje ukupni defekt

$$d = d_D + d_K. \tag{5}$$

Svojstva matrice koeficijenata jednadžbi popravaka, tj. utjecaj defekta datuma i konfiguracije, prenose se na svojstva normalnih jednadžbi formiranih pri izjednačenju posrednih mjerenja

$$\underset{u \times u}{N} \; \underset{u \times 1}{x} - \underset{u \times 1}{n} = 0, \tag{6}$$

gdje su:

$N = A^tP\,A$ — matrica koeficijenata normalnih jednadžbi
$n = A^tP\,l$ — vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi
x — vektor nepoznanica.

Umanjenje ranga matrice A izaziva umanjenje ranga matrice N. Kako je N kvadratna simetrična matrica, defekt redaka je jednak defektu stupaca ove matrice, tj. ukupnom defektu mreže određenom izrazom (5). Matrica N je singularna (det N=0), pa nije moguća primjena standardnih postupaka rješavanja normalnih jednadžbi, temeljenih na Cayleyevoj inverziji, kao što su npr. metode Cholesky, Gaussa i dr.

Moguća je pojava i dodatnog umanjenja ranga matrice N uslijed uvođenja singularne matrice težina mjerenja P (*Pelzer 1974, Feil 1990*).

Budući da postupci Cayleyeve inverzije ne omogućuju određivanje matrice kofaktora (invertiranje), neophodna je (*Rao i Mitra 1971, Bjerhammar 1973*), primjena opće inverzije (pseudoinverzije). Međutim, primjena opće inverzije ne slijedi neposredno iz postupka izjednačenja posrednih mjerenja, a pseudoinverzijom je određena samo definicija optimalnog datuma mreže.

Problem singularnosti matrice koeficijenata normalnih jednadžbi može se riješiti i bez upotrebe pseudoinverzije. Naime, uklanjanjem singularnosti ili uzroka nastajanja singularnosti matrice koeficijenata normalnih jednadžbi (defekt datuma i konfiguracije), provodi se njena regularizacija i omogućuje primjena Cayleyeve inverzije.

U pogledu defekta konfiguracije, rješenje se postiže na jednostavan način. Nedostatak neophodnih mjerenja otklanja se naknadnim mjerenjima ili se tijekom izmjere, prema programu mjerenja i uz odgovarajuće kontrole u radu, pronalaze grubo pogrešna mjerenja i neposredno provode po kvaliteti zadovoljavajuća mjerenja.

Situacija glede uklanjanja defekta datuma znatno je složenija ,i to iz dva razloga. Prvi je razlog u tomu što koordinate točaka mreže (nepoznanice) nisu određene provedenim mjerenjima. Drugi se razlog očituje u ovisnosti definicije datuma mreže o matematičkom postupku uklanjanja tog defekta.

Uz pretpostavku da su iz razmatranja uklonjeni defekti konfiguracije ($d=d_D$), što je realna pretpostavka, preostali se defekt mreže može (*Welsch 1979*) ukloniti uvođenjem u izjednačenje dodatnih fiktivnih mjerenja (pseudomjerenja). Broj dodatnih fiktivnih mjerenja jednak je defektu datuma mreže, te se njihovim uvođenjem matrica koeficijenata jednadžbi popravaka regularizira. Time je regularizirana i matrica N, te se mogu primijeniti standardne metode rješavanja normalnih jednadžbi, temeljene na Cayleyevoj inverziji.

