ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 23–34
Zaprimljen: 1. veljače 2022.
Prihvaćen: 9. veljače 2022.

Pohlepa, paradoks i slučajna šetnja

Vjekoslav Kovač, Kristina Kovačević

Sažetak

Jedna igra opisana u popularnom romanu mnogo je nepovoljnija za igrače nego se isprva čini. Mi ćemo je najprije simulirati računalom, a potom i modelirati pomoću slučajne šetnje na logaritamskoj skali. Konačno, razjasnit ćemo prividni paradoks egzaktnom ocjenom vjerojatnosti dobitka.

Ključni pojmovi: bacanje novčića, vjerojatnost, očekivanje, logaritamska skala, slučajna šetnja

1. Pravila igre

Igra s elementima slučajnosti sa sobom nosi rizik financijskog gubitka. Igrač bi najprije trebao analizirati igru i procijeniti je li mu taj rizik isplativ obzirom na mogući dobitak. Takva analiza, ovisno o igri, može iziskivati solidno matematičko znanje. Štoviše, površne i naivne analize mogu nas navesti na neispravne ili čak paradoksalne zaključke.

Marc Elsberg je austrijski popularni pisac, prevođen na mnoge jezike. U svojim djelima često predstavlja ekonomske koncepte i rezultate modernih istraživanja iz polja ekonomije, ali to čini na čitak i zabavan način: u formatu romana s izmišljenim likovima i čitatelju bliskom fabulom. U svom novom triler-romanu *Pohlepa* [2], Elsberg opisuje jednu igru koja je samo naizgled povoljna za igrače.

Svaki od igrača na početku igre ima 100 bodova i u svakom krugu baca simetričan novčić. Ako na novčiću padne glava, broj bodova uveća se za 50%. U protivnom, ako na novčiću padne pismo, broj bodova igrača umanji se za 40%. Igra završava nakon 100 bacanja novčića, a igrač osvaja dobitak ako na kraju igre ima barem 100 bodova.

Igrač započinje igru uplatom početnog uloga, koji radi određenosti iznosi 100€. Nadalje, dobitak je jednak dvostrukom ulogu, tj. on iznosi 200€. Isplata u slučaju gubitka nije jasno definirana u knjizi, ali se dade pretpostaviti kako u tom slučaju igrač gubi svoj početni ulog i ne osvaja ništa. Dakle, postoje samo dva ishoda igre: *igrač je dobitnik* (jer na kraju ima barem 100 bodova) i *igrač je gubitnik* (jer na kraju ima manje od 100 bodova).

2. Naivne i pogrešne analize

Ovako su rasuđivali protagonisti romana.

Prvi igrač. Jedan od glavnih likova romana na prvu je sumnjičav, ali razmišljanjem na sljedeći način uvjerava se u mogućnost pobjede: 100 bacanja novčića rezultirat će s otprilike 50 glava i 50 pisama pa će u polovini bacanja dobiti 50% bodova, a u polovini izgubiti 40% bodova i time ukupno biti na dobitku 10% bodova. Dakle, svakako će igru završiti s više od početnih 100 bodova i pobijediti.

Drugi igrač. Jedan drugi pak igrač bez predugog razmišljanja pristaje na igru, jer smatra kako će sigurno biti na dobitku, a svojim razmatranjem uspijeva pridobiti još dvije osobe. Po njegovu mišljenju treba izračunati prosjek mogućih numeričkih ishoda. Za ovu igru, to je 150% bodova ako na novčiću padne glava ili 60% bodova ako na novčiću padne pismo. Njihov zbroj (koji iznosi 210%) potrebno je podijeliti s brojem mogućih ishoda (kojih je dva), čime se dobiva prosjek od 105% bodova. Vođen tim razmišljanjem zaključuje kako je igrač u svakom krugu u prosjeku na dobitku 5% svojih bodova, čime mu je u konačnici osigurana pobjeda.

