ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 71–93
Zaprimljen: 12. svibnja 2022.
Prihvaćen: 25. rujna 2022.

Evoluta ravninske krivulje

Lea Vučković, Milena Sošić

Sažetak

Proučava se evoluta proizvoljne krivulje u ravnini i pritom se izvode formule za određivanje parametarskih jednadžbi evolute krivulje zadane vektorskom jednadžbom, odnosno parametarskim jednadžbama, a potom i za krivulje zadane ekplicitnom, implicitnom i polarnom jednadžbom. Opisat će se konstrukcija evolute i obrazložiti njezina svojstva. Detaljnije će se analizirati i grafički prikazati evolute nekih ravninskih krivulja. Također, objasnit će se konstrukcija evolvente krivulje i argumentirat njezina povezanost s evolutom.

Ključni pojmovi: evoluta ravninske krivulje, zakrivljenost krivulje, središte i polumjer kružnice zakrivljenosti, parametarske jednadžbe krivulje, evolventa

1. Uvod

Ovaj rad je proizašao iz završnog rada na Preddiplomskom studiju Matematika Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci koji je izradila studentica Lea Vučković pod mentorstvom doc. dr. sc. Milene Sošić. Rad je direktno povezan s kolegijem Uvod u diferencijalnu geometriju, gdje se proučavaju krivulje i plohe i njihova geometrijska svojstva primjenom diferencijalnog i integralnog računa i diferencijalnih jednadžbi.

Sve što nas okružuje možemo povezati s matematikom, odnosno diferencijalnom geometrijom, na način da predmete koje vidimo oko sebe promatramo kao krivulje i plohe koje nadalje možemo proučavati i analizirati te primjenom diferencijalnog računa opisati njihova geometrijska svojstva. U ovom radu ćemo detaljnije proučavati evolutu proizvoljne krivulje u ravnini. Prije nego li definiramo i opišemo konstrukciju evolute potrebno je definirati sljedeće pojmove iz područja diferencijalne geometrije.

- *Fleksija* (u oznaci χ) *ili zakrivljenost krivulje* Γ *u njezinoj proizvoljnoj točki* T je nenegativan realan broj kojim se izražava mjera odstupanja krivulje od pravca (tangente) u točki T. Specijalno, ako je fleksija jednaka nuli u nekoj točki krivulje Γ, onda tu točku nazivamo *točkom izravnavanja krivulje* Γ. Navedimo da je pravac jedina krivulja za koju vrijedi da je fleksija u svim njegovim točkama jednaka nuli. Drugim riječima, sve točke pravca su ujedno njegove točke izravnavanja.

- *Kružnica zakrivljenosti* (u oznaci k) *ili oskulacijska kružnica krivulje* Γ *u njezinoj proizvoljnoj točki* T (prema latinskoj riječi osculari što znači ljubiti) je kružnica koja se u okolini točke T krivulje Γ najviše od svih kružnica priljubljuje uz krivulju Γ.

- *Polumjer* (u oznaci r) *kružnice zakrivljenosti krivulje* Γ *u njezinoj proizvoljnoj točki* T je strogo pozitivan realan broj koji je obrnuto proporcionalan vrijednosti fleksije u točki T. Time je $r \cdot \chi = 1$, odakle proizlazi da je krivulja Γ zakrivljenija u onoj točki u kojoj je manji polumjer kružnice zakrivljenosti.

- *Središte kružnice zakrivljenosti krivulje* Γ *u njezinoj proizvoljnoj točki* T je točka P na normali krivulje Γ kroz točku T takva da je $d(P,T) = r$, vidi sliku 1. Dakle, udaljenost središta kružnice zakrivljenosti od točke T na krivulji Γ jednaka je polumjeru r kružnice zakrivljenosti krivulje Γ u točki T.

Definirani pojmovi fleksije, kružnice zakrivljenosti, polumjera i središta kružnice zakrivljenosti krivulje Γ u njezinoj proizvoljnoj točki direktno su povezani s definicijom evolute krivulje Γ koju ćemo u nastavku detaljnije objasniti.

2. Evoluta krivulje

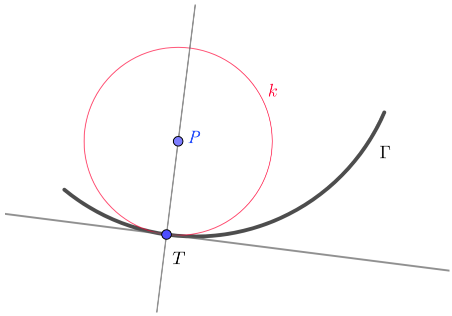
Naziv *evoluta* prozlazi iz latinske riječi *evolvere* što znači odmatati. Uz pojam evolute često se povezuje i pojam evolvente. To su dvije ravninske krivulje koje određenim postupkom nastaju jedna iz druge.[1] Neki povjesničari matematike smatraju da se grčki matematičar Apolonije (otprilike 200 g. pr. Kr.) prvi bavio proučavanjem evolute i evolvente krivulje

[1] Ako sa Γ_1 označimo evolutu krivulje Γ, onda kažemo da je krivulja Γ evolventa krivulje Γ_1. Drugim riječima, evolventa neke krivulje Γ_1 je ona krivulja Γ za koju vrijedi da je krivulja Γ_1 njezina evoluta.

u svom glavnom djelu *Konike*, gdje je temeljito obradio teoriju presjeka stožca i prvi za konike upotrijebio nazive *elipsa* i *hiperbola*. Međutim, većina povjesničara matematike smatraju da je evolutu i evolventu krivulje zapravo prvi proučavao nizozemski matematičar, fizičar i astronom Christiaan Huygens 1673. godine u svojim istraživanjima izučavanja sata s njihalom.

> *Evoluta ravninske krivulje* Γ je ravninska krivulja koju čini skup svih središta kružnica zakrivljenosti krivulje Γ.

U nastavku ćemo sa Γ_1 označavati evolutu krivulje Γ. Ideja konstrukcije evolute krivulje Γ može se objasniti pomoću slike 1.



Slika 1. Kružnica zakrivljenosti krivulje Γ u njezinoj proizvoljnoj točki T.

U proizvoljnoj točki T krivulje Γ najprije konstruiramo tangetu t i normalu n, a potom izračunamo fleksiju[2] χ u točki T i njezinu recipročnu vrijednost koja je jednaka polumjeru r kružnice zakrivljenosti u točki T. Središte P kružnice zakrivljenosti krivulje Γ u točki T konstruiramo na normali n krivulje Γ u točki T tako da je $d(P,T) = r$, gdje je $r = \frac{1}{\chi}$. Time se dobiva točka P koja je pripadna točka na evoluti Γ_1 krivulje Γ obzirom na točku T krivulje Γ. Iz rečenog proizlazi da evolutu Γ_1 krivulje Γ konstruiramo na sljedeći način.

