ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 95–105
Zaprimljen: 13. travnja 2022.
Prihvaćen: 26. srpnja 2022.

Greenova funkcija za Sturm-Liouvilleov operator

Marija Čatipović

Sažetak

U ovom radu pomoću Sturm-Liouvilleova problema i određenih uvjeta dolazimo do Greenove funkcije koja je bitna u primjenjenoj matematici i fizici. Ime je dobila po britanskom matematičaru i fizičaru Georgeu Greenu (1793. – 1841.). Koristi se u mehanici, teoriji elektromagnetizma (Laplaceova jednadžba), kvantnoj fizici i mnogim drugim područjima.

Ključni pojmovi: Greenova funkcija, Sturm-Liouvilleov operator, Sturm-Liouvilleov problem

1. Konstrukcija Greenove funkcije

Neka je L linearni diferencijalni operator. Promotrimo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$Lu = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{1}$$

pri čemu nepoznata funkcija u zadovoljava zadane rubne uvjete

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \end{aligned}$$

gdje je $a_1^2 + a_2^2 > 0$ i $b_1^2 + b_2^2 > 0$. Istaknimo da ovdje L predstavlja diferencijalni operator zajedno s rubnim uvjetima, za funkciju u.
Ako $\lambda = 0$ nije vlastita vrijednost operatora L [2, 6], onda jednadžba (1) ima jedinstveno rješenje koje možemo zapisati na sljedeći način

$$u = L^{-1} f.$$

Kako je L diferencijalni operator, očekujemo da je L^{-1} integralni operator oblika

$$L^{-1}f(x) = \int_a^b G(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Ako takav inverzni diferencijalni operator postoji, onda funkciju $G(x, y)$ nazivamo Greenova funkcija za operator L. Određivanje Greenove funkcije je općenito netrivijalan problem. Međutim, za regularne Sturm-Liouvilleove operatore Greenova funkcija dana je sljedećim teoremom.

Teorem 1. *Neka $\lambda = 0$ nije vlastita vrijednost Sturm-Liouvilleovog problema*

$$Lu = \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{2}$$

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \tag{3}$$

$$b_1u(b) + b_2u'(b) = 0, \tag{4}$$

gdje je $a_1^2 + a_2^2 > 0$ i $b_1^2 + b_2^2 > 0$, a funkcije p, p', q su neprekidne na $[a, b]$ i $p(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$. Tada za svaku neprekidnu funkciju f na $[a, b]$ problem (2)–(4) ima jedinstveno rješenje

$$u(x) = \int_a^b G(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

pri čemu je $G(x, y)$ Greenova funkcija definirana na sljedeći način

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(y)}, & a \le y \le x \\ \\ \frac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(y)}, & x < y \le b \end{cases} \tag{5}$$

gdje su u_1 i u_2 linearno nezavisna rješenja homogenog problema

$$Lu = 0$$

s rubnim uvjetima

$$a_1u_1(a) + a_2u_1'(a) = 0,$$
$$b_1u_2(b) + b_2u_2'(b) = 0,$$

a $W(y; u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(y) & u_2(y) \\ u_1'(y) & u_2'(y) \end{vmatrix} = u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y)$ je Wronskijan funkcija u_1 i u_2 [2, 6, 3].

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 linearno nezavisna rješenja homogenog problema

$$Lu = 0$$

koji zadovoljavajaju rubne uvjete

$$\begin{aligned} a_1 u_1(a) + a_2 u_1'(a) &= 0, \\ b_1 u_2(b) + b_2 u_2'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Opće rješenje nehomogenog problema je dano sa

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + u_p$$

gdje su c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ te je u_p partikularno rješenje. Partikularno rješenje možemo odrediti metodom varijacije konstanti

$$u_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

pri čemu v_1 i v_2 zadovoljavaju uvjet

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0.$$

Sada imamo

$$u_p' = v_1 u_1' + v_2 u_2', \tag{6}$$

$$u_p'' = v_1 u_1'' + v_2 u_2'' + v_1' u_1' + v_2' u_2'. \tag{7}$$

Supstitucijom rezultata (6) i (7) u jednadžbu (2) dobivamo

$$p' v_1 u_1' + p' v_2 u_2' + p v_1 u_1'' + p v_2 u_2'' + p v_1' u_1' + p v_2' u_2' + q v_1 u_1 + q v_2 u_2 = f.$$