Treći igrač. Međutim, jedan od promatrača odmah tvrdi kako izračun nije tako jednostavan i kako je prosjek bodova nakon bacanja potrebno računati drugačije, uzimajući u obzir vjerojatnosti. Kako novčić pokazuje glavu ili pismo, vjerojatnost pojave svakog od njih je 1/2. Ako na novčiću padne glava, igrač nakon tog kruga ima 1.5 puta broj svojih starih bodova, a ako padne pismo, nakon kruga ima 0.6 puta broj svojih starih bodova. Stoga je očekivani dobitak jednak zbroju umnožaka očekivanih ishoda i njimu pripadnih vjerojatnosti pojave pisma ili glave na novčiću, što rezultira očekivanim ishodom od 1.05 puta broj bodova iz prethodnog kruga, odnosno očekivanim povećanjem broja bodova za 5% po svakom krugu igre. Ovaj igrač dodatno objašnjava kako bi, vođen tim razmatranjem, nakon 100 bacanja trebao imati otprilike 13150 bodova, što je daleko više od početnih 100 pa je pobjeda sigurna. To ga i samog potiče na uključivanje u igru.

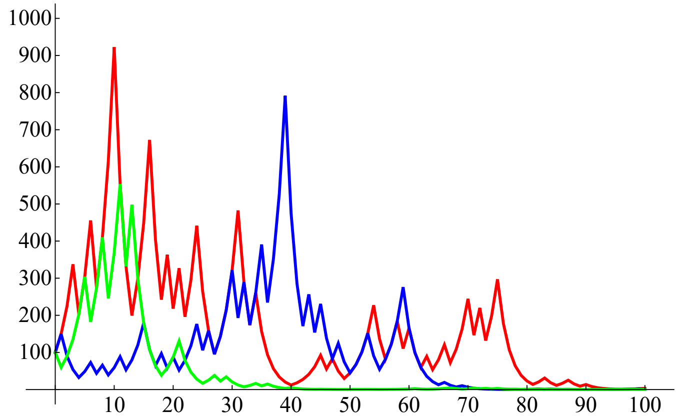
3. Simulacija

Likovi iz romana [2] prihvaćaju igru vrlo entuzijastično jer pohlepno vjeruju da su im šanse za zaradu velike. Već na polovini igre na vlastitom primjeru polako shvaćaju da su u vrlo nepovoljnom položaju jer sedam od deset igrača ima manje od 100 bodova. Nedugo nakon toga, potaknuti kontinuiranim smanjivanjem broja bodova, igrači (posebno oni na jednoznamenkastom iznosu) postaju sve razočaraniji i bijesniji. Organizatora igre, inače profesionalnog kockara, optužuju da je varalica i traže svoj novac natrag. Nakupljene frustracije i svađa uskoro rezultiraju fizičkim obračunom.

Pokušajmo sami simulirati ovu igru, kako bismo se uvjerili da je radnja romana doista uvjerljiva. Na slici 1 prikazana su kretanja brojeva bodova triju „imaginarnih igrača" (crvenog, plavog i zelenog), čiji ishodi bacanja simetričnog novčića su (pseudo)slučajni i generirani računalom. Riječnikom elementarne teorije vjerojatnosti [6, 7], brojeve bodova u trenucima $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (tj. nakon n krugova) opisuju slučajne varijable

$$100 = B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots,$$

a mi skiciramo tri simulacije tog slučajnog niza. Vidimo da je prilično tipično da taj niz ima brojne strme uspone i padove, ali da konačni broj bodova B_{100} ispadne dosta manji od 100, što znači da je pripadni igrač izgubio.



Slika 1. Tri simulacije od po $N = 100$ bacanja novčića.

U tablici 1 bilježimo brojeve dobitnika nakon 100 bacanja simetričnog novčića, između raznih ukupnih brojeva igrača. Možemo eksperimentalno naslutiti da tek oko 13600/100000 = 0.136, tj. oko 13.6% igrača završe kao dobitnici; dakle većina njih izgubi svoj ulog.