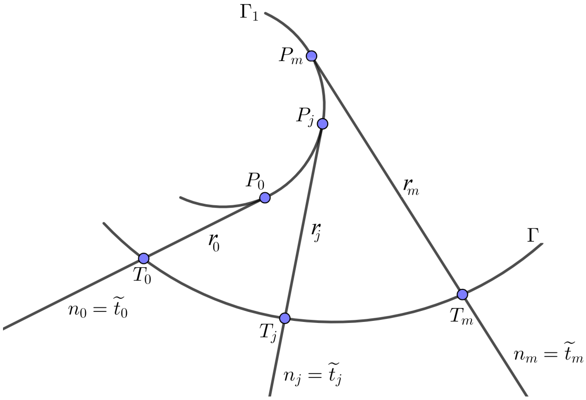
Neka je Γ proizvoljna regularna[3] krivulja koja nema nijednu točku izravnavanja[4] i označimo sa $T_0, \ldots, T_j, \ldots, T_m$ njezine proizvoljne točke tako da je krivulja Γ orijentirana od točke T_0 prema točki T_m. Za svaki $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ označimo s t_j tangentu i s n_j odgovarajuću normalu

[2]po definiciji je $\chi \geq 0$; ako u nekoj točki krivulje Γ fleksija poprima negativnu vrijednost, onda je u toj točki fleksija jednaka svojoj apsolutnoj vrijednosti; specijalno, ako je u nekoj točki krivulje Γ fleksija jednaka nuli, onda tu točku nazivamo točkom izravnavanja krivulje Γ što ima za posljedicu da u toj točki polumjer kružnice zakrivljenosti teži prema $+\infty$

[3]u svakoj točki krivulje postoji jedinstvena tangenta

[4]u svakoj točki krivulje fleksija je jednaka strogo pozitivnom realnom broju

na krivulju Γ u točki T_j, a potom u navedenim točkama izračunajmo fleksije χ_j krivulje Γ. Tada primjenom svojstva $r \cdot \chi = 1$ $(\chi > 0)$ slijedi da je $r_j = \frac{1}{\chi_j} = d(T_j, P_j)$ polumjer odgovarajuće kružnice zakrivljenosti, a P_j njezino središte za svaki $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Nanošenjem vrijednosti od r_j na odgovarajuću normalu n_j krivulje Γ u točki T_j dobiva se točka P_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ na evoluti Γ_1 krivulje Γ, vidi sliku 2. Pritom se pokazuje da je normala n_j u svakoj točki T_j zadane krivulje Γ ujedno tangenta $\widetilde{t}_j$ u odgovarajućoj točki P_j evolute Γ_1 krivulje Γ.



Slika 2. Konstrukcija evolute Γ_1 krivulje Γ.

Neovisno o obliku jednadžbe[5] krivulje Γ, evoluta krivulje Γ se uglavnom zadaje parametarskim jednadžbama kojima se koordinate središta kružnica zakrivljenosti točaka na krivulji Γ iskazuju u obliku realnih funkcija realne varijable.

U nastavku ćemo izvesti parametarske jednadžbe evolute krivulje Γ u ovisnosti o obliku zadavanja jednadžbe krivulje Γ.

2.1. Izvod parametarskih jednadžbi evolute krivulje Γ zadane vektorskom jednadžbom

Neka je $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup skupa realnih brojeva i neka je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora (ravnine) $\mathbb{R}^2$. Kažemo da je preslikavanje $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^2$ sa intervala I u vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ *vektorska funkcija skalarnog argumenta* ako je svakom elementu $t \in I$ pridružen vektor $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$, gdje je $\vec{x}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Pritom su $x = x(t)$ i $y = y(t)$ realne funkcije realne varijable t. Interval I se naziva domena

[5] eksplicitna ili implicitna ili polarna ili vektorska jednadžba ili parametarske jednadžbe

vektorske funkcije $\vec{x}$, a skup $\vec{x}(I) = \{\vec{x}(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ slika vektorske funkcije $\vec{x}$.

Vektorsku funkciju $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^2$ nazivamo *parametrizacijom krivulje u ravnini* $\mathbb{R}^2$ ako je ona klase C^∞ na I (tj. ako ona ima neprekidne derivacije svakog reda za svaki $t \in I$). Pritom jednadžbu

$$\vec{x}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}, \quad t \in I \tag{1}$$

nazivamo *vektorskom jednadžbom krivulje* Γ, a jednadžbe

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I \tag{2}$$

nazivamo *parametarskim jednadžbama krivulje* Γ.

Krivulja Γ je skup svih točaka $(x, y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ ravnine $\mathbb{R}^2$ takvih da vrijedi (2) i pišemo: $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$.

Napomenimo da se u diferencijalnoj geometriji uz parametrizacije krivulja u prostoru $\mathbb{R}^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ češće proučavaju regularne parametrizacije krivulja. To su one parametrizacije krivulja $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^2$ zadane vektorskom jednadžbom (1) za koje vrijedi uvjet regularnosti[6] $\vec{x}\,'(t) \neq \vec{0}$ za svaki $t \in I$, gdje je

$$\vec{x}\,'(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}, \quad t \in I. \tag{3}$$

Specijalno, ako je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama (2), onda se uvjet regularnosti zapisuje u obliku: *za svaki $t \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ postoji barem jedan od $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ različit od nule.*

U nastavku ćemo promatrati regularne krivulje u ravnini zadane vektorskom jednadžbom (1) koje nemaju točke izravnavanja (u svakoj točki krivulje Γ fleksija poprima strogo pozitivnu realnu vrijednost).

U kontekstu navedenog, neka je Γ regularna krivulja zadana vektorskom jednadžbom (1) koja nema točke izravnavanja. Označimo s:

$T = (x(t), y(t))$ proizvoljnu točku na krivulji Γ,

$r(t)$ polumjer kružnice zakrivljenosti krivulje Γ u točki T,

$\vec{N}(t)$ jedinični vektor normale[7] na krivulju Γ u točki T,

$\vec{x}_e = \vec{x}_e(t)$ vektorsku jednadžbu evolute Γ_1 krivulje Γ.

Tada obzirom na opisanu konstrukciju evolute Γ_1 krivulje Γ (vidi sliku 2) proizlazi da se vektorska jednadžba evolute krivulje Γ može zapisati u obliku:

$$\vec{x}_e(t) = \vec{x}(t) + r(t) \cdot \vec{N}(t) \quad \text{za svaki} \;\; t \in I. \tag{4}$$

[6]sve točke krivulje Γ su regularne točke. Drugim riječima, u svakoj točki krivulje Γ postoji jedinstvena tangenta.

[7]čiji je pravac nosioc normala n

Pritom se polumjer kružnice zakrivljenosti i jedinični vektor normale u proizvoljnoj točki T krivulje Γ izračunavaju primjenom sljedećih formula:

$$r(t) = \frac{|\vec{x}'(t)|^3}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|} \tag{5}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\big(\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\big) \times \vec{x}'(t)}{|\vec{x}'(t)| \cdot |\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|}, \tag{6}$$

gdje je $\vec{x}'(t)$ derivacija prvog reda vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(t)$ dana s (3), a

$$\vec{x}''(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j}, \quad t \in I.$$

je derivacija drugog reda vektorske funkcije $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Uvrštavanjem identiteta (5) i (6) u (4) proizlazi vektorska jednadžba evolute Γ_1 krivulje Γ:

$$\vec{x}_e(t) = \vec{x}(t) + \frac{|\vec{x}'(t)|^2}{|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|^2} \cdot \big((\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\big) \times \vec{x}'(t). \tag{7}$$

Primjenom svojstva vektorskog produkta dva vektora

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{j})$$

dobivamo:

$$\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) = \big(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)\big)\,\vec{k}. \tag{8}$$

Uzimajući u obzir da je $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ i da je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ desno orijentirana ortonormirana baza od $\mathbb{R}^2$, odnosno da je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ desno orijentirana ortonormirana baza od $\mathbb{R}^3$, proizlazi: $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$. Time dobivamo:

$$\begin{aligned}
(\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)) \times \vec{x}'(t) &= \big((\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t))\,\vec{k}\big) \times \big((\dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}\big) \\
&= \big(\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)\big) \cdot \big(- \dot{y}(t)\,\vec{i} + \dot{x}(t)\,\vec{j}\big).
\end{aligned}$$

