ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 13–22
Zaprimljen: 11. rujna 2022.
Prihvaćen: 5. listopada 2022.

Suma znamenki prirodnog broja

Ivan Matić

Sažetak

U radu ćemo prokomentirati neka svojstva sume znamenki prirodnog broja te riješiti niz primjera srodne problematike. Na tim ćemo primjerima prikazati korištenje elementarnih kombinatornih i analitičkih metoda, te metoda teorije brojeva. Susrest ćemo se i s pojmom uzastopne sume znamenki prirodnog broja te vidjeti neke situacije u kojima možemo odrediti uzastopnu sumu znamenki, iako nam sama suma znamenki neće biti poznata.

Ključni pojmovi: suma znamenki, uzastopna suma znamenki, cjelobrojne funkcije

1. Uvod

Jednako kao i prirodni brojevi, sume njihovih znamenki su vrlo konkretni objekti koji predstavljaju plodno tlo za rezimiranje i donošenje kvalitetnih zaključaka i onima koji nisu upućeni u dublju teoriju ili u veći broj metoda u matematici. Suma znamenki je vjerojatno i jedan od prvih objekata pridruženih prirodnim brojevima te vjerujemo kako su čitatelji upoznati s njenom primjenom pri ispitivanju djeljivosti. Namjera nam je ovim radom nastojati barem malo produbiti razumijevanje sume znamenki, jer se radi o pojmu koji se u literaturi pojavljuje relativno rijetko, a osim što je interesantan sam po sebi, u srodnim problemima otvara i brojne mogućnosti zornog prikaza korištenja metoda teorije brojeva, kombinatorike i matematičke analize.

U ovom ćemo radu obraditi nekoliko svojstava vezanih uz sumu znamenki prirodnog broja te se upoznati s pojmom uzastopne sume znamenki. Navest ćemo niz primjera, neki od njih će biti sasvim razumljivi i učenicima osnovnih škola, te se mogu koristiti na dodatnoj nastavi matematike ili prilikom pripreme učenika za natjecanja. Također, u nekim ćemo primjerima nastojati ilustrativno pokazati i elementarnu primjenu derivacija na dokazivanje potrebnih nejednakosti. Naglasimo kako teme potrebne za razumijevanje svojstava i primjera koje navodimo namjerno ne nadilaze standardno srednjoškolsko gradivo i upravo iz tog razloga izbjegavamo korištenje naprednijih metoda, poput kongruencija ili posebnih nejednakosti.

Za prirodan broj n ćemo sa $S(n)$ označiti sumu znamenki broja n, pri čemu promatramo samo standardan dekadski zapis. Prirodan k-znamenkasti broj n možemo zapisati u obliku $a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, za $a_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ te $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ za $i = 1,2,\ldots,k-1$. Tada je

$$\begin{aligned} S(n) &= S(a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) \\ &= a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Na primjer, $S(15) = 1 + 5 = 6$, $S(1234) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $S(5) = 5$.

Informacije koje nam o prirodnom broju otkriva suma njegovih znamenki su prije svega vezane uz djeljivost. Kriteriji djeljivosti prirodnog broja s 3 i 9 sastavni su dio gradiva 5. razreda te se radi o kriterijima u kojima svaka znamenka ima jednako važnu ulogu. Podsjetimo, prirodan je broj djeljiv s 3 ako i samo ako je suma njegovih znamenki djeljiva s 3, a djeljiv je s 9 ako i samo ako je suma njegovih znamenki djeljiva s 9.