Grupiranjem imamo

$$v_1(p u_1'' + p' u_1' + q u_1) + v_2(p u_2'' + p' u_2' + q u_2) + p(v_1' u_1' + v_2' u_2') = f.$$

Prva dva člana u gornjoj jednadžbi iščezavaju jer su u_1 i u_2 rješenja homogenog problema, što implicira

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = \frac{f}{p}.$$

Dakle, funkcije v_1 i v_2 zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0, \tag{8}$$

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = \frac{f}{p}. \tag{9}$$

Također, kako su u_1 i u_2 linearno nezavisna rješenja onda je $W(x; u_1, u_2) \neq 0$ [1] pa sustav (8)–(9) ima jedinstveno rješenje [4]

$$v_1'(x) = -\frac{u_2(x)f(x)}{p(x)W(x; u_1, u_2)}, \tag{10}$$

$$v_2'(x) = \frac{u_1(x)f(x)}{p(x)W(x; u_1, u_2)}. \tag{11}$$

Prema Abelovom teoremu, $p(x)W(x; u_1, u_2)$ je konstanta [2] . Označimo

$$p(x)W(x; u_1, u_2) = \frac{1}{c}.$$

Integracijom jednadžbe (10) od x do b dobivamo

$$v_1(b) - v_1(x) = -c \int_x^b u_2(y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Slično, integracijom jednadžbe (11) od a do x dobivamo

$$v_2(x) - v_2(a) = c \int_a^x u_1(y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Funkcije v_1 i v_2 možemo odabrati tako da vrijedi $v_1(b) = v_2(a) = 0$ jer sustav (8)–(9) određuje samo derivacije funkcija v_1 i v_2. Dakle, partikularno rješenje je dano sa

$$\begin{aligned} u_p &= v_1 u_1 + v_2 u_2 \\ &= c \int_x^b u_2(y)f(y)\,\mathrm{d}y\ u_1(x) + c \int_a^x u_1(y)f(y)\,\mathrm{d}y\ u_2(x) \\ &= \int_a^x \frac{u_2(x)u_1(y)f(y)}{p(y)W(y; u_1, u_2)}\,\mathrm{d}y + \int_x^b \frac{u_1(x)u_2(y)f(y)}{p(y)W(y; u_1, u_2)}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Definirajmo funkciju

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{u_2(x)u_1(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)}, & a \leq y \leq x \\ \\ \frac{u_1(x)u_2(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)}, & x < y \leq b \end{cases}.$$

Tada slijedi

$$u_p(x) = \int_a^b G(x, y)\, f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

2. Svojstva Greenove funkcije

Navedimo neka osnovna svojstva Greenove funkcije. Neka je L Sturm-Liouvilleov operator (2) i neka je $G(x,y)$ Greenova funkcija (5). Tada vrijedi [3, 5, 7, 8]:

1. $G(x,y)$ je neprekidna $\forall x \in [a,b]$ i vrijedi
$$G(y^+,y) = G(y^-,y).$$
2. $G(x,y)$ je simetrična, tj. $G(x,y) = G(y,x)$.
3. $a_1 G(a,y) + a_2 G_x(a,y) = 0, \quad b_1 G(b,y) + b_2 G_x(b,y) = 0.$
4. $G(x,y)$ nije diferencijabilna u točkama $x = y$ i
$$G_x(y^+,y) - G_x(y^-,y) = \frac{1}{p(y)}.$$
5. $LG(x,y) = 0,\ \forall x \neq y.$

Prvo svojstvo proizlazi iz činjenice da je funkcija $G(x,y)$ konstruirana pomoću rješenja homogene jednadžbe koja su neprekidna na intervalima $a \leq y \leq x$, $x < y \leq b$ te je $W(y; u_1, u_2) \neq 0$.
Kako je L hermitski operator, G je simetrična funkcija pa je iz toga vidljivo drugo svojstvo.
Rubni uvjeti za funkciju

$$u(x) = \int_a^b G\,(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

su sadržani u Greenovoj funkciji $G\,(x,y)$. Rubni uvjet u točki $x = a$ daje

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u'(a) &= a_1 \int_a^b G(a,y) f(y)\, \mathrm{d}y + a_2 \int_a^b G_x(a,y) f(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \big(a_1 G(a,y) + a_2 G_x(a,y)\big) f(y)\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