Broj igrača	10	100	1000	10000	100000
Broj dobitnika	2	12	137	1346	13642

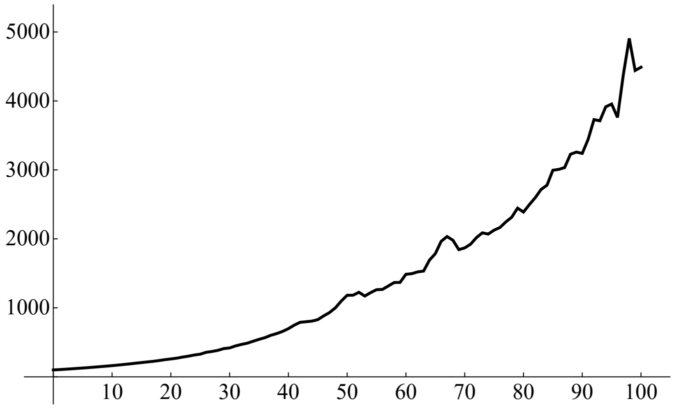
Tablica 1. Brojevi dobitnika pri $N = 100$ bacanja novčića.

Kako je to moguće?! Što je pogrešno u rasuđivanju protagonista romana?

Kasnije u romanu, organizator igre objašnjava kako on nije varalica nego nijedan od igrača nije koristio prikladan izračun rizika. Analize igrača nisu uzimale u obzir tijek igre (vremenski faktor) i time je zanemarena činjenica da su vrijednosti bodova za svaki od krugova igre drugačije jer se broj bodova mijenja nakon svakog bacanja novčića. Računajući na primjeru samo prva dva bacanja organizator potkrepljuje svoju teoriju. Ako na novčiću prvi puta padne glava, broj bodova sa 100 raste na 150. Ako potom padne pismo, broj bodova se smanjuje za 40% te iznosi 90. U drugu ruku, ako prvi puta padne pismo, od 100 bodova igraču ostane 60, a drugi puta padne glava, broj bodova raste za 50% i također iznosi 90 bodova. To je rezultiralo gubitkom 10% bodova, ali da bi se iznos bodova vratio na onaj početni potreban je rast za više od 10%, točnije 11.1%, što mnogi zanemaruju.

Nadalje, drugi i treći igrač zaključili su da je 1.05 faktor koji određuje očekivani rast bodova nakon svakog kruga igre. Treći je igrač čak izračunao i očekivani broj bodova nakon 100 krugova. Je li to pogrešno? Zapravo nije. Slika 2 prikazuje prosjeke bodova iz 100 simulacija od po 100 bacanja novčiča: kao da 100 ljudi igra igru i u svakom trenutku $n = 0, 1, \ldots, 100$ zbrojimo njihove trenutne bodove i podijelimo ih sa 100. Upravo kao što su igrači i naslutili, ti prosjeci rastu i to „eksponencijalnom brzinom". Međutim, to nije relevantno za analizu rizika. Činjenica je da relativno mali broj igrača završi igru s vrlo velikim brojem bodova B_{100}, dok većina igrača igru završi s vrlo malim brojem bodova. Napomenimo kako je važan aspekt igre da je organizator ograničio dobitak na 200€ i da je za dobitak jedino važno završiti s brojem bodova barem 100, a inače je točan iznos broja bodova B_{100} nevažan (koliko god velik on bio).

Analizirajmo ovu igru kao matematičari! U daljnjem pretpostavljamo vrlo osnovno poznavanje koncepata *vjerojatnosti* $\mathbb{P}$, *očekivanja* $\mathbb{E}$ i *nezavisnosti*, na nivou srednjoškolskih udžbenika [6, 7]. Intuitivno, očekivanje je „srednja vrijednost" slučajne varijable. Preciznije, ako slučajna vari-



Slika 2. Prosjek 100 simulacija od po 100 bacanja.

jabla X poprima konačno mnogo različitih vrijednosti

$$a_1, a_2, \ldots, a_M \in \mathbb{R} \tag{1}$$

i to s vjerojatnostima

$$\mathbb{P}(X = a_1) = p_1,\ \mathbb{P}(X = a_2) = p_2,\ \ldots,\ \mathbb{P}(X = a_M) = p_M, \tag{2}$$

tada je njezino očekivanje jednako

$$\mathbb{E}X = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots p_M a_M. \tag{3}$$

Ako su pak X i Y nezavisne slučajne varijable, tada vrijedi

$$\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y). \tag{4}$$

Kako bismo izlaganje učinili što elementarnijim, u cijelom ćemo članku pretpostavljati da slučajne varijable s kojima radimo poprimaju samo konačno mnogo vrijednosti.

