ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 35–40
Zaprimljen: 5. studenog 2021.
Prihvaćen: 23. prosinca 2021.

Je li racionalni izbor uvijek najbolji?

Aljoša Šubašić

Sažetak

Ovaj rad zamišljen je kao potencijalni dodatni materijal u nastavi matematike na osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj razini u kojem se na jednostavan način prikazuju neki koncepti iz teorije igara. U njemu je obrađeno nekoliko elementarnih pojmova iz teorije igara te je prikazan jedan od paradoksa na kojeg unutar te teorije nailazimo. Da bismo odgovorili na pitanje iz naslova prvo dajemo neke osnovne definicije kako bismo mogli preciznije znati na što se točno odnose pojmovi racionalnosti i izbora. Konačno konstruiramo i primjer koji nam daje odgovor na postavljeno pitanje, a koji je, ukratko, ne.

Ključni pojmovi: teorija igara, racionalnost

1. Uvod

Teorija igara razvila se ponajviše u 20. stoljeću. Značajan utjecaj na njezin razvoj imali su matematičari poput Johna von Neumanna i Johna Nasha. Sa životom i radom potonjeg šira se publika imala prilike upoznati u biografskom filmu „Genijalni um”. Koliko se u međuvremenu popularizirala svjedoči i podatak da su od 2014. do danas čak 11 teoretičara igara dobili Nobelovu memorijalnu nagradu za ekonomske znanosti koja iako nije formalno Nobelova nagrada se popularno naziva Nobelovom nagradom za ekonomiju. Postoje brojne definicije pojma igre u matematičkom smislu, kao i same teorije igara. Roger B. Myerson u [1] definira teoriju igara kao proučavanje matematičkih modela sukoba i suradnje među racionalnim donositeljima odluka.

Phillip D. Straffin u [2] definira igru kao bilo koju situaciju u kojoj:

- Postoje barem dva igrača;
- Svaki igrač ima određeni broj mogućih strategija, nizova akcija koje može izabrati i slijediti;
- Strategije odabrane od strane svih igrača određuju ishod igre;
- Svakom ishodu igre pridružen je skup numeričkih isplata za svakog igrača.

Jasno je da ovakva definicija ne udovoljava inače puno strožim zahtjevima definiranja matematičkih pojmova, te se oslanja na intuitivno razumijevanje pojmova igrača, strategije, ishoda i isplate, ali za potrebe ovog rada bit će nam sasvim adekvatna.

Da dobijemo malo bolji dojam o tipu situacija koje ćemo promatrati konstruirajmo igru s dva igrača, koje ćemo nazvati Ana i Branko. Pretpostavimo da Ana i Branko pred sobom imaju tablicu s n redaka i m stupaca. Ćelije te tablice sadrže uređene parove realnih brojeva koji predstavljaju isplate za Anu i Branka redom. Prikaz jedne takve tablice možemo vidjeti na slici 1.

		Branko		
		B1	B2	B3
Ana	A1	(1,8)	(3,2)	(2,4)
	A2	(2,2)	(7,5)	(5,4)

Slika 1. Primjer tablice isplata za igru s dva igrača.

Ana i Branko zajednički biraju ćeliju koja će predstavljati ishod ove igre, i samim time žele odabrati onu koja će im dati najveću isplatu. Jasno, Ana i Branko žele maksimizirati vlastitu isplatu i ne zanima ih ona drugog igrača. Pravila odabira ćelije su sljedeća: Ana tajno odabire redak u kojem će se nalaziti izabrana ćelija. Možemo, na primjer, zamisliti da Ana na komad papirića zapisuje ime retka kojeg je odabrala i položi ga neotkrivenog na stol. Branko zatim na isti način odabire stupac. Ćelija koja se nalazi u odabranom retku i stupcu predstavlja konačan ishod ove igre.

Sve što Ana mora napraviti u ovoj igri je izabrati jedan od n redaka. Svaki od tih n mogućih izbora predstavlja jednu njezinu strategiju. Na isti način vidimo da Branko ima m mogućih strategija. U sljedećem poglavlju vidjeti ćemo kako možemo usporediti različite strategije jednog igrača.

2. Dominantne i dominirane strategije

Promotrimo igru sa slike 1. Ana može birati jedan od ponuđena dva retka. Nazovimo te izbore strategijom A1 i strategijom A2. Primijetimo da koji god od stupaca Branko odabrao Ana ima veću isplatu ako odabere strategiju A2 nego strategiju A1. Ako Branko odabere stupac B1, Ani je isplata u retku A2 veća od one u retku A1 tj. $2 > 1$. Na isti način, za izbore stupaca B2 imamo $7 > 3$ i za B3 imamo $5 > 2$. U takvom slučaju, kažemo da je strategija A2 dominantna nad strategijom A1, tj. da je strategija A1 dominirana od strategije A2. Preciznije, kažemo da je strategija X dominantna nad strategijom Y ako je svaki ishod u strategiji X jednak ili veći od onog odgovarajućeg u strategiji Y, a barem jedan od ishoda u strategiji X je strogo veći od onog odgovarajućeg u strategiji Y.