U točki $x = a$ Greenova funkcija dana je sa

$$G\,(a,y) = \frac{u_1(a) u_2(y)}{p(y) W(y; u_1, u_2)}.$$

Tada je

$$a_1 G(a,y) + a_2 G_x(a,y) = \big(a_1 u_1(a) + a_2 u_1'(a)\big)\frac{u_2(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)} = 0$$

jer je

$$a_1 u_1(a) + a_2 u_1'(a) = 0.$$

Dakle, $a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0$.
Slično se pokazuje da vrijedi $b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0$ pa je time pokazano treće svojstvo.
Četvrto svojstvo je posebno važno u zadacima gdje treba riješiti probleme konstruiranjem Greenove funkcije pa pokažimo kako je to vidljivo. Desna derivacija u točki $x = y$ jednaka je

$$\begin{aligned} G_x(y^+, y) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[G(y+h,y) - G(y,y)\right] \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\frac{u_1(y)u_2(y+h)}{p(y)W(y;u_1,u_2)} - \frac{u_1(y)u_2(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)}\right] \\ &= \frac{u_1(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)} \lim_{h\to 0^+} \frac{u_2(y+h) - u_2(y)}{h} \\ &= \frac{u_1(y)u_2'(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)}. \end{aligned}$$

Slično se pokazuje

$$G_x(y^-, y) = \frac{u_1'(y)u_2(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} G_x(y^+, y) - G_x(y^-, y) &= \frac{u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y)}{p(y)W(y;u_1,u_2)} \\ &= \frac{W(y;u_1,u_2)}{p(y)W(y;u_1,u_2)} = \frac{1}{p(y)}. \end{aligned}$$

3. Primjeri Greenove funkcije

Primjer 1. *Promotrimo problem*

$$-u'' = x, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{12}$$

Općenito, diferencijalna jednadžba

$$-cu'' = f(x)$$

modelira deformaciju štapa u čvrstoće c pod utjecajem vanjske sile $f(x)$ pri čemu je štap pričvršćen na krajevima $x = 0$, $x = 1$.
Za zadanu vrijednost y, Greenova funkcija $G(x, y)$ zadovoljava pridruženu jednadžbu

$$G'' = 0$$

za $0 \leq x < y,\ y < x \leq 1$, gdje su rubni uvjeti

$$G(0, y) = 0, \quad G(1, y) = 0.$$

Na svakom dijelu domene imamo običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Njeno rješenje je

$$G(x, y) = \begin{cases} Ax + B, \ 0 \leq x < y \\ Cx + D, \ y < x \leq 1. \end{cases}$$

Iz rubnih uvjeta $G(0, y) = 0$, $G(1, y) = 0$ redom dobivamo $B = 0$ i $C + D = 0$, tj. $D = -C$ pa sada imamo

$$G(x, y) = \begin{cases} Ax, \ 0 \leq x < y \\ C(x - 1), \ y < x \leq 1. \end{cases}$$

Za preostale konstante nam trebaju druga dva uvjeta na Greenovu funkciju pa ćemo iskoristiti njena svojstva. Iz neprekidnosti Greenove funkcije te svojstva da Greenova funkcija nije diferencijabilna u točki $x = y$:

$$G(y^-, y) = G(y^+, y),$$
$$\frac{dG}{dx}(x, y)\Big|_{x=y^-}^{x=y^+} = G'(y^+, y) - G'(y^-, y) = \frac{1}{p(y)}$$

redom imamo

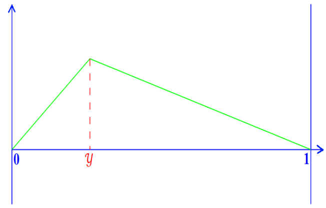
$$Ay = C(y - 1), \tag{13}$$
$$C - A = -1. \tag{14}$$