Vratimo se na našu igru. U svakoj rundi broj bodova množi se slučajnom varijablom A_n koja je jednaka 1.5 s vjerojatnosti 1/2 i 0.6 također s vjerojatnosti 1/2. Imamo

$$B_N = 100 A_1 A_2 \cdots A_N$$

pa uzastopna primjena formule (4), a potom i (3) daju

$$\mathbb{E}B_N = 100(\mathbb{E}A_1)(\mathbb{E}A_2)\cdots(\mathbb{E}A_N) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{2} \cdot 0.6\right)^N.$$

U slučaju $N = 100$ doista dobijemo veliki očekivani konačni broj bodova:

$$\mathbb{E}B_{100} = 100 \cdot 1.05^{100} \approx 13150.$$

Ipak, ovaj izračun nije relevantan za procjenu rizika i u tome griješe likovi iz romana! Nama je zapravo zanimljiviji broj

$$\mathbb{P}(B_{100} \geqslant 100),$$

što je vjerojatnost da igrač na kraju doista osvoji dobitak. Taj broj smo već ranije eksperimentalno procijenili na 0.136, tj. na 13.6%. Umjesto da se bavimo računanjem više znamenki tog konkretnog broja, mi ćemo argumentirati da vjerojatnost dobitka $\mathbb{P}(B_N \geqslant 100)$ teži prema nuli kada broj bacanja novčića N neograničeno raste. Npr. već za $N = 1000$ bacanja novčića udio dobitnika drastično pada, kao što se može vidjeti iz tablice 2. Slutimo da je tada udio dobitnika manji od 1%, što ćemo kasnije moći i rigorozno pokazati.

Broj igrača	10	100	1000	10000	100000
Broj dobitnika	0	0	0	1	10

Tablica 2. Brojevi dobitnika pri $N = 1000$ bacanja novčića.

4. Logaritamska skala

Kako bismo najprije objasnili fenomen

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_N \geqslant 100) = 0, \tag{5}$$

a potom i dokazali tu tvrdnju, promotrit ćemo igru „na logaritamskoj skali”. Umjesto trenutnog broja bodova B_n radije gledajmo njihove dekadske logaritme

$$S_n = \log B_n.$$

Kao primjer, brojeve bodova iz triju simulacija sa slike 1 sada logaritmiramo i njihovo kretanje skiciramo na slici 3.

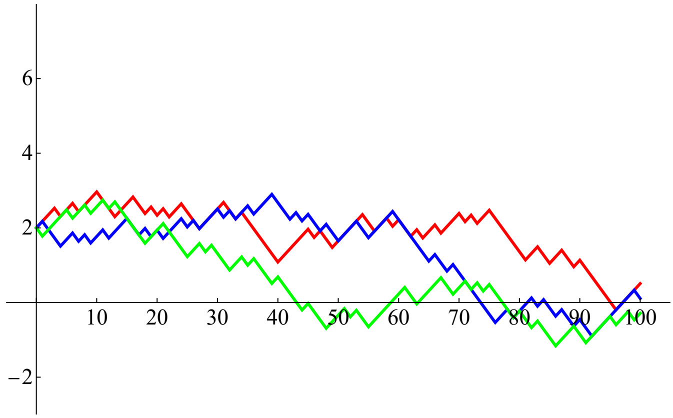
U n-tom koraku, s vjerojatnosti $1/2$ dogodi se

$$B_n = 1.5B_{n-1}, \quad \text{tj. } S_n - S_{n-1} = \log \frac{B_n}{B_{n-1}} = \log 1.5 = 0.176091259\ldots,$$

dok, također s vjerojatnosti $1/2$, imamo

$$B_n = 0.6B_{n-1}, \quad \text{tj. } S_n - S_{n-1} = \log \frac{B_n}{B_{n-1}} = \log 0.6 = -0.221848749\ldots.$$

Sada već postaje jasnije zašto je igra nepovoljna za igrače: s jednakim vjerojatnostima vrijednosti S_n naprave “korak gore” za otprilike 0.18 ili „korak dolje” za otprilike 0.22. Kako je korak dolje veći, vrlo je vjerojatno da će se, nakon dugo igranja, brojevi S_n sve više smanjivati i približavati $-\infty$, što znači da će se trenutni bodovi $B_n = 10^{S_n}$ približavati nuli.