Koristeći definiciju duljine vektora $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ na identitete (3) i (8) direktno proizlazi:

$$|\vec{x}'(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t),$$

$$|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)|^2 = (\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t))^2.$$

Nadalje, primjenom dobivenih identiteta slijedi da se vektorska jednadžba (7) evolute Γ_1 krivulje Γ može pisati u obliku:

$$\vec{x}_e(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + \frac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \cdot \big(- \dot{y}(t)\,\vec{i} + \dot{x}(t)\,\vec{j}\big),$$

odnosno:

$$\vec{x}_e(t) = \left(x(t) - \frac{\dot{y}(t)\big(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\big)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \right) \vec{i} + \left(y(t) + \frac{\dot{x}(t)\big(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\big)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \right) \vec{j},$$

odakle direktno proizlazi da su

$$x_e = x(t) - \frac{\dot{y}(t)\big(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\big)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \quad y_e = y(t) + \frac{\dot{x}(t)\big(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\big)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \tag{9}$$

parametarske jednadžbe evolute Γ_1 krivulja Γ zadane vektorskom jednadžbom (1) ili parametarskim jednadžbama (2). Pritom se podrazumijeva da je

$$\vec{x}_e(t) = x_e(t)\vec{i} + y_e(t)\vec{j}, \quad t \in I.$$

opći zapis vektorske jednadžbe evolute.

U ovisnosti o obliku zadavanja jednadžbe krivulje Γ dobivaju se odgovarajuće parametarske jednadžbe njezine evolute, no sve one direktno proizlaze iz parametarskih jednadžbi (9) što ćemo u nastavku detaljnije obrazložiti.

2.2. Parametarske jednadžbe evolute krivulje Γ u ovisnosti o obliku jednadžbe krivulje Γ

2.2.1 Krivulja zadana eksplicitnom jednadžbom

Neka je krivulja Γ zadana eksplicitnom jednadžbom $y = y(x)$. Tada su

$$x_e = x - \frac{y'(1 + y'^{\,2})}{y''}, \qquad y_e = y + \frac{1 + y'^{\,2}}{y''} \tag{10}$$

parametarske jednadžbe evolute krivulje Γ.

U nastavku ćemo pokazati da jednadžbe (10) proizlaze iz jednadžbi (9) koristeći svojstvo da se eliminacijom parametra t iz parametarskih jednadžbi (2) krivulje Γ dobiva njezina pripadna eksplicitna jednadžba $y = y(x)$.

Uočimo da vrijedi i obrat, svaka eksplicitna jednadžba $y = y(x)$, $x \in I_1 \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljne krivulje Γ može se zapisati u obliku parametarskih jednadžbi (2) ako se varijable x i y proglase realnim funkcijama realne varijable t, gdje je $I \mapsto I_1$ bijektivno preslikavanje klase C^∞ na I.

Pretpostavimo da je krivulja Γ zadana parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ i da se eliminacijom parametra t dobiva eksplicitna jednadžba $y = y(x)$, $x \in I_1 \subseteq \mathbb{R}$ krivulje Γ.

Tada primjenom diferencijalnog računa proizlazi:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},$$

$$y''(x) = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{\frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^2(t)}}{\dot{x}(t)} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^3(t)},$$

odakle slijedi:

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = y'(x), \qquad \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^3(t)} = y''(x), \tag{11}$$

gdje je $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$. Ako parametarske jednadžbe (9) zapišemo u obliku

$$x_e = x(t) - \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{\dot{x}^3(t) \cdot \left(1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}, \qquad y_e = y(t) + \frac{\dot{x}^3(t) \cdot \left(1 + \frac{\dot{y}^2(t)}{\dot{x}^2(t)}\right)}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)},$$

odnosno

$$x_e = x(t) - \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}{\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^3(t)}}, \qquad y_e = y(t) + \frac{1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)^2}{\frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\dot{x}^3(t)}},$$

onda se primjenom identiteta (11) dobivaju parametarske jednadžbe (10).

2.2.2 Krivulja zadana implicitnom jednadžbom

Ako je krivulja Γ zadana implicitnom jednadžbom $F(x, y) = 0$, onda su parametarske jednadžbe evolute krivulje Γ oblika:

$$x_e = x + \frac{F_x(F_x^2 + F_y^2)}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}, \qquad y_e = y + \frac{F_y(F_x^2 + F_y^2)}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}, \tag{12}$$

gdje je:

$$F_x = F_x(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad F_y = F_y(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

$$F_{xx} = F_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad F_{yy} = F_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2},$$

$$F_{xy} = F_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F_{yx}(x, y) = F_{yx}.$$

Dakle, neka je krivulja Γ zadana implicitnom jednadžbom $F(x, y) = 0$. Primjenom svojstva derivacije implicitno zadane funkcije, deriviranjem jednadžbe $F(x, y) = 0$ dobivamo:

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot y' = 0, \tag{13}$$

odakle slijedi:

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \tag{14}$$

uz pretpostavku da je $F_y(x,y) \neq 0$ za svaki (x,y) iz domene funkcije F. Nadalje, deriviranjem jednadžbe (13) proizlazi:

$$F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y) \cdot y' + F_{yx}(x,y) \cdot y' + F_{yy}(x,y) \cdot y'^{\,2} + F_y(x,y) \cdot y'' = 0,$$

odakle slijedi

$$y'' = -\frac{1}{F_y(x,y)} \Bigg(F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y) \cdot \Big(-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \Big) + F_{yx}(x,y) \cdot \Big(-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \Big) + F_{yy}(x,y) \cdot \frac{F_x^2(x,y)}{F_y^2(x,y)} \Bigg),$$

odnosno

$$y'' = \frac{1}{F_y^3} \left(-F_{xx}F_y^2 + F_{xy}F_xF_y + F_{yx}F_xF_y - F_{yy}F_x^2 \right),$$

što možemo pisati u obliku sljedeće determinante trećeg reda

$$y'' = \frac{1}{F_y^3} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Pritom smo koristili identitet (14) i prethodno uvedene pokrate za parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije F.

S druge strane, primjenom identiteta (14) dobivamo $1 + y'^{\,2} = 1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}$, odnosno

$$1 + y'^{\,2} = \frac{1}{F_y^2}(F_x^2 + F_y^2). \tag{16}$$

Koristeći identitete[8] (14), (15) i (16) slijedi da se parametarske jednadžbe (10) evolute krivulje zadane eksplicitnom jednadžbom mogu zapisati u obliku:

$$x_e = x - \frac{-\frac{F_x}{F_y}\frac{1}{F_y^2}(F_x^2 + F_y^2)}{\frac{1}{F_y^3}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}, \qquad y_e = y + \frac{\frac{1}{F_y^2}(F_x^2 + F_y^2)}{\frac{1}{F_y^3}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}},$$

odakle nakon sređivanja direktno proizlaze parametarske jednadžbe (12) evolute krivulje zadane implicitnom jednadžbom.

[8]kojima je dana veza između derivacija eksplicitno i implicitno zadane funkcije

2.2.3 Krivulja zadana polarnom jednadžbom

Ako je krivulja Γ zadana u polarnom sustavu polarnom jednadžbom $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi \in I_\varphi \subseteq \mathbb{R}$, onda su

$$\begin{aligned} x_e &= \varrho\cos\varphi - \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)(\varrho\cos\varphi + \varrho'\sin\varphi)}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''} \\ y_e &= \varrho\sin\varphi - \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)(\varrho\sin\varphi - \varrho'\cos\varphi)}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''} \end{aligned} \tag{17}$$

parametarske jednadžbe evolute krivulje Γ.