Suma znamenki prirodnog broja nam ipak govori nešto više od samog kriterija djeljivosti, odnosno je li prirodan broj djeljiv s 3 ili 9. Zapišimo prirodan broj n u obliku $a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$, što je jednako

$$a_k \cdot (9+1)^{k-1} + a_{k-1} \cdot (9+1)^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot (9+1) + a_1 \tag{1}$$

te primijetimo kako je, po binomnom teoremu,

$$(9+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot 9^i \cdot 1^{m-i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \cdot 9^{i-1} + 1.$$

Prema tome, za svaki $i = 1,2,\ldots,k-1$ postoji prirodan broj l_i takav da je $(9+1)^{k-i} = 9 \cdot l_i + 1$. Sada (1) prelazi u

$$\begin{aligned} n &= a_k \cdot (9 \cdot l_1 + 1) + a_{k-1} \cdot (9 \cdot l_2 + 1) + \cdots + a_2 \cdot (9 \cdot l_{k-1} + 1) + a_1 \\ &= 9 \cdot (a_k \cdot l_1 + a_{k-1} \cdot l_2 + \cdots + a_2 \cdot l_{k-1}) + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1) \\ &= 9 \cdot (a_k \cdot l_1 + a_{k-1} \cdot l_2 + \cdots + a_2 \cdot l_{k-1}) + S(n) \end{aligned}$$

pa su ostatci brojeva n i $S(n)$ pri dijeljenju s 9 jednaki, isto kao i ostatci pri dijeljenju ovih brojeva s 3. Drugim riječima, n je oblika $3 \cdot k + i$, za neki nenegativan cijeli broj k te $i \in \{0, 1, 2\}$, ako i samo ako je $S(n)$ oblika $3 \cdot l + i$, za neki nenegativan cijeli broj l.

2. Suma znamenki

Očito za svaki prirodan broj n vrijedi $S(n) \geq 1$. Štoviše, $S(n) = 1$ jedino u slučaju kada je vodeća znamenka broja n jednaka 1, dok su sve ostale znamenke jednake 0. Prema tome, $S(n) = 1$ ako i samo ako postoji nenegativan cijeli broj k takav da je $n = 10^k$.

Ako je n k-znamenkast broj, odnosno $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$, onda je $S(n) \leq 9 \cdot k$, jer svaka od k znamenki može najviše biti jednaka 9.

Kako bi usporedili prirodan broj i sumu njegovih znamenki, primijenit ćemo jednu elementarnu analitičku tvrdnju, vezanu uz ispitivanje tijeka funkcije:

Propozicija 1. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je $f(a) > 0$ i $f'(x) > 0$ za $x > a$, onda je $f(x) > 0$ za $x \geq a$.*

Dokaz. Iz $f'(x) > 0$ za $x > a$ slijedi da je funkcija f rastuća na intervalu $\langle a, +\infty\rangle$. Kako je $f(a) > 0$, te iz derivabilnosti funkcije f slijedi da je funkcija f i neprekidna, postoji interval I koji sadrži a takav da je $f(x) > 0$ za sve $x \in I$. Sada direktno slijedi da je $f(x) > 0$ za $x \geq a$. □

Propozicija 2. *Za svaki prirodan broj n vrijedi $S(n) \leq n$.*

Dokaz. Najprije primijetimo da za jednoznamenkast broj n vrijedi $S(n) = n$. Ako je $n \in [10, 99]$, možemo ga zapisati u obliku $10 \cdot a + b$, pri čemu je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Pretpostavimo da je $n \leq S(n)$. Slijedi $10 \cdot a + b \leq a + b$, odnosno $9 \cdot a \leq 0$, što nije moguće. Prema tome, za dvoznamenkaste prirodne brojeve vrijedi $S(n) < n$.

Neka je sada n prirodan broj s k znamenki, pri čemu je $k \geq 3$. Tada je $n \geq 10^{k-1}$ te $S(n) \leq 9 \cdot k$. Pokažimo da za $k \geq 3$ vrijedi $10^{k-1} > 9 \cdot k$, odnosno $10^{k-1} - 9 \cdot k > 0$. U tu ćemo svrhu promatrati realnu funkciju realne varijable $f(x) = 10^{x-1} - 9 \cdot x$. Radi se o derivabilnoj funkciji, čija je derivacija jednaka $f'(x) = 10^{x-1} \cdot \ln 10 - 9$. Primijetimo da za $x \geq 3$ vrijedi $10^{x-1} \cdot \ln 10 > 100 \cdot 2.3 = 230$, odnosno $f'(x) = 10^{x-1} \cdot \ln 10 - 9 > 0$ za $x \geq 3$.