3. OPĆE RJEŠENJE

Prema prethodnim objašnjenjima, pri izjednačenju se jedinstveni sustav jednadžbi popravaka (*Pelzer 1974*) sastoji od dvaju sustava. Prvi sustav odnosi se na provedena mjerenja u geodetskoj mreži, tj.

$$\underset{n\times 1}{v_A} = \underset{n\times u}{A}\ \underset{u\times 1}{x} - \underset{n\times 1}{l_A}, \qquad \ldots \underset{n\times n}{P_A}, \tag{7}$$

dok se drugi sustav jednadžbi popravaka odnosi na dodatno uvedena fiktivna mjerenja (pseudomjerenja)

$$\underset{d\times 1}{v_B} = \underset{d\times u}{B}\ \underset{u\times 1}{x} - \underset{d\times 1}{l_B}, \qquad \ldots \underset{d\times d}{P_B}, \tag{8}$$

Spajanjem sustava jednadžbi popravaka određenih izrazima (7) i (8), tj.

$$\begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} l_A \\ l_B \end{bmatrix} \qquad \ldots \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix} \tag{9}$$

uz matricu težina provedenih i fiktivnih mjerenja P_{AB}, koja je dijagonalna i regularna matrica ($\det P_{AB} \neq 0$)

$$P_{AB} = \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix}, \tag{10}$$

određene su normalne jednadžbe

$$\underset{u\times u}{N}\ \underset{u\times 1}{x} - \underset{u\times 1}{n} = 0. \tag{11}$$

Blok-matrica težina fiktivnih mjerenja P_B uvodi se kao jedinična matrica ($P_B=I$), pa je matrica koeficijenata normalnih jednadžbi

$$N = [A^t,\ B^t] \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A^t P_A A + B^t B = N_A + N_B, \tag{12}$$

a vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi

$$n = [A^t,\ B^t] \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_A \\ l_B \end{bmatrix} = A^t P_A l_A + B^t l_B = n_A + n_B. \tag{13}$$

Regularnost matrice N, što je svrha ovog postupka, ostvarena je samo uz zadovoljenje dvaju uvjeta. Neophodno je da su uvedena fiktivna mjerenja međusobno neovisna, tj. da zadovoljavaju uvjet

$$B\,B^t = I \tag{14}$$

i da su neovisna o stvarno provedenim mjerenjima

$$A\,B^t = 0. \tag{15}$$

Primjenom jedne od metoda rješavanja normalnih jednadžbi, jednostavno se pomoću Cayleyeve inverzije određuje inverzija matrice koeficijenata normalnih jednadžbi

$$Q = N^{-1} = (N_A + N_B)^{-1} \tag{16}$$

i vektor nepoznanica

$$x = Q\,(n_A + n_B). \tag{17}$$

Određivanje matrice kofaktora Q_{xx} vektora nepoznanica x postiže se primjenom zakona o prirastu kofaktora na izraz (17)

$$Q_{xx} = Q\,A^t\,P_A\,A\,Q. \tag{18}$$

Uzevši u obzir jednakost $N_A = A^t P_A A$, konačno slijedi

$$Q_{xx} = Q\,N_A\,Q. \tag{19}$$

Valja istaknuti da na prirast kofaktora ne utječe član koji odgovara fiktivnim mjerenjima, jer su fiktivna mjerenja pogodno odabrane i nepogrešne konstante.

Prikazano rješenje, izrazi (16), (17) i (19), očevidno nije određeno jednoznačno, jer neposredno ovisi o karakteru uvedenih fiktivnih mjerenja (*Stevanović 1987*). Svaki postav fiktivnih mjerenja, bez obzira na zadovoljenje uvjeta (14) i (15), neophodno uvjetuje međusobno različite vektore nepoznanica x i matrica kofaktora Q_{xx}. Različitost rješenja može se objasniti time da svaki postav fiktivnih mjerenja, uvjetovan matricom koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja B, određuje definiciju odgovarajućeg datuma. Drugim riječima, matricom koeficijenata jednadžbi popravaka B uspostavlja se među nepoznanicama takav međusobni odnos kojega je posljedica definicija odgovarajućeg datuma mreže.