Podsjetimo se, ako je krivulja Γ zadana polarnom jednadžbom $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\varphi \in I_\varphi \subseteq \mathbb{R}$, onda se njezine parametarske jednadžbe dobivaju uvođenjem supstitucija

$$x(\varphi) = \varrho\cos\varphi, \quad y(\varphi) = \varrho\sin\varphi, \tag{18}$$

gdje su $x = x(\varphi)$ i $y = y(\varphi)$ realne funkcije realne varijable $\varphi \in I_\varphi \subseteq \mathbb{R}$. Pritom su (18) ujedno parametarske jednadžbe krivulje Γ zadane polarnom jednadžbom $\varrho = \varrho(\varphi)$.

Izračunavanjem derivacija prvog i drugog reda jednadžbi (18) dobivamo:

$$\dot{x}(\varphi) = \varrho'\cos\varphi - \varrho\sin\varphi, \quad \dot{y}(\varphi) = \varrho'\sin\varphi + \varrho\cos\varphi \tag{19}$$

$$\ddot{x}(\varphi) = \varrho''\cos\varphi - 2\varrho'\sin\varphi - \varrho\cos\varphi,\ \ddot{y}(\varphi) = \varrho''\sin\varphi + 2\varrho'\cos\varphi - \varrho\sin\varphi,$$

stoga je:

$$\dot{x}^2(\varphi) + \dot{y}^2(\varphi) = \varrho^2 + \varrho'^{\,2}, \quad \dot{x}(\varphi)\ddot{y}(\varphi) - \ddot{x}(\varphi)\dot{y}(\varphi) = \varrho^2 + 2\varrho'^{\,2} - \varrho\varrho''. \tag{20}$$

Specijalno, za $t = \varphi$, uvrštavanjem identiteta (18), (19) i (20) u jednadžbe (9) i dodatnim sređivanjem dobivaju se parametarske jednadžbe (17) evolute krivulje Γ zadane polarnom jednadžbom.

2.3. Svojstva evolute krivulje Γ

Navedimo sljedeću tvrdnju bez dokaza.

Tvrdnja 1. *Svaka regularna parametrizacija $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ krivulje Γ može se reparametrizirati po bilo kojem parametru $p \in I_p$, $I_p \subseteq \mathbb{R}$ ako je $f\colon I_p \to I$ bijektivno preslikavanje klase C^∞ na $I_p \subseteq \mathbb{R}$.*

Uzimajući u obzir da je duljina luka krivulje Γ od neke njezine fiksne točke[9] $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$, $t_0 \in I$ do bilo koje njezine varijabilne točke

[9]koja se uglavnom uzima kao početna točka krivulje Γ

$P = (x(t), y(t)),\ t \in I$, realna funkcija $s\colon I \to [0, L]$ realne varijable t takva da je:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{x}\,'(u)|\, du, \tag{21}$$

gdje je $[0, L] \subseteq \mathbb{R}_0^+$, primjenom tvrdnje 1 proizlazi da se svaka regularna parametrizacija krivulje Γ može reparametrizirati po svojoj duljini luka[10]. Pritom je svakoj nenegativnoj realnoj vrijednosti $s_i = s(t_i) \geq 0,\ t_i \in I$ jednoznačno pridružena točka $P_i = (x(t_i), y(t_i))$ na krivulji Γ takva da je s_i jednaka duljini luka krivulje Γ od njezine (proizvoljno odabrane) početne točke P_0 do točke P_i. Jasno, pritom se pretpostavlja da je krivulja Γ orijentirana od točke P_0 prema točki P_i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Time je s bijektivna funkcija. S druge strane, iz identiteta (21) proizlazi $s'(t) = |\vec{x}\,'(t)| \geq 0$, odakle direktno slijedi da funkcija s raste na segmentu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dakle, svaka regularna parametrizacija $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^2$ krivulje Γ u ravnini $\mathbb{R}^2$ zadana vektorskom jednadžbom (1) može se reparametrizirati regularnom parametrizacijom $\vec{y}\colon\ [0, L] \to \mathbb{R}^2$ takvom da je $\vec{y}(s) = (\vec{x} \circ t)(s)$, gdje je $t = s^{-1}\colon\ [0, L] \to I$ inverzna funkcija[11] funkcije $s\colon I \to [0, L]$.

Iz vektorske jednadžbe (1) krivulje Γ proizlazi da je

$$\vec{y}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}, \quad s \in [0, L] \tag{22}$$

vektorska jednadžba krivulje Γ po njezinom prirodnom parametru za koju su $x = x(s),\ y = y(s),\ s \in [0, L]$ odgovarajuće parametarske jednadžbe i pritom kažemo da je krivulja Γ parametrizirana po svom prirodnom parametru s.

U diferencijalnoj geometriji najčešće se razmatraju krivulje zadane vektorskom jednadžbom oblika (22) jer je svaka krivulja parametrizirana po svom prirodnom parametru ujedno i regularna krivulja[12].

Nadalje, iz $|\vec{y}\,'(s)| = 1$ za svaki $s \in [0, L]$ slijedi da je $\vec{y}\,'(s)$ jedinični vektor tangente u proizvoljnoj točki $T = (x(s), y(s))$ krivulje Γ. Uvedemo li oznaku

$$\vec{T}(s) := \vec{y}\,'(s)$$

tada je $|\vec{T}(s)| = 1$, odakle slijedi $\sqrt{\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s)} = 1$, odnosno $\vec{T}(s) \cdot \vec{T}(s) = 1$. Deriviranjem dobivenog izraza proizlazi $\vec{T}\,'(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$ što ima za posljedicu da je $\vec{T}\,'(s)$ ortogonalan na $\vec{T}(s)$ za svaki $s \in [0, L]$.

[10] Duljina luka krivulje Γ naziva se prirodni parametar krivulje Γ.

[11] egzistencija inverzne funkcije funkcije s proizlazi iz bijektivnosti funkcije s

[12] proizlazi iz svojstva da je duljina vektora tangente u svakoj točki krivulje, parametrizirane po svom prirodnom parametru, jednaka jedan čime je zadovoljen uvjet regularnosti kojim je duljina vektora tangente različita od nule u svakoj točki te krivulje

Za svaki[13] $\vec{T}(s)$ definira se jedinični vektor normale $\vec{N}(s)$ u proizvoljnoj točki $T = (x(s), y(s))$ krivulje Γ takav da je $\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)|}$ ili

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{y}''(s)}{|\vec{y}''(s)|}, \quad |\vec{y}''(s)| \neq 0. \tag{23}$$

Nadalje, u proizvoljnoj točki $T = (x(s), y(s))$ krivulje Γ definiramo fleksiju (zakrivljenost krivulje)

$$\chi(s) = |\vec{y}''(s)| \tag{24}$$

kojoj korenspondira $r(s) = \frac{1}{\chi(s)}$ odgovarajući polumjer kružnice zakrivljenosti krivulje Γ u njezinoj proizvoljnoj točki T.

Uočimo da iz (23) i (24) proizlazi da je jedinični vektor normale $\vec{N}(s)$ definiran u svakoj točki krivulje ako ona nema točke izravnavanja.

Primjenom diferencijalnog računa dokazat ćemo sljedeće dvije tvrdnje.