Kako je derivacija funkcije f pozitivna na $\langle 3, +\infty\rangle$, funkcija f je rastuća na tom intervalu. Sada iz $f(3) = 100 - 27 = 73 > 0$ slijedi $f(x) > 0$ za $x \geq 3$, odnosno $10^{k-1} - 9 \cdot k > 0$ za $k \geq 3$. □

U pojedinim je slučajevima korisno broj znamenki prirodnog broja n izraziti u terminima broja n, pogotovo ako se radi o broju zadanom u obliku potencije.

Za tu potrebu ćemo s $\lfloor x \rfloor$ označiti najveći cijeli broj koji nije veći od realnog broja x. Napomenimo kako izraz $\lfloor x \rfloor$ obično nazivamo *pod od* x ili *najveće cijelo od* x te na ovaj način dobivamo jednu cjelobrojnu funkciju $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Na primjer, $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$. Primijetimo kako za svaki realan broj x vrijedi $\lfloor x \rfloor \leq x$ te je $\lfloor x \rfloor = x$ ako i samo ako je x cijeli broj.

Također, za svaki realan broj x vrijedi $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, odnosno $\lfloor x \rfloor$ je upravo jedinstven cijeli broj k takav da je $x \in [k, k+1\rangle$.

Propozicija 3. *Neka je n prirodan broj. Tada je broj znamenki broja n jednak $\lfloor \log n \rfloor + 1$.*

Dokaz. Označimo broj znamenki broja n s k. Tada je $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Kako za pozitivne realne brojeve a i b takve da je $a \leq b$ vrijedi $\log a \leq \log b$, slijedi $\log(10^{k-1}) \leq \log n < \log(10^k)$, odnosno $k-1 \leq \log n < k$. Direktno slijedi da je $k - 1 = \lfloor \log n \rfloor$, odakle je $k = \lfloor \log n \rfloor + 1$. □

Primjer 1. *Odredimo $S\big(S\big(S(2022^{2023})\big)\big)$.*

Rješenje. Prema prethodnoj je propoziciji

$$\begin{aligned} S(2022^{2023}) &\leq 9 \cdot \big(\lfloor \log 2022^{2023} \rfloor + 1\big) = 9 \cdot (\lfloor 2023 \cdot \log 2022 \rfloor + 1) \\ &< 9 \cdot (6688 + 1) = 60201. \end{aligned}$$

Zato je $S(S(2022^{2023}) < 9 \cdot 5 = 45$ te $S(S(S(2022^{2023}))) < 18$. Primijetimo da je $2022 = 3 \cdot 674$ pa je $2022^{2023} = 3^{2023} \cdot 674^{2023}$, što je djeljivo s 9. Zato je i $S(2022^{2023})$ djeljivo s 9, isto kao i $S(S(2022^{2023}))$ te $S(S(S(2022^{2023})))$. Prema tome, $S(S(S(2022^{2023})))$ je prirodan broj manji od 18 koji je djeljiv s 9 pa je $S(S(S(2022^{2023}))) = 9$.

Primjer 2. *Odredimo*

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots + S(2021) - S(2022) + S(2023).$$

Rješenje. Neka je n paran prirodan broj te označimo broj znamenki broja n s k. Tada n možemo zapisati u obliku

$$n = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1,$$

pri čemu je $a_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ za $i = 2, \ldots, k-1$, te $a_1 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Kako je $a_1 \leq 8$, slijedi $n + 1 = a_k \cdot 10^{k-1} + a_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 + 1$ te $S(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots +$

$a_2 + a_1 = S(n+1) - 1$. Dakle, za paran n vrijedi $S(n+1) - S(n) = 1$. Zato je

$$\begin{aligned} &S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots + S(2021) - S(2022) + S(2023) \\ &= S(1) + \big(S(3) - S(2)\big) + \cdots + \big(S(2021) - S(2020)\big) \\ &\qquad\qquad + \big(S(2023) - S(2022)\big) = 1 + 1011 \cdot 1 = 1012. \end{aligned}$$