4. DEFINIRANJE OPTIMALNOG DATUMA

Opće rješenje, koje je prethodno prikazano, jednostavno se primjenjuje pri određivanju optimalnog datuma mreže. Prema (*Mittermayer 1971*), ovaj se datum određuje uvođenjem dodatnog uvjeta koji moraju zadovoljiti nepoznanice u izjednačenju, tj.

$$x^t\,x = \text{minimum}. \tag{20}$$

Taj je uvjet ekvivalentan uvjetu

$$\mathrm{trag}\ Q_{xx} = \mathrm{minimum}. \tag{21}$$

kojim je, kao optimalni referentni koordinatni sustav (datum), određen onaj sustav u kojemu je položajna točnost točaka mreže najviša, razmatrajući mrežu u cjelini. Važno je istaknuti, što je dobro uočljivo na osnovi uvjeta (20), da sve točke mreže ravnopravno određuju definiciju optimalnog datuma mreže.

Neophodno je, u sklopu izjednačenja, izraziti uvjet (20) pomoću uvedenih fiktivnih mjerenja, odnosno pomoću pripadne matrice koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja B i vektora prikraćenih mjerenja l_B.

Odgovarajući oblik matrice B određuje se na temelju izraza (15) nakon množenja slijeva s matricama P_A i A^t

$$A^t P_A A B^t = 0. \tag{22}$$

Budući da je

$$N_A = A^t P_A A, \tag{23}$$

slijedi

$$N_A B^t = 0. \tag{24}$$

Tim je izrazom matrica B^t određena kao ortogonalna i ujedno neovisna o matrici A. Jedna od pogodnih ortogonalnih matrica B^t određuje se (*Mittermayer 1972, Höpcke i Krüger 1981*) rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti λ_i i svojstvenih vektora g_i (i=1, 2, ..., d) matrice N_A. Naime, matrica G koja zadovoljava jednadžbu

$$(N_A - \lambda I)\, G = 0, \tag{25}$$

sadrži one svojstvene vektore g_i koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice N_A jednakim ništici. Istodobno su vektori g_i matrice G i međusobno neovisni, te nakon normiranja na jediničnu duljinu, prema (*Caspary 1988*), radi očuvanja stabilnosti računskog procesa, zadovoljavaju uvjet

$$G^t G = I. \tag{26}$$

Na temelju izraza (24), (25) i (26) može se postaviti jednadžba

$$B^t = G, \tag{27}$$

jer ortonormirana matrica G osigurava regularnost matrice koeficijenata normalnih jednadžbi N. Određena na taj način, matrica koeficijenata fiktivnih mjerenja (pseudomjerenja) G^t istodobno zadovoljava (*Mittermayer 1972*) osnovni uvjet izjednačenja geodetske mreže određen izrazom (20), jer je $G^t x = 0$.

U praktičnom pogledu, u geodetskih se mreža matrica G uglavnom ne određuje rješavanjem problema svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora (*Illner 1983*), jer su njena struktura i oblik unaprijed poznati s obzirom na dimenzije koordinatnog sustava mreže i vrstu provedenih mjerenja. Ta je matrica istodobno jednaka matrici koeficijenata jednadžbi popravaka pri Helmertovoj transformaciji kojom se problem određivanja optimalnog datuma mreža može geometrijski interpretirati transformacijom točaka mreže iz koordinatnog sustava približnih koordinata u koordinatni sustav najvjerojatnijih vrijednosti koordinata (*Rožić 1991*).

Na temelju takvog načina određivanja matrice koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja, uz uvođenje vektora prikraćenih fiktivnih mjerenja jednakog ništici, slijedi, prema prikazanom općem rješenju, izjednačenje mreže s definicijom optimalnog datuma.

Uvođenjem izraza (27) u izraze (16), (17) i (18) slijedi inverzija regularizirane matrice koeficijenata normalnih jednadžbi

$$Q = N^{-1} = (N_A + G\,G^t)^{-1}, \tag{28}$$

rješenje normalnih jednadžbi

$$x = Q\,n = (N_A + G\,G^t)^{-1}\,n \tag{29}$$

i pripadna matrica kofaktora nepoznanica

$$Q_{xx} = Q\,A^t\,P_A\,A\,Q = Q\,N_A\,Q. \tag{30}$$

Vektor nepoznanica i matrica kofaktora zadovoljavaju uvjete (20) i (21) kojima je definiran optimalni datum mreže.