Rješavajući sustav (13)–(14) slijedi $A = 1 - y$ i $C = -y$.
Sada za $G(x, y)$ vrijedi

$$G(x, y) = \begin{cases} G_1(x, y) = (1 - y)x, \ 0 \leq x < y \\ G_2(x, y) = (1 - x)y, \ y < x \leq 1. \end{cases} \tag{15}$$

Uočimo da za ovako zadanu funkciju vrijedi $G'' = 0$ na intervalima $0 \leq x < y$, $y < x \leq 1$ te da zadovoljava rubne uvjete $G_1(0, y) = 0$, $G_2(1, y) = 0$. Štoviše,

$$G_2'(x, y) - G_1'(x, y) = -y - (1 - y) = -1.$$



Slika 1. Funkcija $\Psi(x) = G(x, y)$ (15) [9].

Stoga, po prethodnom teoremu, imajući na umu da je y varijabla u $G(x, y)$, rješenje problema (12) je

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x (1-x)y^2\,\mathrm{d}y + \int_x^1 x(1-y)y\,\mathrm{d}y \\
&= (1-x)\frac{y^3}{3}\Big|_0^x + x\frac{y^2}{2}\Big|_x^1 - x\frac{y^3}{3}\Big|_x^1 \\
&= (1-x)\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^4}{3} \\
&= \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} = \frac{x}{6}(1-x^2).
\end{aligned}
$$

Primjer 2. *Konstruirajte Greenovu funkciju za dani Sturm-Liouvilleov problem*

$$u'' + \omega^2 u = f(x)$$

s uvjetima

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Ovaj problem opisuje prisilno titranje elastične opruge s krajevima $x = a$ i $x = b$. Uočimo da su $\sin(\omega x)$ i $\cos(\omega x)$ dvije funkcije koje zadovoljavaju homogenu jednadžbu

$$u'' + \omega^2 u = 0.$$

Pomoću tih funkcija ćemo konstruirati dvije funkcije u_1 i u_2 koje zadovoljavaju rubne uvjete $u_1(a) = u_2(b) = 0$. Prema tome, vrijedi

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x), \\
u_2(x) &= C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x).
\end{aligned}
$$

Iz uvjeta dobivamo $A = \cos(\omega a)$, $B = -\sin(\omega a)$, $C = \cos(\omega b)$ i $D = -\sin(\omega b)$. Konačne funkcije su

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sin(\omega x)\cos(\omega a) - \sin(\omega a)\cos(\omega x) = \sin(\omega(x-a)), \\ u_2(x) &= \sin(\omega x)\cos(\omega b) - \sin(\omega b)\cos(\omega x) = \sin(\omega(x-b)). \end{aligned}$$

Odgovarajući Wronskijan je dobiven na sljedeći način

$$\begin{aligned} W(y; u_1, u_2) &= u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y) \\ &= \omega \sin(\omega(y-a))\cos(\omega(y-b)) - \omega\cos(\omega(y-a))\sin(\omega(y-b)) \\ &= -\omega\big(\cos(\omega(y-a))\sin(\omega(y-b)) - \sin(\omega(y-a))\cos(\omega(y-b))\big) \\ &= -\omega\sin(\omega(y-b-(y-a))) \\ &= -\omega\sin(\omega(a-b)). \end{aligned}$$

Sada dobivene rezultate uvrstimo u (5) pa proizlazi

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega(y-a))\sin(\omega(x-b))}{-\omega\sin(\omega(a-b))}, & a \leq y < x \\ \\ \frac{\sin(\omega(x-a))\sin(\omega(y-b))}{-\omega\sin(\omega(a-b))}, & x < y \leq b \end{cases}$$

gdje je $\sin(\omega(a-b)) \neq 0$.

Greenova funkcija se koristi i u elektromagnetizmu (Primjer 3) za diferencijalnu jednadžbu (1) pri čemu je L operator, $f(x)$ izvor ili pobuda, a u je polje ili odziv. Češći slučaj u elektromagnetskim problemima (zračenje točkastog izvora, raspršenje elektromagnetskog vala,...) je $Lu - k^2u = f(x)$ jer preko Fourierove transformacije valna jednadžba prelazi u Helmholtzovu gdje je k valni broj [8].