Primjer 3. *Postoji li prirodan broj n takav da je $n \cdot (S(n) - 1) = 2022$?*

Rješenje. Rastav broja 2022 na proste faktore je $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ pa jedan od brojeva n i $S(n) - 1$ mora biti djeljiv s 337. Kako je $n \leq 2022$, slijedi da je $S(n) - 1 < 337$ pa, jer su oba broja pozitivna, n mora biti djeljiv s 337. Zato je $n \in \{337, 674, 1011, 2022\}$. Iz $S(337) = 13$, $S(674) = 17$, $S(1011) = 3$ i $S(2022) = 6$, slijedi da je jedino rješenje $n = 1011$.

Primjer 4. *Odredimo sve prirodne brojeve koji su točno 16 puta veći od sume svojih znamenki.*

Rješenje. Treba odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $n = 16 \cdot S(n)$. Očito je $n \geq 16$. Dokažimo sada, indukcijom po broju znamenki od n, da je $n < 1000$, odnosno da n ne može imati više od 3 znamenke. Dokazat ćemo da za prirodan broj n, $n \geq 1000$, vrijedi $n > 16 \cdot S(n)$.

Kao bazu indukcije promatramo četveroznamenkaste brojeve. Za takav broj n vrijedi $S(n) \leq 36$ pa je $16 \cdot S(n) \leq 576$, što je manje od n. Prema tome, n ne može biti četveroznamenkast.

Provedimo korak indukcije. Neka je k prirodan broj veći od 3 te pretpostavimo da za svaki k-znamenkasti broj n vrijedi $n > 16 \cdot S(n)$. Uzmimo sada $k+1$-znamenkasti broj n, kojeg možemo zapisati u obliku $n = a \cdot 10^k + m$, za prirodan broj a, $a \leq 9$, i k-znamenkasti broj m. Primijetimo da je $S(n) = a + S(m)$ pa je $16 \cdot S(n) = 16 \cdot a + 16 \cdot S(m)$, što je, po pretpostavci indukcije, strogo manje od $16 \cdot a + m < a \cdot 10^k + m = n$, zbog $k \geq 3$.

Pretpostavimo sada da je $16 \leq n \leq 99$. Tada n možemo prikazati u obliku $n = 10 \cdot a + b$, pri čemu je $1 \leq a \leq 9$ i $0 \leq b \leq 9$. Tada je $S(n) = a + b$ te slijedi $10 \cdot a + b = 16(a + b)$, odakle je $6 \cdot a + 15 \cdot b = 0$, što nije moguće jer je $a \geq 1$ i $b \geq 0$.

Preostaje još provjeriti slučaj $100 \leq n \leq 999$. Prikažimo sada n u obliku $n = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$, pri čemu je $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ i $0 \leq c \leq 9$. Iz $S(n) = a + b + c$ i $n = 16 \cdot S(n)$ slijedi $84 \cdot a = 6 \cdot b + 15 \cdot c$, odnosno $28 \cdot a = 2 \cdot b + 5 \cdot c$. Kako su i b i c manji od 10, izraz $2 \cdot b + 5 \cdot c$ je manji od 70 pa je $a \in \{1, 2\}$.

Ako je $a = 1$, dobivamo $28 = 2 \cdot b + 5 \cdot c$. Ovu jednadžbu možemo riješiti direktnim uvrštavanjem, a možemo postupak malo i skratiti ako primijetimo da c mora biti paran jer su 28 i $2 \cdot b$ parni, pa je $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Dobivamo dvije mogućnosti: $(b, c) = (9, 2)$ i $(b, c) = (4, 4)$.

Ako je $a = 2$, dobivamo $56 = 2 \cdot b + 5 \cdot c$. Opet c mora biti paran, te dobivamo kako je u ovom slučaju $(b, c) = (8, 8)$.