Slika 3. Tri simulacije od po $N = 100$ bacanja na logaritamskoj skali.

Niz $S_0, S_1, S_2, \ldots$ ćemo u idućem odjeljku prepoznati kao tipični primjer slučajne šetnje, što će nam omogućiti da konačno i dokažemo (5).

5. Slučajne šetnje

Neka je $X_1, X_2, X_3, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s realnim vrijednostima i međusobno jednakim razdiobama. Radi naše radne pretpostavke ta „jednaka distribuiranost” zapravo znači da te varijable s jednakim vjerojatnostima poprimaju iste vrijednosti: $\mathbb{P}(X_n = a)$ ovisi samo o $a \in \mathbb{R}$, ali ne i o indeksu n. Neka je još $b \in \mathbb{R}$ fiksirani realni broj. Niz slučajnih varijabli $S_1, S_2, S_3, \ldots$ rekurzivno zadan sa

$$\begin{aligned} S_0 &= b, \\ S_n &= S_{n-1} + X_n \text{ za } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

nazivamo *slučajna šetnja* ili *slučajno gibanje* na skupu $\mathbb{R}$ s početkom u točki b. Ideja je da $S_n \in \mathbb{R}$ predstavlja poziciju nekog „šetača” u trenutku $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Razlika $S_n - S_{n-1} = X_n$ je šetačev n-ti korak i po gornjoj pretpostavci su koraci međusobno nezavisni i jednako distribuirani. Uzastopnom primjenom rekurzije može se S_N zapisati eksplicitno, u obliku sume

$$S_N = b + X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Osnovni teorem o dugoročnom ponašanju slučajne šetnje je sljedeći. Može ga se pronaći kao teorem 4.1.2 u knjizi [1].

Teorem 1. (a) *Ako koraci slučajne šetnje imaju negativno očekivanje, tj.* $\mathbb{E}X_1 < 0$*, tada ona konvergira prema* $-\infty$ *gotovo sigurno, tj.*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{N\to\infty} S_N = -\infty\Big) = 1,$$

i po vjerojatnosti, tj. za svaki $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(S_N \geqslant x) = 0. \tag{6}$$

(b) *Ako koraci slučajne šetnje imaju pozitivno očekivanje, tj.* $\mathbb{E}X_1 > 0$*, tada ona konvergira prema* $+\infty$ *gotovo sigurno, tj.*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty\Big) = 1,$$

i po vjerojatnosti, tj. za svaki $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(S_N \leqslant x) = 0.$$

(c) *Ako koraci slučajne šetnje zadovoljavaju* $\mathbb{E}X_1 = 0$ *i* $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$*, tada ona gotovo sigurno poprima i proizvoljno male i proizvoljno velike vrijednosti, tj.*

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{N\to\infty} S_N = -\infty,\ \limsup_{N\to\infty} S_N = +\infty\Big) = 1.$$

Specijalizirajmo sada spomenuto na našu igru. Kako koraci slučajne šetnje pridružene našoj igri imaju očekivanje

$$\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2}\cdot\log 1.5 + \frac{1}{2}\log 0.6 < 0, \tag{7}$$

formula (6) doista garantira

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(B_N \geqslant 100) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(S_N \geqslant 2) = 0.$$

Obzirom da je teorem 1 napredan rezultat iz teorije vjerojatnosti, bit će korisno dati direktni i jednostavni dokaz od (5).

6. Elementarni dokaz konvergencije

Sljedećim teoremom tvrdimo da

$$\mathbb{P}(B_N \geqslant B_0) = \mathbb{P}(B_N \geqslant 100)$$

pada brže od nekog geometrijskog niza.