Primjer 3. *Konstruirajte Greenovu funkciju za dani Sturm-Liouvilleov problem*

$$u'' + u = -1$$

s uvjetima

$$u(0) = u\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0.$$

Rješenje homogenog problema $Lu = \frac{du'}{dx} + u = 0$ koje zadovoljava uvjet $u(0) = 0$ dano je sa

$$u_1(x) = \sin x,$$

a rješenje $Lu = 0$ koje zadovoljava uvjet $u(\frac{\pi}{2}) = 0$ dano je sa

$$u_2(x) = \cos x.$$

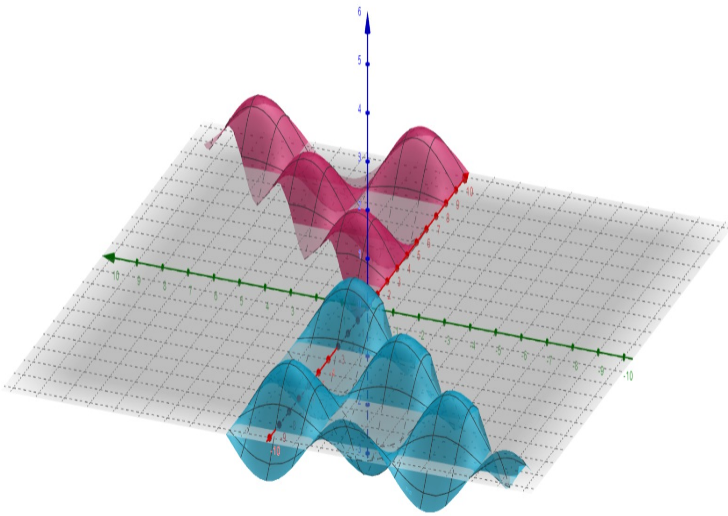
Odgovarajući Wronskijan je dobiven na sljedeći način

$$\begin{aligned} W(y; u_1, u_2) &= u_1(y)u_2'(y) - u_1'(y)u_2(y) \\ &= \sin y(-\sin y) - \cos y \cos y \\ &= -(\sin^2 y + \cos^2 y) = -1. \end{aligned}$$

Kako je u ovom slučaju $p = 1$, (5) postaje

$$G(x, y) = \begin{cases} -\cos x \sin y, & 0 \leq y < x \\ -\sin x \cos y, & x < y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{16}$$

Konačno, rješenje zadanog problema je dano sa



Slika 2. Funkcija $G(x, y)$ (16).

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \cos x \sin y\,\mathrm{d}y + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y\,\mathrm{d}y \\ &= \cos x\big(-\cos y\Big|_0^x\big) + \sin x\big(\sin y\Big|_x^{\frac{\pi}{2}}\big) \end{aligned}$$

$$= \cos x(-\cos x + \cos 0) + \sin x(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x)$$
$$= -1 + \sin x + \cos x.$$

Literatura

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary value problems*, deveto izdanje, John Wiley&Sons, 2009.

[2] M. Čatipović, S. Krešić-Jurić, *Sturm-Liouvilleov problem*, Acta Mathematica Spalatensia.Series Didactica, Vol.4 (2021).

[3] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations*, četvrto izdanje, Boston, 2007.

[4] K. Horvatić, *Linearna algebra*, deveto izdanje, Zagreb, 2004.

[5] Y. Pinchover, J. Rubinstein,*An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] `https://www.physicsforums.com/attachments/sturm_liouville_green_fn-pdf.43061/`(Datum zadnjeg pristupa: 9. 4. 2022.)

[7] `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/dbs26/1BMethods/GreensODE.pdf`(Datum zadnjeg pristupa: 9. 4. 2022.)

[8] `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Analiticke_metode_u\_elektromagnetizmu_i_primjene.pdf`(Datum zadnjeg pristupa: 18. 7. 2022.)

[9] `https://cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-6124-11/StGoChap5.pdf`(Datum zadnjeg pristupa: 11. 4. 2022.)

Marija Čatipović
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,
Ruđera Boškovića 32, 21000 Split
E-mail adresa: `mcatipov@fesb.hr`