Izraz za matricu kofaktora može se, prema (*Pelzer 1974*), transformirati i u pogodniji računski oblik. Na temelju definicije inverzije može se postaviti

$$Q\,(N_A + G\,G^t) = I \tag{31}$$

te je, nakon preuređenja,

$$Q\,N_A = I - Q\,G\,G^t. \tag{32}$$

Množenjem izraza (31) zdesna s matricom G dobije se

$$Q\,G = G\,(G^t\,G)^{-1}, \tag{33}$$

a uvođenjem u izraz (32) slijedi

$$Q\,N_A = I - G\,(G\,G^t)^{-1}\,G^t. \tag{34}$$

Množenjem zdesna s matricom Q i uvođenjem transponiranog izraza (33) dobije se

$$Q\,A^t\,A\,Q = Q - G\,G^t. \tag{35}$$

Na temelju izraza (30) i prethodnog izraza, konačno slijedi matrica kofaktora nepoznanica

$$Q_{xx} = (N_A + G\,G^t)^{-1} - G\,G^t. \tag{36}$$

Ako se izraz (36) usporedi s pseudoinverzijom N_A^+ singularne matrice koeficijenata normalnih jednadžbi N_A, jasno se pokazuje identičnost rezultata ($N_A^+ = Q_{xx}$). Prema tomu, primjena najsuvremenijega matričnoga matematičkog aparata nije neophodna, to više jer prikazani postupak potpuno slijedi postupak izjednačenja posrednih mjerenja. Vektor nepoznanica x, određen pomoću matrice kofaktora Q_{xx}, tj. $x = Q_{xx} n$, jednak je vektoru nepoznanica određenom izrazom (29).

5. DEFINICIJA KONVENCIONALNIH DATUMA

Za razliku od optimalnog datuma, koji je jednoznačno određen, moguće je provesti definiciju i različitih konvencionalnih datuma. Konvencionalni datumi najčešće su određeni fiksiranjem neophodnog broja točaka mreže, odnosno najmanje onoliko koordinata točaka kolike su dimenzije koordinatnog sustava. Teorijski je broj mogućih konvencionalnih definicaja datuma neizmjeran i uvjetovan ne toliko ograničenim izborom fiksnih točaka mreže koliko različitim izborom vektora prikraćenih fiktivnih mjerenja koji kao konstante ne moraju neophodno biti jednaki nultim vektorima.

Međutim, uobičajeno je da se vektor prikraćenih mjerenja uvodi kao nulti vektor, pa se datum definira onolikim brojem koordinata točaka koliki je broj stupnjeva slobode gibanja mreže (defekt datuma).

Razmatrajući opće rješenje, neophodno je u izjednačenje uvesti takva fiktivna mjerenja koja matricom koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja B fiksiraju pojedine koordinate i uvjetuju njihovu nepromjenljivost tijekom izjednačenja. Taj se zahtjev postiže oblikovanjem matrice

$$\underset{d\times u}{B} = [\underset{d\times r}{0}, \quad \underset{d\times d}{I}], \tag{37}$$

gdje su:

d — defekt datuma

r — rang matrice koeficijenata A (r=u—d)

0 — nulta matrica (odgovara nedatumskom dijelu nepoznanica)

I — jedinična blok-matrica (odgovara datumskom dijelu nepoznanica u izjednačenju).