Tvrdnja 2. *Normala krivulje* Γ *je tangenta njezine evolute u pripadnoj točki.*

Dokaz. Primjenom jednadžbe (4) slijedi da je vektorska jednadžba evolute krivulje Γ zadane vektorskom jednadžbom (22) oblika

$$\vec{y}_e(s) = \vec{y}(s) + r(s) \cdot \vec{N}(s), \tag{25}$$

gdje je $s \in [0, L]$ prirodan parametar krivulje Γ, ali proizvoljan parametar njezine evolute. Deriviranjem jednadžbe (25) po parametru s dobivamo

$$\vec{y}_e'(s) = \vec{T}(s) + r'(s) \cdot \vec{N}(s) + r(s) \cdot \vec{N}'(s). \tag{26}$$

gdje se koristilo svojstvo da je $\vec{T}(s) = \vec{y}'(s)$. Primjenom druge Frenet-Serretove formule[14] $\vec{N}'(s) = -\chi(s) \cdot \vec{T}(s)$ i činjenice da je fleksija krivulje Γ obrnuto proporcionalna polumjeru kružnice zakrivljenosti krivulje Γ, dobivamo: $r(s) \cdot \vec{N}'(s) = -\vec{T}(s)$, stoga jednadžbu (26) možemo pisati u obliku:

$$\vec{y}_e'(s) = r'(s) \cdot \vec{N}(s) \tag{27}$$

za svaki $s \in [0, L]$. Identitet (27) geometrijski se interpretira da je vektor tangete $\vec{y}_e'(s)$ na evoluti krivulje Γ kolinearan s jediničnim vektorom normale $\vec{N}(s)$ na krivulji Γ čime je tvrdnja dokazana. □

[13] jedinični vektor tangente različit od konstantnog vektora

[14] prva Frenet-Serretova formula je: $\vec{T}'(s) = \chi(s) \cdot \vec{N}(s)$

Tvrdnja 3. *Ako se na nekom luku $\widehat{T_1T_2}$ krivulje Γ polumjer kružnica zakrivljenosti mijenja monotono, onda je prirast duljine luka na odgovarajućem dijelu njezine evolute jednak odgovarajućem prirastu polumjera kružnica zakrivljenosti krivulje Γ.*

Dokaz. Uzimajući u obzir da je $\vec{N}(s)$ jedinični vektor, iz identiteta (27) proizlazi

$$|\vec{y}_e'(s)| = |r'(s)|, \tag{28}$$

gdje $|\vec{y}_e'(s)| \geq 0$ označava duljinu vektora tangente na evoluti krivulje Γ. Uz pretpostavku da se polumjer kružnica zakrivljenosti mijenja monotono i uvođenjem oznake

$$\sigma'(s) := |\vec{y}_e'(s)|,$$

identitet (28) možemo pisati u obliku $\sigma'(s) = r'(s)$, odakle direktno proizlazi

$$\frac{d\sigma(s)}{ds} = \frac{dr(s)}{ds}. \tag{29}$$

Integriranjem (29) po diferencijalu ds u granicama $s_1, s_2 \in [0, L] \subseteq \mathbb{R}_0^+$ dobivamo

$$\sigma(s)\Big|_{s_1}^{s_2} = r(s)\Big|_{s_1}^{s_2},$$

odnosno

$$\sigma(s_2) - \sigma(s_1) = r(s_2) - r(s_1), \tag{30}$$

gdje se primijenila Newton-Leibnitzova formula za izračunavanje određenih integrala.

Primijetimo da je izrazom $\sigma(s_2) - \sigma(s_1)$ dan prirast duljine luka na evoluti Γ_1 krivulje Γ, a izrazom $r(s_2) - r(s_1)$ prirast polumjera kružnica zakrivljenosti krivulje Γ. Dakle, identitetom (30) dokazana je tvrdnja. $\square$

Uvođenjem oznaka

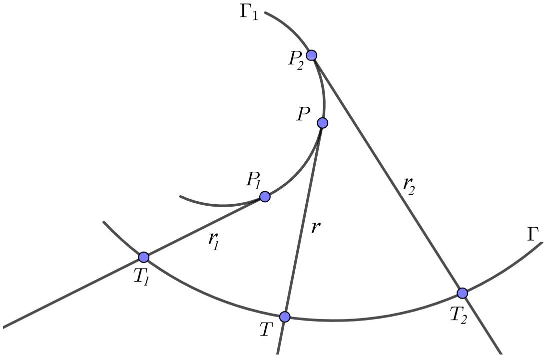
$$|\widehat{P_1P_2}| := \sigma(s_2) - \sigma(s_1),\ \sigma_2 := \sigma(s_2),\ \sigma_1 := \sigma(s_1),\ r_2 := r(s_2),\ r_1 := r(s_1),$$

identitet (30) možemo pisati u obliku

$$r_2 = r_1 + |\widehat{P_1P_2}|. \tag{31}$$

koji se interpretira na sljedeći način:

ako pretpostavimo da preko luka $\widehat{P_1P_2}$ evolute Γ_1 od njezine točke P_2 nategnemo nerastezljivu gipku nit do točke T_1 na krivulji Γ, onda odmatanjem te niti s evolute, držeći je pritom nategnutu, točka T_1 će pri tom odmatanju opisivati luk $\widehat{P_1P_2}$ na krivulji Γ, vidi sliku 3.



Slika 3. Evolventa i evoluta.

Time se dobiva krivulja Γ koju nazivamo odmotaljkom ili evolventom krivulje Γ_1. Dakle, uz pojam evolute krivulje direktno je povezan i pojam evolvente krivulje. Zapravo to su dvije ravninske krivulje koje određenim postupkom nastaju jedna iz druge. Konkretno, evoluta krivulje Γ je krivulja Γ_1 koju čini skup svih središta kružnica zakrivljenosti obzirom na svaku točku krivulje Γ. S druge strane, evolventa krivulje Γ_1 je krivulja Γ za koju vrijedi da je krivulja Γ_1 njezina evoluta. Iz prethodno navedenog proizlazi da za svaku krivulju postoji točno jedna evoluta, međutim obrat ne vrijedi. Naime, za svaku evolutu postoji beskonačno mnogo evolvenata što ćemo u nastavku obrazložiti.

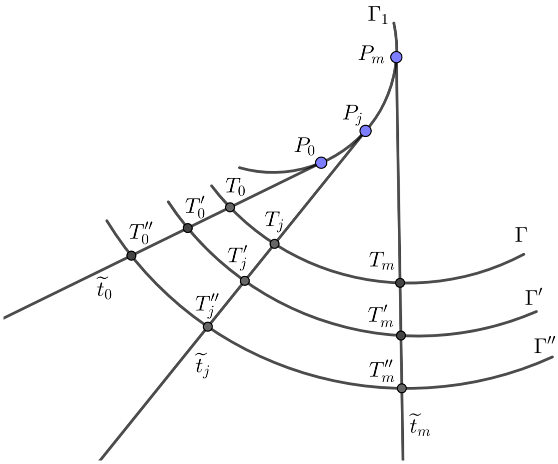
Objasnimo najprije konstrukciju evolvente krivulje Γ_1. Odaberimo proizvoljne točke $P_0, \ldots, P_j, \ldots, P_m$ na krivulji Γ_1 uz pretpostavku da je ona orijentirana od točke P_0 prema točki P_m i označimo s $\widetilde{t}_0, \ldots, \widetilde{t}_j, \ldots, \widetilde{t}_m$ tangente na krivulju Γ_1 u točkama $P_0, \ldots, P_j, \ldots, P_m$. Primjenom identiteta (31), proizlazi:

$$r_j + c = r_0 + c + |\widehat{P_0P_j}|, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

što se interpretira da se na svakoj tangenti $\widetilde{t}_j$ u točki P_j krivulje Γ_1 može proizvoljno odabrati točka T_j za koju vrijedi da je njezina udaljenost od točke P_j jednaka $r_j + c$. Pritom je c proizvoljan realan broj, a $r_j \in \mathbb{R}_0^+$ je polumjer kružnice zakrivljenosti u točki T_j krivulje Γ takav da je[15]

[15]vidi konstrukciju evolute krivulje Γ

$r_j = d(T_j, P_j)$. Skup svih tako dobivenih točaka T_j čini evolventu krivulje



Slika 4. Konstrukcija evolventi krivulje Γ_1.