Primjetimo da Branku nijedna strategija ne dominira nad nekom drugom strategijom. Usporedimo li strategije B1 i B2 vidimo da je jedna bolja u slučaju da Ana odabere A1, a druga u slučaju Aninog odabira A2. Iste zaključke donosimo kada usporedimo B1 i B3, te B2 i B3.

U igri sa slike 1 Anina najveća moguća isplata iznosi 7 i nalazi se u ishodu u drugom retku i drugom stupcu. S druge strane, Brankova najveća moguća isplata iznosi 8 i nalazi se u ishodu u prvom retku i prvom stupcu. Mogu li se Ana ili Branko „dokopati” svoje najveće moguće isplate u ovoj igri? Treba li Branko bez razmišljanja odabrati stupac B1 jer se tu nalazi njegov željeni ishod ili ipak treba uzeti u obzir da je Ana racionalni igrač? O pojmu racionalnosti i izborima na temelju iste, govorimo u sljedećem poglavlju.

3. Što znači racionalno?

Teorija igara podrazumijeva da su igrači koji sudjeluju u proučavanim igrama racionalni. Štoviše, podrazumijeva da je opće znanje da su svi sudionici racionalni. To znači da osim što su sudionici racionalni, svaki od njih zna i da su ostali sudionici racionalni. Čak i više od tog, zna i da svi ostali znaju da su svi ostali racionalni i tako dalje. Možemo zamisliti to kao da je netko stavio Anu i Branka u istu prostoriju i rekao im prije igre: oboje ste racionalni igrači. Sada Ana osim što zna da je Branko racionalan igrač, zna i da on zna da je ona racionalan igrač i tako dalje. To znanje je ključno pri donošenju odluka u igrama koje ćemo konstruirati.

Kao što možemo vidjeti, teorija igara podrazumijeva interakciju racionalnih igrača. Međutim, racionalnost je također pojam oko kojeg se moramo složiti kako bismo mogli odgovoriti na pitanje iz naslova. Prije nego damo jedan od principa teorije igara koji podrazumijeva racionalnost, dat ćemo jedan primjer koji taj pojam dobro ilustrira.

Zamislite da se nalazite u sljedećoj situaciji. Ispred vas se nalaze tri kutije označene slovima A, B i C. Kutije su zatvorene i u njima se nalazi novac. Možete uzeti novac iz samo jedne kutije i pretpostavka je da želite uzeti što više novca. Na svakoj od kutija stoji informacija o količini novca u kutiji. One su kako slijedi:

- U kutiji A se nalazi 5 kuna
- U kutiji B se nalazi 5 ili 10 kuna
- U kutiji C se nalazi iznos između 1 i 20 kuna

Iz koje kutije ćete uzeti novac?

Na intuitivnoj razini zaključujete da ne bi bilo racionalno uzeti novac iz kutije A jer bi odabirom kutije B ostvarili dobit barem jednaku kao i s kutijom A, a moguće i veću. Igrač koji je skloniji riziku bi možda odabrao kutiju C, koja će možda donijeti veći, a možda manji iznos od kutije B, međutim riskantno ponašanje ne smatramo iracionalnim. Ovo razmišljanje nas dovodi do jednog od osnovnih principa teorije igara koje glasi: „Nikad ne igraj strategije koje su dominirane od strane neke druge strategije”. Mogli bi se zapitati, može li se ovo izreći jednostavnije i afirmativno, kao na primjer, „Igraj dominantne strategije”. Međutim, kako smo u prethodnom primjeru imali priliku vidjeti, strategija koja je dominantna nad nekom strategijom, može biti neusporediva s nekom trećom strategijom ili čak dominirana njom. Tako da nam ovaj princip, ne govori što da radimo, koliko što da NE radimo, pa ga zbog toga koristimo za eliminaciju strategija koje racionalni igrač ne bi smio odabrati.

4. Kamo nas racionalnost može odvesti?

Pogledajmo sada primjer igre sa slike 2.

	E	F	G	H
A	(4,5)	(7,2)	(0,4)	(2,7)
B	(2,7)	(6,2)	(0,4)	(4,5)
C	(1,8)	(5,5)	(0,9)	(3,6)
D	(5,-1)	(4,0)	(0,0)	(5,-1)

Slika 2. Igra s dva igrača u kojoj svaki ima četiri strategije.