Analogno rastavu matrice B na blok-matrice moguć je (prema *Wolf 1972*), rastav i matrice koeficijenata jednadžbi popravaka A provedenih mjerenja. Rastav se provodi prema defektu, odnosno rangu ove matrice, tj.

$$\underset{n\times u}{A} = [\underset{n\times r}{A_1}, \quad \underset{n\times d}{A_2}]. \tag{38}$$

Na osnovi izraza (12) i dosljedno provedenog rastava na blok-matrice, uz jediničnu matricu težina fiktivnih mjerenja ($P_B = I$), slijedi matrica koeficijenata normalnih jednadžbi:

$$\underset{u\times u}{N} = A^t P_A A + B^t B = \begin{bmatrix} \underset{r\times r}{N_{11}} & \underset{r\times d}{N_{12}} \\ \underset{d\times r}{N_{21}} & \underset{d\times d}{N_{22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{r\times r}{0} & \underset{r\times d}{0} \\ \underset{d\times r}{0} & \underset{d\times d}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22}+I \end{bmatrix} \tag{39}$$

gdje su:

$$N_{11} = A_1^t P_A A_1, \quad N_{12} = N_{21}^t = A_1^t P_A A_2 \text{ i } N_{22} = A_2^t P_A A_2. \tag{40}$$

Na osnovi izraza (13) određen je i vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi n, koji u slučaju definicije konvencionalnog datuma poprima oblik

$$\underset{u\times 1}{n} = \begin{bmatrix} \underset{r\times 1}{n_1} \\ \underset{d\times 1}{n_2} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

gdje je:

$$n_1 = A_1^t P_A l_A \quad \text{i} \quad n_2 = A_2^t P_A l_A. \tag{42}$$

Matrica koeficijenata normalnih jednadžbi, određena na taj način, regularna je matrica. Regularizacija je provedena uvođenjem jedinične blok-matrice koja odgovara datumskim nepoznanicama u mreži. Cayleyeva inverzija može se odrediti (prema *Feil 1989*) primjenom Schur-Frobenijusovih relacija za invertiranje blok-matrica. Označivši inverziju matrice N s

$$Q = N^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{r\times r}{Q_{11}} & \underset{r\times d}{Q_{12}} \\ \underset{d\times r}{Q_{21}} & \underset{d\times d}{Q_{22}} \end{bmatrix}, \tag{43}$$

na osnovi tih relacija slijedi:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} ((N_{22}+I) - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} N_{21} N_{11}^{-1}, \\ Q_{12} &= Q_{21}^t = -N_{11}^{-1} N_{12} ((N_{22}+I) - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1}, \\ Q_{22} &= ((N_{22}+I) - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1}. \end{aligned} \tag{44}$$

Znatno pojednostavnjenje ovih relacija postiže se analizom ovisnosti vektora unutar matrice N. Naime, uslijed singularnosti se d posljednjih rednih vektora ove matrice mogu izraziti kao funkcije prethodnih r međusobno neovisnih redaka (*Höpcke i Krüger 1981*). Uvođenjem matrice funkcijske povezanosti $\underset{d\times r}{K}$ slijedi:

$$\underset{d\times r}{K} [\underset{r\times r}{N_{11}}, \ \underset{r\times d}{N_{12}}] = [\underset{d\times r}{N_{21}}, \ \underset{d\times d}{N_{22}}]. \tag{45}$$

Nakon množenja

$$K N_{11} = N_{21} \tag{46}$$

$$K N_{12} = N_{22}, \tag{47}$$

budući je iz izraza (46)

$$K = N_{21} N_{11}^{-1}, \tag{48}$$

određuje se matrica

$$N_{22} = N_{21} N_{11}^{-1} N_{12} \tag{49}$$

Na temelju izvedene jednakosti zadovoljena je relacija

$$N_{22} + I = N_{21} N_{11}^{-1} N_{12} + I \tag{50}$$

čijim uvođenjem u Schur-Frobenijusove relacije (44) slijedi

$$\begin{aligned} Q_{11} &= N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} N_{12} N_{21} N_{11}^{-1} \\ Q_{12} &= Q_{21}^{t} = -N_{11}^{-1} N_{12} \\ Q_{22} &= I. \end{aligned} \tag{51}$$

Prema izvedenim izrazima, inverzija matrice koeficijenata normalnih jednadžbi je:

$$Q = N^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{r \times r}{Q_{11}} & \underset{r \times d}{Q_{12}} \\ \underset{d \times r}{Q_{21}} & \underset{d \times d}{I} \end{bmatrix} \tag{52}$$

i rješenje normalnih jednadžbi

$$x = Q\, n. \tag{53}$$

Matrica kofaktora nepoznanica određena je zakonom o prirastu kofaktora prema izrazu (19), tj.