Γ_1. Pritom se točka T_j dobiva takozvanim odmatanjem krivulje Γ_1.

Geometrijska interpretacija identiteta (32) je da za krivulju Γ_1 postoji beskonačno mnogo evolventi $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ koje se dobivaju u ovisnosti o izboru vrijednosti konstante $c \in \mathbb{R}$, vidi sliku 4.

Specijalno, ako je $c = 0$, onda je krivulja Γ evolventa krivulje Γ_1.

2.4. Primjeri krivulja i njihovih evoluta

U nastavku ćemo prikazati evolute nekih krivulja u ravnini i opisati njihova svojstva.

2.4.1 Funkcije sinus i kosinus

Prije nego li prikažemo evolute grafova trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus zadanih eksplicitnom jednadžbom $y = \sin x$ i $y = \cos x$, prisjetimo se, trigonometrijske funkcije sinus i kosinus su periodične funkcije s temeljnim periodom 2π, definirane na skupu realnih brojeva kojima je segment $[-1, 1]$ područje vrijednosti. Promatrajmo najprije funkciju sinus zadanu eksplicitnom jednadžbom

$$y = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija sinus raste na intervalima $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ i pada na intervalima $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, stoga u točkama $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

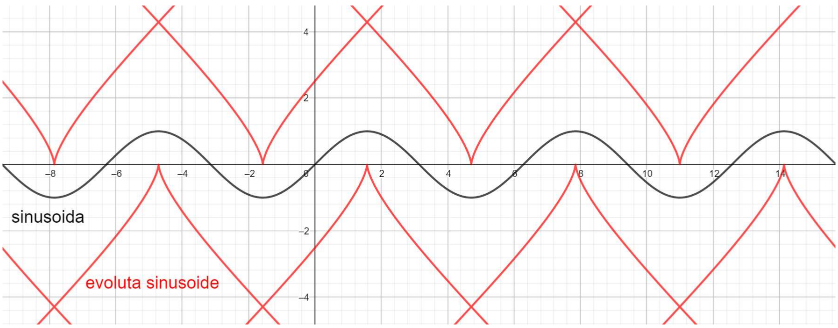
ima minimume, a u točkama $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ima maksimume za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Nultočke funkcije sinus su $k\pi$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

U nastavku ćemo koristiti terminologiju da je graf funkcije f rastući na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako funkcija f raste na I i analogno da je graf funkcije f padajući na intervalu I ako funkcija f pada na I.

U suglasnosti s navedenim, sinusoida (graf funkcije sinus) je rastuća na intervalima $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ i padajuća na intervalima $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$. Primjenom (10) dobivamo

$$
\begin{aligned}
x_{es} &= x + \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\sin x} \\
y_{es} &= \sin x - \frac{1+\cos^2 x}{\sin x}, \qquad x \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned} \tag{33}
$$

parametarske jednadžbe evolute sinusoide.



Slika 5. Sinusoida i evoluta sinusoide na $[-3\pi, 5\pi]$.

Pritom se koristilo svojsvo da iz $\sin x \neq 0$ slijedi $x \neq k\pi$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$ što ima za posljedicu da evoluta sinusoide nije definirana za $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Izračunavanjem limesa od x_{es} i y_{es} kada x teži prema $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to k\pi} x_{es} &= \lim_{x \to k\pi} \left(x + \frac{\cos x(1+\cos^2 x)}{\sin x} \right) = \infty \\
\lim_{x \to k\pi} y_{es} &= \lim_{x \to k\pi} \left(\sin x - \frac{1+\cos^2 x}{\sin x} \right) = \infty
\end{aligned}
$$

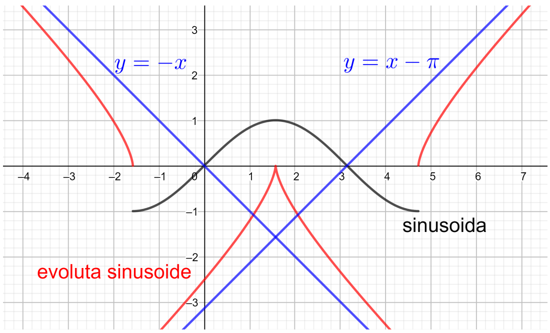
dobivamo da su oni jednaki beskonačnosti, odakle proizlazi da za $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ evoluta sinusoide ima kose asimptote $y = ax + b$ čiji se koeficijenti a i b izračunavaju primjenom formula: $a = \lim_{t \to k\pi} \frac{y_{es}}{x_{es}}$, $b = \lim_{t \to k\pi} (y_{es} - a x_{es})$. Uzimajući u obzir da je

$$
\sin(k\pi) = 0, \quad \cos^2(k\pi) = 1, \quad \cos(2k\pi) = 1, \quad \cos(\pi + 2k\pi) = -1
$$

dobivaju se dvije familije kosih asimptota:

1. $y = -x + x_0$ ako je $x_0 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
2. $y = x - x_0$ ako je $x_0 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Na slici 6 prikazana je sinusoida i njezina evoluta na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ s odgovarajućim asimptotama. Promatrajući sliku 6 može se naslutiti da evoluta sinusoide ima šiljke u nekim točkama koje ćemo u nastavku odrediti koristeći sljedeće svojstvo.



Slika 6. Sinusoida i evoluta sinusoide na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Krivulja zadana parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ ima šiljak u točki $(x(t_0), y(t_0))$ jedino ako postoji $t_0 \in I$ takav da je $\dot{x}(t_0) = 0$ i $\dot{y}(t_0) = 0$.

Dakle, izračunavanjem derivacija prvog reda parametarskih jednadžbi (33) evolute sinusoide:

$$\dot{x}_{es} = \frac{-\cos^2 x(3\sin^2 x + \cos^2 x + 1)}{\sin^2 x}, \quad \dot{y}_{es} = \frac{\cos x(3\sin^2 x + \cos^2 x + 1)}{\sin^2 x},$$

proizlazi $\dot{x}_{es} = 0$ i $\dot{y}_{es} = 0$ jedino ako je $\cos x = 0$, odnosno ako je $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jer je $3\sin^2 x + \cos^2 x + 1 \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Time dobivamo da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ evoluta sinusoide ima šiljke u točkama

$$\left(x_{es}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), y_{es}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right).$$

Nadalje, lako se može pokazati da za evolutu sinusoide vrijedi da:

- je rastuća na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\rangle$ i na $\langle 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$;
- za $x_0 = 2k\pi$ ima kosu asimptotu $y = -x + x_0$;
- je padajuća na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle$ i na $\langle \pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$

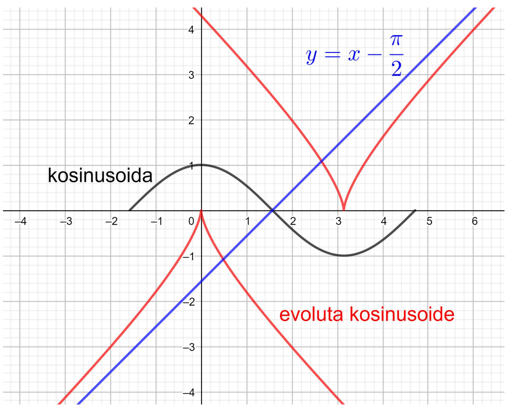
- za $x_0 = \pi + 2k\pi$ ima kosu asimptotu $y = x - x_0$

za svaki $k \in \mathbb{Z}$ (vidi slike 5 i 6).