Teorem 2. *Postoji broj $r \in \langle 0, 1\rangle$ takav da za svaki broj bacanja N vrijedi*

$$\mathbb{P}(B_N \geqslant B_0) \leqslant r^N.$$

Iz ovog rezultata će svakako slijediti (5). Naime, poznati *teorem o sendviču* govori o realnim nizovima (α_N), (β_N), (γ_N) uređenima tako da vrijedi $\alpha_N \leqslant \beta_N \leqslant \gamma_N$ za svaki indeks $N \geqslant 1$. On tvrdi da, ako postoje i jednaki su limesi $\lim_{N\to\infty} \alpha_N$ i $\lim_{N\to\infty} \gamma_N$, tada niz (β_N) također konvergira i to prema istom tom limesu. Nakon što pokažemo teorem 2, moći ćemo uzeti

$$\alpha_N = 0, \quad \beta_N = \mathbb{P}(B_N \geqslant B_0), \quad \gamma_N = r^N$$

te iskoristiti poznatu tvrdnju da geometrijski niz s kvocijentom iz $\langle -1, 1\rangle$ konvergira prema 0.

Prije dokaza primijetimo još da za svaku slučajnu varijablu X i svaki broj $c > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(|X| \geqslant c\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{c}. \tag{8}$$

To je tzv. *Markov–Čebiševljeva nejednakost.* Ako X poprima vrijednosti (1) s vjerojatnostima (2), tada ona slijedi iz računa

$$\mathbb{E}|X| = \sum_{i=1}^{M} p_i|a_i| \geqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ |a_i|\geqslant c}} p_i|a_i| \geqslant c \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ |a_i|\geqslant c}} p_i = c\,\mathbb{P}(|X| \geqslant c).$$

Dokaz teorema 2. Za bilo koji broj $w > 1$ (kojeg ćemo kasnije pažljivo odabrati) imamo

$$\mathbb{P}(B_N \geqslant B_0) = \mathbb{P}(S_N \geqslant S_0) = \mathbb{P}(S_N - S_0 \geqslant 0) = \mathbb{P}(w^{S_N - S_0} \geqslant 1),$$

a primjenom nejednakosti (8) na $X = w^{S_N - S_0}$ i $c = 1$ dobivamo

$$\mathbb{P}(w^{S_N - S_0} \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(w^{S_N - S_0}).$$

Sada nezavisnost i formula (4) daju

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(w^{S_N - S_0}) &= \mathbb{E}(w^{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}) \\ &= \mathbb{E}(w^{X_1} w^{X_2} \cdots w^{X_N}) \\ &= (\mathbb{E}w^{X_1})(\mathbb{E}w^{X_2}) \cdots (\mathbb{E}w^{X_N}).\end{aligned}$$

Računanjem $\mathbb{E}w^{X_n}$ po definiciji (3) konačno dobivamo

$$\mathbb{P}(B_N \geqslant B_0) \leqslant f(w)^N,$$

pri čemu je

$$f(w) = \frac{1}{2}w^{\log 1.5} + \frac{1}{2}w^{\log 0.6}.$$

Preostaje naći broj $w > 1$ takav da je $f(w) < 1$ te potom staviti $r = f(w)$.

Kada bismo uzeli $w = 10$, bilo bi kao da smo zaboravili na logaritamsku skalu i ne bismo ništa profitirali jer je $f(10) = (1.5+0.6)/2 > 1$. Zato je ideja uzeti w koji je samo malo veći od 1. Graf funkcije f prikazan je na slici 4. Čitatelj koji nije upoznat s derivacijama može naprosto uzeti recimo $w = 1.2$ i „očitati" sa slike da doista vrijedi $f(1.2) < 1$.

Ipak, bolje je dati rigorozni argument, koji se ne poziva na sliku. Imamo

$$f'(w) = \frac{\log 1.5}{2}w^{\log 1.5 - 1} + \frac{\log 0.6}{2}w^{\log 0.6 - 1}$$

pa iz (7) odmah slijedi

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{\log 1.5 + \log 0.6}{2} < 0.$$