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & I \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Nakon množenja blok-matrica, uzevši u obzir izraze (49) i (51), konačno slijedi:

$$Q_{xx} = N^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

gdje je $Q_{11} = N_{11}^{-1}$, a matrice Q_{12}^{t}, Q_{21}, Q_{22} su nulte matrice.

Vektor nepoznanica ostvaren s matricom kofaktora

$$x = Q_{xx}\, n = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}\, n_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

jednak je vektoru nepoznanica određenom izrazom (53). Iz tog je rješenja jasno uočljivo da nepoznanice koje određuju datum mreže izjednačenjem ne dobivaju popravke već ostaju nepromijenjene (fiksirane).

Prikazani postupak izjednačenja geodetskih mreža s definicijama konvencionalnih datuma donekle je u nesuglasju s istovjetnim postupcima u praksi. Naime, u praksi se nikada ne uvode fiktivna mjerenja, već se izjednačenje provodi samo sa stvarno provedenim mjerenjima. Time je, a razlog je očevidan na osnovi izraza (55) i (56), u izjednačenje uveden samo sustav jednadžbi popravaka stvarno provedenih mjerenja, a sustav izvornih normalnih jednadžbi je reduciran, jer je broj normalnih jednadžbi određen samo brojem traženih r (nedatumskih), a ne svih nepoznanica u mreži u. Valja istaknuti i to da pri definiciji konvencionalnih datuma treba razlikovati dva znakovita slučaja: slučaj kada je datum određen minimalnim brojem parametara datuma (izjednačenje bez prisile), tj. broj parametara datuma odgovara defektu datuma mreže i slučaj kada je broj parametara datuma veći od defekta datuma (izjednačenje s prisilom).

Takav pristup olakšava računanje pri manualnom provođenju izjednačenja upotrebom džepnih računala. U takvim slučajevima, iako se radi uglavnom o malim mrežama s malim brojem nepoznanica, smanjenje broja normalnih jednadžbi olakšava i ubrzava njihovo rješavanje.

U uvjetima primjene kompjutora, posebice pri izradbi ekspertnih programa za univerzalno izjednačenje geodetskih mreža, pri izjednačenju većih i velikih geodetskih mreža, umanjenje broja normalnih jednadžbi koje je jednako defektu datuma mreže ($d = d_{max} = 7$) nema neko iznimno značenje.

6. ZAKLJUČAK

Prikazani postupak izjednačenja geodetskih mreža primjenom Gauss-Markovoga funkcionalnog modela, tj. posrednih mjerenja, omogućuje uspješno izjednačenje geodetskih mreža bez obzira na traženu definiciju datuma. Opće rješenje problema postiže se uvođenjem dodatnih jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja (pseudomjerenja), čiji broj odgovara defektu datuma mreže.

Opće rješenje, ovisno o karakteru uvedenih fiktivnih mjerenja, odnosno međusobnom odnosu nepoznanica u mreži, osigurava određivanje odgovarajućeg datuma mreže u sklopu postupka izjednačenja. Pokazuje se da pri definiciji optimalnog datuma mreže nije neophodno teorijsko objašnjenje i uvođenje postupaka opće inverzije (pseudoinverzije), jer se isti rezultat određuje dosljednom primjenom postupka izjednačenja posrednih mjerenja. S druge strane, pri definiciji različitih konvencionalnih datuma, pokazano je da se izjednačenje provodi na temelju istog općeg rješenja kao i pri definiciji optimalnog datuma.