Promotrimo sada graf funkcije kosinus $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Primjenom (10) dobivamo

$$\begin{aligned} x_{ec} &= x - \frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{\cos x} + \frac{\pi}{2} \\ y_{ec} &= \cos x - \frac{1-\sin^2 x}{\cos x}, \qquad x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned} \tag{34}$$

parametarske jednadžbe evolute grafa funkcije kosinus.
Na slici 7 prikazana je evoluta grafa funkcije kosinus na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ s odgovarajućim asimptotama. Usporedbom slike 7 sa slikom 6 može se uočiti da se evoluta grafa funkcije kosinus može dobiti pomakom evolute grafa funkcije sinus za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo. Podsjetimo se, iz poznate formule[16] $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ proizlazi da se graf funkcije kosinus može dobiti pomakom grafa funkcije sinus za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo što ima za posljedicu da se evoluta grafa funkcije kosinus može dobiti pomakom evolute grafa funkcije sinus za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo što se računski dokazuje na sljedeći način.



Slika 7. Graf funkcije kosinus i njegova evoluta na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Uvođenjem supstitucije $x = u + \frac{\pi}{2}$ u (33), parametarske jednadžbe evo-

[16] i analogno iz formule $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ proizlazi da se graf funkcije sinus može dobiti pomakom grafa funkcije kosinus za $\frac{\pi}{2}$ udesno, stoga se graf evolute grafa funkcije sinus može dobiti pomakom evolute grafa funkcije kosinus za $\frac{\pi}{2}$ udesno

lute grafa funkcije sinus, dobivamo:

$$x_{ps} = u + \frac{\pi}{2} + \frac{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\cos^2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$y_{ps} = \sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1-\cos^2\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{35}$$

gdje je $u \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Primjenom formula $\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right) = \cos u$, $\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin u$ i za $x := u$ iz jednadžbi (35) direktno proizlaze jednadžbe (34) čime smo dokazali da se evoluta grafa funkcije kosinus dobiva pomakom evolute grafa funkcije sinus za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo. Jasno, analogno se može pokazati se evoluta grafa funkcije sinus dobiva pomakom evolute grafa funkcije kosinus za $\frac{\pi}{2}$ udesno.

2.4.2 Kubna parabola

Neka je kubna parabola zadana implicitnom jednadžbom

$$a^3x - y^3 = 0, \quad a = konst. \neq 0.$$

Ako je $a > 0$, onda je kubna parabola rastuća, a ako je $a < 0$, onda je ona padajuća na skupu realnih brojeva; siječe os x u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava. Evoluta kubne parabole određuje se primjenom formula (12), stoga izračunajmo najprije parcijalne derivacije prvog i drugog reda: $F_x(x,y) = a^3$, $F_y(x,y) = -3y^2$, $F_{xx}(x,y) = 0$, $F_{xy}(x,y) = 0$, $F_{yy}(x,y) = -6y$. Pritom dobivamo: $F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) = a^6 + 9y^4$ i

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 0 & -6y & -3y^2 \\ a^3 & -3y^2 & 0 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 0 & -6y \\ a^3 & -3y^2 \end{vmatrix} = 6a^6y.$$

Ako implicitnu jednadžbu $a^3x - y^3 = 0$ kubne parabole izrazimo pomoću njezine odgovarajuće eksplicitne jednadžbe[17], onda dobivamo $y = a\sqrt[3]{x}$ čime je: $F_x(x,y) = a^3$, $F_y(x,y) = -3a^2\sqrt[3]{x^2}$, odnosno:

$$F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) = a^6 + 9a^4x\sqrt[3]{x}, \qquad \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = 6a^7\sqrt[3]{x},$$

stoga iz (12) slijedi da su:

$$x_{kp} = \frac{5}{2}x + \frac{a^2}{6\sqrt[3]{x}}$$
$$y_{kp} = \frac{1}{2}a\sqrt[3]{x} - \frac{9}{2a}x\sqrt[3]{x^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{36}$$

[17] pri čemu je y realna funkcija realne varijable x

parametarske jednadžbe evolute kubne parabole $a^3x - y^3 = 0$, $a \neq 0$. Izračunavanjem limesa

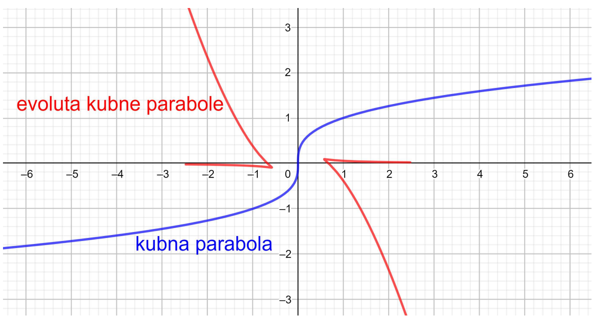
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{2}x + \frac{a^2}{6\sqrt[3]{x}} \right) = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}a\sqrt[3]{x} - \frac{9}{2a}x\sqrt[3]{x^2} \right) = 0$$

proizlazi da evoluta kubne parabole ima horizontalnu asimptotu $y = 0$. S druge strane, deriviranjem parametarskih jednadžbi (36) dobivamo:

$$\dot{x}_{kp} = \frac{45\sqrt[3]{x^4} - a^2}{18\sqrt[3]{x^4}}, \quad \dot{y}_{kp} = -\frac{45\sqrt[3]{x^4} - a^2}{6a\sqrt[3]{x^2}},$$

stoga iz $\dot{x}_{kp} = 0$ i $\dot{y}_{kp} = 0$ slijedi da je $x = \pm\sqrt[4]{\left(\frac{a^2}{45}\right)^3}$ što povlači da evoluta kubne parabole ima šiljke u točkama
$\left(x_{kp}\left(-\sqrt[4]{\left(\frac{a^2}{45}\right)^3}\right), y_{kp}\left(-\sqrt[4]{\left(\frac{a^2}{45}\right)^3}\right)\right)$, $\left(x_{kp}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{a^2}{45}\right)^3}\right), y_{kp}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{a^2}{45}\right)^3}\right)\right)$.
Konkretno, neka je $a = 1$. Tada su $x_{kp} = \frac{5}{2}x + \frac{1}{6\sqrt[3]{x}}$, $y_{kp} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{9}{2}x\sqrt[3]{x^2}$ parametarske jednadžbe evolute kubne parabole $x - y^3 = 0$, vidi sliku 8. Pritom za evolutu kubne parabole vrijedi da:

- je padajuća na $\langle -\infty, -0.057\rangle$ i rastuća na $\langle -0.057, 0\rangle$ te za $x = -0.057$ ima šiljak u točki $(-0.57, -0.15)$;
- za $x = 0$ ima horizontalnu asimptotu $y = 0$;
- je rastuća na $\langle 0, 0.057\rangle$ i padajuća na $\langle 0.057, +\infty\rangle$ te za $x = 0.057$ ima šiljak u točki $(0.57, 0.15)$.



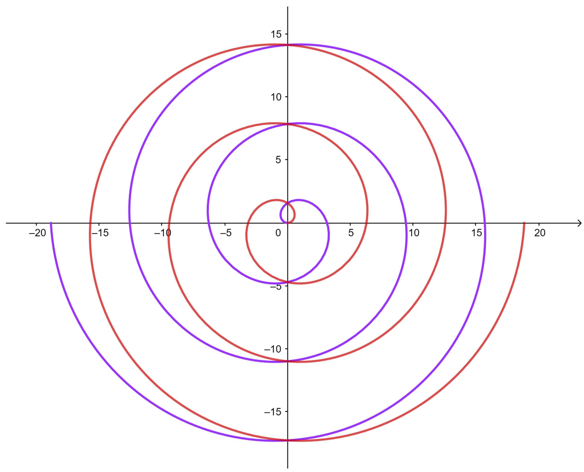
Slika 8. Kubna parabola $x - y^3 = 0$ i njezina evoluta.