Konačno, traženi brojevi su $192, 144$ i 288.

Primjer 5. *Odredimo sve prirodne brojeve n takve da je $S(n) \cdot (S(n) - 1) = n - 1$.*

Rješenje. Promotrimo najprije slučaj kada je broj n četveroznamenkast. Tada je $S(n) \leq 4 \cdot 9 = 36$ pa je $S(n) \cdot (S(n) - 1) \leq 36 \cdot 35 = 1260$ te je $n \leq 1261$. No, tada je suma znamenke stotica i tisućica broja n najviše 3 pa je suma znamenki $S(n)$ od n najviše $3+9+9 = 21$ i $S(n) \cdot (S(n)-1) \leq 21 \cdot 20 < 1000$. Prema tome, n ne može biti četveroznamenkast.

Sada pogledajmo slučaj kada je n k-znamenkast broj, pri čemu je $k \geq 5$. S jedne je strane $S(n)(S(n) - 1) < 9 \cdot k \cdot 9 \cdot k = 81 \cdot k^2$, dok je s druge strane $n - 1 \geq 10^{k-1} - 1$. Pokazat ćemo da je za $k \geq 5$ uvijek $10^{k-1} - 1 > 81 \cdot k^2$, odnosno da je $10^{k-1} - 1 - 81 \cdot k^2 > 0$.

U tu svrhu pogledajmo funkciju $f(x) = 10^{x-1} - 1 - 81 \cdot x^2$. Radi se o funkciji koja je neprekidna te ima derivaciju svakog reda, pri čemu je $f'(x) = 10^{x-1} \cdot \ln 10 - 162 \cdot x$. Direktno se može vidjeti da je $f'(3) < 0$ i $f'(4) > 0$. Također, iz $f''(x) = 10^{x-1} \cdot (\ln 10)^2 - 162$ slijedi da je $f''(x) > 0$ za $x \geq 4$ pa je f' strogo rastuća funkcija na $\langle 4, +\infty\rangle$. Zato je $f'(x) > 0$ za $x \in \langle 4, +\infty\rangle$ pa je i funkcija f strogo rastuća na $\langle 4, +\infty\rangle$. Kako je $f(5) = 10^4 - 1 - 81 \cdot 25 = 7974 > 0$, slijedi da je $f(x) > 0$ za sve $x \geq 5$, odakle je i $10^{k-1} - 1 - 81 \cdot k^2 > 0$ za sve prirodne brojeve k veće ili jednake 5.

Na ovaj smo način polazni problem sveli na proučavanje brojeva manjih od 1000. Pri tome ćemo razlikovati nekoliko slučajeva.

Ako je $n < 10$, tada je $S(n) = n$ pa je $S(n) \cdot (S(n) - 1) = n - 1$ jedino za $n(n - 1) = n - 1$ odnosno $n = 1$.

Nadalje možemo pretpostaviti da je $n \geq 10$. Kako bi reducirali broj slučajeva koje trebamo promatrati, pogledajmo što nam djeljivost brojem 3 može otkriti o izrazu $S(n) \cdot (S(n) - 1) = n - 1$.

Ako je n djeljiv s 3, odnosno ako je oblika $3 \cdot k$ za neki prirodan broj k, tada je i $S(n)$ djeljiv s 3 pa s 3 mora biti djeljiv i produkt $S(n) \cdot (S(n) - 1) = n - 1$, što nije moguće jer ako je n djeljiv s 3 tada $n - 1$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2.

Ako je n oblika $3 \cdot k + 2$, za neki prirodan broj k, tada je $S(n)$ oblika $3l + 2$ pa je $S(n) \cdot (S(n) - 1) = (3l + 2) \cdot (3l + 1) = 3 \cdot (3l^2 + l + 2l) + 2$, no $n - 1$ ne može biti tog oblika zbog $n - 1 = 3 \cdot k + 1$.