Odmah možemo primijetiti da se u igri nalazi ishod poput onog u retku C i stupcu F koji za oba igrača ima isplatu 5 te koji, ako zbrojimo isplate oba igrača, ima ukupno najveću isplatu. Ovu igru sam kroz razna predstavljanja teorije igara srednjoškolskim učenicima, ponudio za igranje u parovima. U gotovo svim slučajevima, učenici, bez prethodnog dogovora i komunikacije, odigraju igru s ishodom (C,F) i završe svaki s isplatom 5. Što se, međutim, dogodi kada u igru, umjesto srednjoškolaca, ubacimo dva savršeno racionalna igrača? Nazovimo ih, opet, Ana i Branko, te prepustimo Ani izbor retka, a Branku izbor stupca.

Prikažimo njihovo rezoniranje kako slijedi:
Ana: „Što god Branko odabrao izbor retka B mi je jednako dobar ili bolji od izbora retka C. Ne znači da ću odabrati B, ali svakako nema nikakvog smisla da odaberem C."
Branko: „Ana je racionalna i sigurno neće odabrati C pa se možemo ponašati kao da tog izbora uopće ni nema. "

Sada kada ni Ana ni Branko ne uzimaju C kao mogućnost, zapravo igraju igru kao na slici 3.

	E	F	G	H
A	(4,5)	(7,2)	(0,4)	(2,7)
B	(2,7)	(6,2)	(0,4)	(4,5)
D	(5,-1)	(4,0)	(0,0)	(5,-1)

Slika 3. Igra sa slike 2 nakon eliminacije strategije C.

Nastavimo dalje s Aninim i Brankovim slijedom razmišljanja.
Branko: „Moj izbor stupca G je uvijek jednako dobar ili bolji od izbora stupca F pa nema nikakvog smisla da njega odaberem."
Ana: „Branko je racionalan i neće odabrati F pa se možemo ponašati kao da ni tog izbora nema."

Ovo nam našu igru sa slike 3 dodatno reducira na igru sa slike 4.

	E	G	H
A	(4,5)	(0,4)	(2,7)
B	(2,7)	(0,4)	(4,5)
D	(5,-1)	(0,0)	(5,-1)

Slika 4. Igra sa slike 2 nakon eliminacije strategija C i F.

Dovršimo sada Anino i Brankovo razmišljanje.
Ana: „Što god Branko odabrao meni je D jednako dobar ili bolji izbor od A i B pa te strategije neću odabrati, tj. izabrati ću D."
Branko: „Ana je racionalna i sigurno će odabrati D, pa je u tom slučaju meni najbolje odabrati G."

Drugim riječima, dana igra, pustimo li da je igraju dva savršeno racionalna igrača, koji će pratiti pravilo oko kojeg smo se složili da je racionalno, završiti će igranjem kombinacije strategija D i G, tj. ishodom (0,0).

5. Zaključak

Prije nego izvučemo konačne zaključke iz primjera prethodne igre uočimo nekoliko stvari. Prvo, da Ana i Branko nisu igrali kompetitivnu igru, tj. ni u kojoj mjeri nisu htjeli smanjiti dobitke onog drugog. Štoviše, tuđe dobitke su koristili isključivo za zaključivanje što bi ta osoba mogla igrati. Nadalje, iako su pravila igre takva da se redak i stupac biraju tajno, ništa se ne bi promijenilo ni da smo Ani i Branku dozvolili da se dogovaraju, te da razmišljaju naglas. Ana bi i dalje bila „ograničena" svojom racionalnošću i morala objasniti Branku da naprosto ne može igrati C jer nema racionalno opravdanje za to. Ostatak njihovih razmišljanja bi bio isti kako je i prethodno opisano. Drugim riječima, jedino što je Anu i Branka stavilo u nepovoljniji položaj u odnosu na prosječnog srednjoškolca je baš njihova racionalnost.

Iz svega prethodno opisanog možemo doći do zaključka da u igri, poput one iz primjera, u kojoj imamo ishod u kojem oba igrača mogu imati isplatu 5, ako su ti igrači savršeno racionalni, oboje će završiti sa isplatom 0 i to mogu zahvaliti jedino svojoj racionalnosti, što nam daje odgovor na pitanje postavljeno u naslovu.

Ovaj paradoks u kojem, zbog racionalizacije koja je vođena motivom za što većom isplatom, i koja nas time dovodi do puno manje isplate, smatram jednim lijepim i poprilično matematički „mekanim" uvodom u teoriju igara koji je, uz određene prilagodbe, primjeren za različite školske uzraste.

Literatura

[1] R. B. Myerson, *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, 1991.

[2] P. D. Straffin, *Game Theory and Strategy*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 2004.

Aljoša Šubašić
Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Ruđera Boškovića 33, Split

E-mail adresa: `aljsub@pmfst.hr`