2.4.3 Arhimedova spirala

Promotrimo sada još jednu vrlo zanimljivu krivulju, Arhimedovu spiralu, čija je polarna jednadžba:

$$\varrho = a\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Iz polarne jednadžbe Arhimedove spirale proizlazi da dvijema međusobno suprotnim varijablama $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi_1 = -\varphi_2$ odgovaraju dvije međusobno suprotne vrijednosti $\varrho_1 = -\varrho_2$, gdje je $\varrho_1 = a\varphi_1$, $\varrho_2 = a\varphi_2$ što ima za posljedicu da se Arhimedova spirala sastoji od dviju grana koje su simetrične u odnosu na okomicu na polarnu os na kojoj leže sjecišta[18] njezinih dviju grana. Ako je $\varphi \geq 0$, onda se Arhimedova spirala odmotava u pozitivnom smjeru[19], a za $\varphi \leq 0$ u negativnom smjeru[20]. Arhimedova spirala se najčešće prikazuje samo njenom „pozitivnom" granom (za $\varphi \geq 0$ prikazanoj crvenom bojom na slici 9 za $a = 1$) jer se njena „negativna" grana (za $\varphi \leq 0$ prikazanoj plavom bojom na slici 9 za $a = 1$) dobiva simetrijom u odnosu na okomicu na polarnu os kroz pol polarnog sustava.



Slika 9. Arhimedova spirala $\varrho = \varphi$ za $a = 1$ i $\varphi \in [-6\pi, 6\pi]$.

Evolutu Arhimedove spirale odredit ćemo primjenom (17), stoga ćemo najprije odrediti derivacije prvog i drugog reda Arhimedove spirale. Dakle, iz $\varrho = a\varphi$ slijedi $\varrho' = a$ i $\varrho'' = 0$, odakle proizlazi:

$$\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2(\varphi^2 + 1), \qquad \varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'' = a^2(\varphi^2 + 2).$$

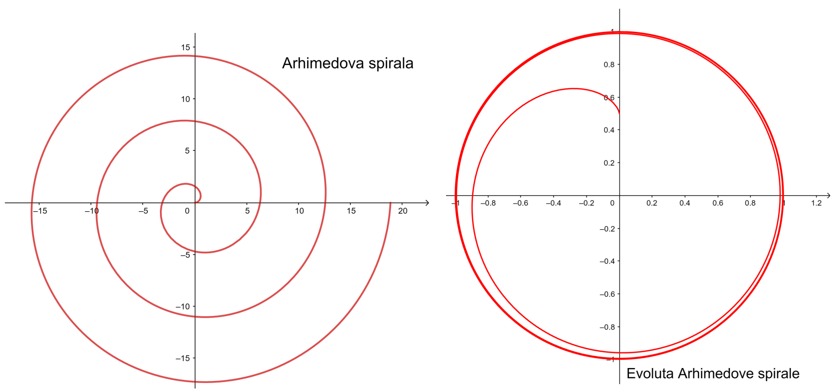
[18]sjecišta dviju grana Arhimedove spirale su dvostruke točke spirale
[19]smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu
[20]smjeru kretanja kazaljke na satu

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u jednadžbe (17) i dodatnim sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} x_{as} &= \frac{a(\varphi\cos\varphi-(\varphi^2+1)\sin\varphi)}{\varphi^2+2} \\ y_{as} &= \frac{a(\varphi\sin\varphi+(\varphi^2+1)\cos\varphi)}{\varphi^2+2}, \qquad \varphi\in\mathbb{R} \end{aligned} \tag{37}$$

parametarske jednadžbe evolute Arhimedove spirale.

Iz prethodno navedenog proizlazi da se za obje grane Arhimedove spirale dobiva ista evoluta, stoga ćemo u nastavku promatrati samo "pozitivnu" granu Arhimedove spirale. Za $\varphi = 0$ na Arhimedovoj spirali dobivamo pol polarnog sustava, a na evoluti Arhimedove spirale točku $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ što direktno slijedi iz jednadžbi (37). S druge strane, kada φ teži prema $+\infty$, onda se Arhimedova spirala odmotava u pozitivnom smjeru, a njezina evoluta se približava kružnici (sa središtem u polu polumjera $a > 0$) s njezine unutrašnje strane, vidi sliku 10 za $a = 1$.



Slika 10. Arhimedova spirala $\varrho = \varphi$ za $a = 1$ i $\varphi \geq 0$ i njezina evoluta.

Naime, izračunavanjem limesa

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to\infty} x_{as}(\varphi) &= \lim_{\varphi\to\infty}\left(\frac{a(\varphi\cos\varphi-(\varphi^2+1)\sin\varphi)}{\varphi^2+2}\right) \\ &= \lim_{\varphi\to\infty}\left(\frac{a\varphi^2(\frac{1}{\varphi}\cos\varphi-\sin\varphi-\frac{1}{\varphi^2}\sin\varphi)}{\varphi^2(1+\frac{2}{\varphi^2})}\right) = -a\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\lim_{\varphi\to\infty} y_{as}(\varphi) = \lim_{\varphi\to\infty}\left(\frac{a(\varphi\sin\varphi + (\varphi^2+1)\cos\varphi)}{\varphi^2+2}\right)$$
$$= \lim_{\varphi\to\infty}\left(\frac{a\varphi^2(\frac{1}{\varphi}\sin\varphi + \cos\varphi + \frac{1}{\varphi^2}\cos\varphi)}{\varphi^2(1+\frac{2}{\varphi^2})}\right) = a\cos\varphi$$

i uvođenjem oznaka $x = -a\sin\varphi$ i $y = a\cos\varphi$, slijedi $x^2 + y^2 = a^2$ što se geometrijski interpretira da se evoluta Arhimedove spirale približava kružnici k s njezine unutrašnje strane kada φ teži ka beskonačnosti. Pritom je k kružnica sa središtem u polu (ishodištu pravokutnog koodrinatnog sustava) polumjera $a > 0$.

Za $a = 1$ dobiva se Arhimedova spirala $\varrho = \varphi$ i njezina evoluta kojoj su $x_{as} = \frac{\varphi\cos\varphi-(\varphi^2+1)\sin\varphi}{\varphi^2+2}$, $y_{as} = \frac{\varphi\sin\varphi+(\varphi^2+1)\cos\varphi}{\varphi^2+2}$ parametarske jednadžbe.

U ovom slučaju, kada φ teži u beskonačnost, evoluta Arhimedove spirale približava se jediničnoj kružnici $x^2+y^2 = 1$ sa središtem u (polu) ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava, vidi sliku 10.

Literatura

[1] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[2] GeoGebra - digitalni alat za crtanje grafova

[3] I. Kamenarović, *Diferencijalna geometrija*, Sveučilište u Rijeci, Pedagoški fakultet, Rijeka, 1990.

[4] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska Knjiga, Zagreb, 1979.

[5] L. Vučković, *Evolute i evolvente krivulja u ravnini*, završni rad na Preddiplomskom studiju Matematika, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2021.

Lea Vučković
Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Radmile Matejčić 2, Rijeka 51000, Hrvatska
E-mail adresa: `lvuckovic1@student.uniri.hr`

Milena Sošić
Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Radmile Matejčić 2, Rijeka 51000, Hrvatska
E-mail adresa: `msosic@math.uniri.hr`