Prema tome, n mora biti oblika $3 \cdot k + 1$, za neki prirodan broj k. Tada je $S(n)$ oblika $3 \cdot l + 1$ i $S(n) - 1 = 3 \cdot l$. Drugim riječima, $n - 1$ jednak je umnošku dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, manji od kojih je djeljiv s 3.

Za $10 \leq n \leq 99$, svi takvi parovi su $(3,4),(6,7)$ i $(9,10)$. Primijetimo kako u ovom slučaju umnožak treba biti dvoznamenkast. Ovi parovi nam redom daju kandidate $13, 43, 91$, koji svi zadovoljavaju traženi uvjet $S(n) \cdot (S(n)-1) = n-1$.

Za $100 \leq n \leq 999$ tražimo parove uzastopnih cijelih brojeva čiji je umnožak troznamenkast i manji od kojih je djeljiv s 3. To su parovi $(12,13),(15,16),\ (18,19),\ (21,22),(24,25),(27,28),(30,31)$. Direktnom provjerom dobivamo kako jedino prvi par, $(12,13)$, daje broj $n = 157$ koji zadovoljava traženi uvjet.

Konačno, sva tražena rješenja su $1, 13, 43, 91, 157$.

3. Uzastopna suma znamenki

Vidjeli smo da za prirodan broj n, $n \geq 10$, vrijedi $S(n) < n$. Ako je i $S(n) \geq 10$, tada je i $S(S(n)) < S(n) < n$. Nastavljajući na ovaj način, možemo primijetiti da je niz

$$S(n),\ S(S(n)),\ S(S(S(n))),\ S(S(S(S(n)))),\ldots$$

opadajući. Kako su vrijednosti koje se pojavljuju u ovom nizu prirodni brojevi, niz mora biti i stacionaran, odnosno od nekog mjesta nadalje će se u nizu konstantno ponavljati isti prirodan broj i taj broj očito mora biti manji od 10. Taj broj nazivamo *uzastopna suma znamenki prirodnog broja* n i označavamo s $\rho(n)$.

Primjer 6. *Odredimo uzastopnu sumu znamenki broja* 123456.

Rješenje. Kako je $S(123456) = 1+2+3+4+5+6 = 21$, $S(S(123456)) = S(21) = 2+1 = 3$, slijedi da je $\rho(123456) = 3$.

Kako za svaki prirodan broj n brojevi n i $S(n)$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 9, brojevi n i $\rho(n)$ također daju isti ostatak pri dijeljenju s 9. Uzastopna suma znamenki je uvijek manja od 10 pa je jednaka upravo ostatku broja n pri dijeljenju s 9, pri čemu u slučaju kada je broj n djeljiv s 9 formalno uzimamo da pri dijeljenju s 9 daje ostatak 9.

Primijetimo kako je općenito vrlo teško odrediti sumu znamenki broja koji nije zadan eksplicitno, ali u takvom slučaju često može biti mnogo lakše odrediti uzastopnu sumu znamenki tog broja. Razlog tome leži u činjenici da za određivanje sume znamenki nekog broja treba eksplicitno poznavati njegov dekadski zapis, dok je za određivanje uzastopne sume znamenki potrebno znati samo ostatak pri dijeljenju tog broja s 9.

Ovu ćemo situaciju proučiti na primjeru Fermatovih brojeva, koji su od posebnog interesa u teoriji brojeva, a čiji nam eksplicitan dekadski

zapis općenito nije poznat. Za prirodan broj n je n-ti Fermatov broj F_n zadan s
$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$
Pogledajmo prvih nekoliko Fermatovih brojeva:
$$F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 655373,\ F_5 = 4294967297, \dots$$
Napomenimo kako se često uzima da niz Fermatovih brojeva počinje s $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, no u ovom ćemo se radu ipak zadržati na gornjoj definiciji, jer bolje oslikava pravilnosti koje želimo uočiti. Poznato je da su Fermatovi brojevi F_1, F_2, F_3 i F_4 prosti, dok zasad još uvijek nije poznato postoji li prost Fermatov broj F_n za $n \geq 5$. Radi se o brojevima koji često imaju izuzetno kompliciran rastav na proste faktore te čiji se broj znamenki naglo povećava s rastom broja n. Primjerice, F_7 ima 39, a F_{10} čak 309 znamenki. Zato je praktički neizvedivo odrediti eksplicitan dekadski zapis od F_n za veliki prirodan broj n, što naravno onemogućava određivanje sume znamenki Fermatovih brojeva. Više interesantnih detalja o Fermatovim brojevima se može pronaći u [1] i [3].