Prema tomu, predočeni postupak nije važan samo radi unificiranoga teorijskog prikaza, već i radi mogućnosti izradbe univerzalnih programa na kompjutorima za izjednačenje mreža, bez obzira na definiciju datuma. Jedina programska cjelina (potprogram), koja je različita s obzirom na definiciju datuma, jest potprogram za oblikovanje pripadne matrice koeficijenata jednadžbi popravaka fiktivnih mjerenja i vektora prikraćenih mjerenja.

LITERATURA

Bjerhammar, A. (1973): Theory of errors and generalized matrix inverses, Elsevier scintific publishing company, Amsterdam—London—New York, 1973.

Caspary, W. F. (1988): Concepts of network and deformation analysis, Monograph 11, School of Surveying, The University of New South Wales, Kensington, N. S. W., 1988.

Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja — prvi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb 1989.
Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja — drugi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1990.
Funcke, G., Weise W. (1982): A contribution to the treatment of defects in large geodetic networks, International Symposium on Geodetic Networks and Computations, Volume VIII, München 1982.
Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1980.
Höpcke, W., Krüger, J. (1981): Zur Berechnung der Pseudoinversen. Zs. Verm. wesen, 10, 543—553.
Illner, I. (1983): Freie Netze und S-Transformation, Allgemeine Vermessungs Nachrichten, (1983), 5, 157—170.
Mittermayer, E. (1971): Eine Verallgemeinerung der Methode dre kleinsten Quadrate zur Ausgleichung freier Netze, Zs. Verm. wesen, 1971, 9, 401—410.
Mittermayer, E. (1972): Zur Ausgleichung freier Netze, Zs. Verm. wesen, 1972, 11, 481—489.
Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Naučna knjiga, Beograd 1989.
Felzer, H. (1974): Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben I, Zs. Verm. wesen, 1974, 5, 181—194.
Pelzer, H. (1974a): Zur Behandlung singularer Ausggleichungsaufgaben II, Zs. Verm. wesen, 1974, 11, 479—488.
Perović, G. (1986): Singularna izravnanja, Naučna knjiga, Beograd 1986.
Rao, C. R., Mitra, S. K. (1971): Generalized Inverse of Matrices and its Applications, New York 1971.
Rožić, N. (1991): Prilog izjednačenju geodetskih mreža posebnih namjena, magistarski rad, Geodetski fakultet, Zagreb 1991.
Stevanović, J. (1987): Dileme u vezi sa izravnanjem i ocenom tačnosti slobodnih geodetskih mreža, Geodetski list 1987, 1—3, 35—59.
Welsch, W. (1979): A review of the adjustment of free networks, Survey review, Vol. XXV, No. 194, 167—180.
Wolf, H. (1972): Helmerts Lösung zum Problem der freien Netze mit singulärer Normalgleichungsmatrix Zs. Verm. wesen, 1972, 5, 189—192.
Yong-qi,C. (1983): Analysis of deformation surveys — a generalized method, Tehnical report No. 94., University of New Brunswick, Federicton N. B., 1983.

ADJUSTMENT OF GEODETIC NETWORKS WITH ADDITIONAL FICTIONAL MEASUREMENTS

The paper presents the adjustment of geodetic networks by Gauss-Markov functional model, i.e. adjustment by observation equations with additional equations of fictional measurements (pseudoobservations). The general adjustment solution in case of optimal datum definition (free networks) is effectively applicable as well as in the case of different conventional datum definitions (non-free networks). The appliance of general adjustment solution in case of conventional datum definition has been carried out. Adjustment procedure universality in view of software design is emphasized. It has been found that without regard to the datum defect the presence in adjustment procedure, introduction of generalized inverses (pseudoinverse) is not necessary. The same results may be obtained as by strict use of observation equations adjustment.

Primljeno: 1991-12-03