Kako

$$\lim_{w\to 1} \frac{f(w) - 1}{w - 1}$$

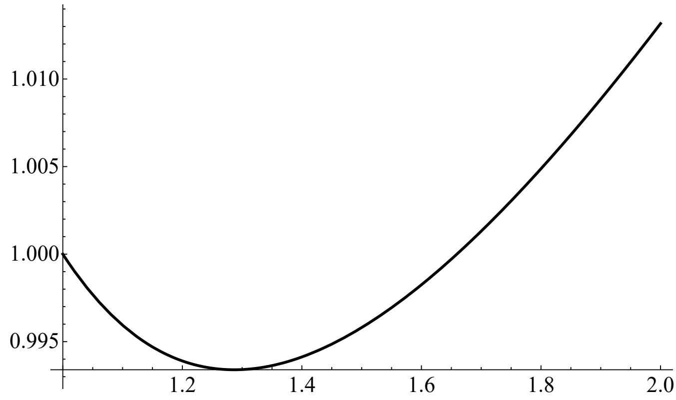
postoji i negativan je, zaključujemo da za sve brojeve w iz nekog intervala oblika $\langle 1, 1 + \delta\rangle$, $\delta > 0$, vrijedi $f(w) < 1$. Bilo koji takav w je dobar izbor. □

Numerička minimizacija funkcije f iz prethodnog dokaza pokazuje da je najbolje uzeti $w \approx 1.28672$, kada je $r = f(w) \approx 0.993396$. Dakle, zapravo imamo sasvim konkretnu ocjenu

$$\mathbb{P}(S_N \geqslant S_0) \leqslant 0.9934^N.$$

Odavde primjerice vidimo da je vjerojatnost konačnog dobitka prilikom $N = 1000$ bacanja novčića manja od 0.001331, tj. doista je mnogo manja od 1%.

Trik ocjene vjerojatnosti oblika $\mathbb{P}(X \geqslant c)$ dizanjem slučajne varijable X na potenciju s pogodno odabranom bazom w nekada se zove *metoda eksponencijalnog momenta*; vidjeti odjeljak 5.1 u stručnom radu [4].



Slika 4. Graf funkcije f iz dokaza teorema 2.

7. Komentar

Detaljnu matematičku analizu spomenute igre iz [2] načinili su Göll i Hug u članku [3]. Na naše iznenađenje, niti u knjizi [2] niti u radu [3] ne spominje se pojam *slučajne šetnje*, za kojeg smatramo da značajno pojednostavljuje analizu igre. To nam je ujedno bila glavna motivacija za pisanje ovog članka. U privatnoj komunikaciji autori od [3] su nam objasnili da su kompliciranijom analizom željeli pokriti i varijantu igre s malo izmijenjenim pravilom za konačni dobitak: igrač ne odlazi nužno ili praznog džepa ili s dvostrukim ulogom, već npr. s iznosom jednakim konačnom broju svojih bodova, ukoliko je taj broj između 0 i 100. Svejedno, takva promjena pravila minorno utječe na analizu igre za veliki broj bacanja N.

Teorija vjerojatnosti obiluje prividnim paradoksima, od kojih se mnogi mogu sasvim elementarno formulirati. Još nekoliko takvih zainteresirani čitatelj može naći u diplomskom radu [5].

Literatura

[1] R. Durrett, *Probability—theory and examples*, četvrto izdanje, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] M. Elsberg, *Gier—Wie weit würdest du gehen?*, Blanvalet, München, 2019. Engleski prijevod: Simon Pare (prev.), *Greed*, Black Swan, 2020.

[3] T. Göll, D. Hug, *On a game of chance in Marc Elsberg's thriller "GREED"*, preprint (2021.), dostupno na `https://arxiv.org/abs/2111.10323v1` (pristupljeno 22. 11. 2021.).

[4] V. Kovač, *Dokazivanje nejednakosti korištenjem simetrija*, Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, vol. 2. (2019.), 127.–148.

[5] K. Kovačević, *Paradoksi u elementarnoj teoriji vjerojatnosti*, diplomski rad, PMF, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2021.

[6] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: I. dio: osnove vjerojatnosti, kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[7] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: II. dio: osnove statistike, slučajne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

Vjekoslav Kovač
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb
E-mail adresa: `vjekovac@math.hr`

Kristina Kovačević
Croatia osiguranje, Neživotna osiguranja, Zagreb
E-mail adresa: `kika.kovac77@gmail.com`