Pogledajmo sada što možemo reći o uzastopnoj sumi znamenki Fermatovih brojeva. Odgovarajuće ostatke koje prvih nekoliko Fermatovih brojeva daje pri dijeljenju s 9 možemo jednostavno odrediti iz sume njihovih znamenki:
$$5,\ 8,\ 5,\ 8,\ 5, \dots$$
Možemo primijetiti kako se izmijenjuju brojevi 5 i 8 te pretpostaviti da takva pravilnost vrijedi i općenito za $\rho(F_n)$. Kako bi to dokazali, najprije uočimo da vrijedi
$$F_{n+1} - 1 = 2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (F_n - 1)^2 = F_n^2 - 2 \cdot F_n + 1,$$
odakle je
$$F_{n+1} = F_n^2 - 2 \cdot F_n + 2. \tag{2}$$

Primjer 7. *Neka je n prirodan broj. Tada je $\rho(F_n) = 5$ ako je n neparan i $\rho(F_n) = 8$ ako je n paran.*

Rješenje. Ako je $n = 1$, onda je $\rho(F_1) = \rho(5) = 5$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n te je dokažimo za $n + 1$. Ako je n neparan, onda je $n+1$ paran i, prema pretpostavci, F_n je oblika $9 \cdot k + 5$. Iz jednakosti (2) slijedi
$$\begin{aligned} F_{n+1} &= (9 \cdot k + 5)^2 - 2 \cdot (9 \cdot k + 5) + 2 \\ &= 81 \cdot k^2 + 90 \cdot k + 25 - 18 \cdot k - 10 + 2 \\ &= 9 \cdot (9 \cdot k^2 + 8 \cdot k) + 17 \\ &= 9 \cdot (9 \cdot k^2 + 8 \cdot k + 1) + 8, \end{aligned}$$

pa F_{n+1} pri dijeljenju s 9 daje ostatak 8 te je $\rho(F_{n+1}) = 8$.

Ako je n paran, onda je $n+1$ neparan i, prema pretpostavci, F_n je oblika $9 \cdot k + 8$. Iz jednakosti (2) slijedi

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= (9 \cdot k + 8)^2 - 2 \cdot (9 \cdot k + 8) + 2 \\ &= 81 \cdot k^2 + 144 \cdot k + 64 - 18 \cdot k - 16 + 2 \\ &= 9 \cdot (9 \cdot k^2 + 14 \cdot k) + 50 \\ &= 9 \cdot (9 \cdot k^2 + 8 \cdot k + 5) + 5, \end{aligned}$$

pa F_{n+1} pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5 te je $\rho(F_{n+1}) = 5$.

U nastavku ćemo pogledati još neke primjere određivanja uzastopne sume znamenki prirodnih brojeva bez poznavanja njihova eksplicitnog zapisa. Pri tome ćemo se orijentirati na sume kubova.

Pogledajmo najprije jedan općeniti rezultat.

Propozicija 4. *Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $0 < b - a = c - b$ te neka $b - a$ nije djeljivo s 3. Tada je $\rho(a^3 + b^3 + c^3) = 9$.*

Dokaz. Neka je $d = b - a = c - b$. Tada je $a = b - d$ i $c = b + d$. Označimo $a^3 + b^3 + c^3$ s n. Tada je

$$\begin{aligned} n &= (b - d)^3 + b^3 + (b + d)^3 \\ &= b^3 - 3 \cdot b^2 \cdot d + 3 \cdot b \cdot d^2 - d^3 + b^3 + b^3 + 3 \cdot b^2 \cdot d + 3 \cdot b \cdot d^2 + d^3 \\ &= 3 \cdot b^3 + 6 \cdot b \cdot d^2 \\ &= 3 \cdot b \cdot (b^2 + 2 \cdot d^2). \end{aligned}$$

Kako bi dokazali da je $\rho(n) = 9$, trebamo dokazati da je $n = 3 \cdot b \cdot (b^2 + 2 \cdot d^2)$ djeljivo s 9, odnosno da je $b \cdot (b^2 + 2 \cdot d^2)$ djeljivo s 3. To očito vrijedi ako je b djeljivo s 3. Pretpostavimo nadalje da b nije djeljivo s 3 te dokažimo da je tada $b^2 + 2 \cdot d^2$ djeljivo s 3.

Ako b nije djeljivo s 3, tada je b ili oblika $3 \cdot k + 1$ ili oblika $3 \cdot k + 2$, za neki nenegativan cijeli broj k. Primijetimo da je tada ili

$$b^2 = 9 \cdot k^2 + 6 \cdot k + 1 = 3 \cdot (3 \cdot k^2 + 2 \cdot k) + 1$$

ili

$$b^2 = 9 \cdot k^2 + 12 \cdot k + 4 = 3 \cdot (3 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1) + 1,$$

odnosno b^2 je oblika $3 \cdot l + 1$, za neki nenegativan cijeli broj l. Kako niti d nije djeljiv s 3, na isti način možemo zaključiti da je i d^2 oblika $3 \cdot m + 1$ za neki nenegativan cijeli broj m. Sada je

$$b^2 + 2 \cdot d^2 = 3 \cdot l + 1 + 2 \cdot (3 \cdot m + 1) = 3 \cdot (l + 2 \cdot m) + 3,$$

što je djeljivo s 3. Prema tome, n je djeljiv s 9 te je $\rho(n) = 9$. □

Primijenimo sada prethodni rezultat u konkretnoj situaciji:

Primjer 8. *Neka je*

$$n = 1^3 + 2^3 + \cdots + 2021^3 + 2022^3.$$

Odredimo $\rho(n)$*.*

Rješenje. Primijetimo da je

$$n = (1^3 + 2^3 + 3^3) + (4^3 + 5^3 + 6^3) + \cdots + (2020^3 + 2021^3 + 2022^3),$$

gdje je svaki izraz u zagradi oblika $a^3 + b^3 + c^3$, za prirodne brojeve a, b, c takve da je $0 < b - a = c - b$, pri čemu 3 ne dijeli $b - a$. Prema prethodnoj je propoziciji svaki od brojeva $1^3 + 2^3 + 3^3$, $4^3 + 5^3 + 6^3, \ldots, 2020^3 + 2021^3 + 2022^3$ djeljiv s 9 pa je i njihova suma djeljiva s 9. Zato je $\rho(n) = 9$.

Završimo sa zadatkom koji ostavljamo za vježbu zainteresiranim čitateljima.

Zadatak 1. *Neka je*

$$m = 1^3 + 2^3 + \cdots + 2022^3 + 2023^3$$

te

$$n = 2^3 + 6^3 + 10^3 + \cdots + 2022^3 + 2026^3.$$

Odredite $\rho(m)$ *i* $\rho(n)$*.*

Literatura

[1] Z. Franušić, N. Pavlinić, *Raznovrsni prosti brojevi*, Acta Math. Spalatensia Ser. Didactica 3(2020), 63–76

[2] I. M. Izmirli, *On Some Properties of Digital Roots*, Adv. in Pure Math. 4(2014), 295–301

[3] M. Křížek, F. Luca, L. Somer, *17 lectures on Fermat numbers*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] P. Pantoja, *Sum of Digits of Positive Integers*, Math. Excalibur, Vol. 22, 3(2019)

Ivan Matić
Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
E-mail adresa: `imatic@mathos.hr`