O JEDNOM DOBRO POZNATOM ZADATKU

Alija Muminagić i Jens Carstensen, Danska

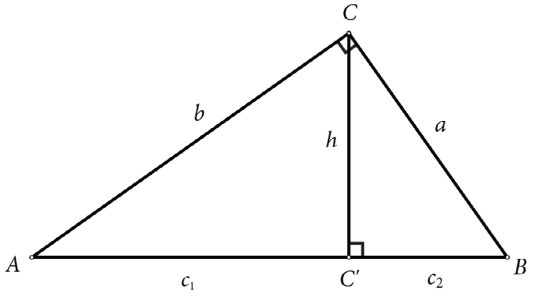
Za svaki pravokutni trokut vrijede brojna zanimljiva svojstva koja povezuju duljine njegovih stranica, visina, težišnica... U ovom ćemo tekstu prikazati tri ne tako poznata rješenja jednog dobro poznatog zadatka.

Dokažimo da u pravokutnom trokutu *ABC* s pravim kutom u vrhu *C* vrijedi jednakost

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2},$$

pri čemu su *a* i *b* duljine hipotenuza, dok je *h* duljina visine na hipotenuzu toga trokuta.

Dokaz 1. Uz oznake kao na Slici 1. vrijedi: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|CC'| = h$, $|AC'| = c_1$ i $|BC'| = c_2$.



Slika 1.

Za svaki pravokutni trokut osim Pitagorina poučka vrijedi i Euklidov poučak (vidi [2]) koji uz oznake kao na slici možemo zapisati na sljedeći način:

$$a^2 = c \cdot c_2 \text{ tj. } \frac{1}{a^2}=\frac{1}{c\cdot c_2},$$

$$b^2 = c \cdot c_1 \text{ tj. } \frac{1}{b^2}=\frac{1}{c\cdot c_1},$$

$$h^2 = c_1 \cdot c_2 \text{ tj. } \frac{1}{h^2}=\frac{1}{c_1\cdot c_2}.$$

Odatle zaključujemo da vrijedi

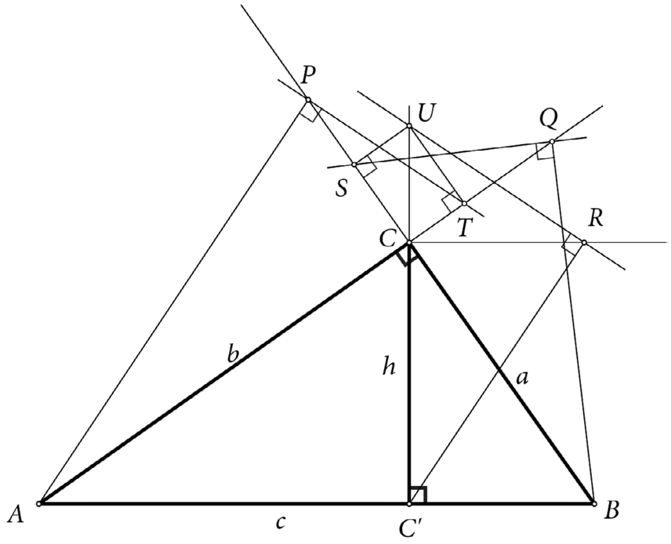
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c\cdot c_2}+\frac{1}{c\cdot c_1}=\frac{c_1+c_2}{c\cdot c_1\cdot c_2}=\frac{1}{c_1\cdot c_2}=\frac{1}{h^2}.$$

Dokaz 2. Izraz za površinu pravokutnog trokuta, uz oznake kao na slici 1., možemo zapisati na dva načina: $p=\frac{1}{2}c\cdot h$ i $p=\frac{1}{2}a\cdot b$. Korištenjem te činjenice, uz simbolički zapis Pitagorina poučka $c^2=a^2+b^2$, možemo pisati

$$\frac{1}{h^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot 4p^2}{4p^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}c\cdot h\right)^2}{4\cdot\left(\frac{1}{2}a\cdot b\right)^2}=\frac{\frac{1}{h^2}\cdot c^2\cdot h^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{c^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Motiv za pisanje ovog teksta je

Dokaz 3: Nacrtan je pravokutni trokut *ABC* s pravim kutom u vrhu *C* (Slika 2.) i standardno je označeno $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|CC'|=h$.



Slika 2.

Na produžetku katete $\overline{BC}$ preko vrha *C* označena je točka *P* tako da je $|CP|=1$. Dužinom spojimo točke *A* i *P* pa u točki *P* konstruiramo okomicu na dužinu $\overline{AP}$. Ta okomica siječe polupravac *AC* u točki *T*. Dobiveni trokut *ATP* pravokutan je, s pravim kutom u vrhu *P*, pa prema Euklidovu poučku (zbog činjenice da je $|AC|\cdot|CT|=|PC|^2$, tj. $b\cdot|CT|=1^2$) slijedi $|CT|=\frac{1}{b}$.

Na isti način na produžetku katete $\overline{AC}$ preko vrha *C* označena je točka *Q* tako da je $|CQ|=1$. Dužinom spojimo točke *B* i *Q* pa u točki *Q* konstruiramo okomicu na dužinu $\overline{BQ}$. Ta okomica siječe polupravac *BC* u točki *S*. Dobiveni trokut *BQS* je pravokutan, s pravim kutom u vrhu Q , pa prema Euklidovu poučku (zbog činjenice da je $|BC| \cdot |CS| = |CQ|^2$, tj. $a \cdot |CS| = 1^2$) slijedi $|CS| = \frac{1}{a}$.

Dalje, u točki *C* konstruiramo okomicu na visinu $\overline{CC_1}$ i na toj okomici označimo točku *R* takvu da vrijedi $|CR| = 1$. U točki *R* konstruiramo okomicu na dužinu $\overline{RC'}$. Nacrtana okomica siječe polupravac *C'C* u točki *U*. U pravokutnom trokutu *C'RU* (s pravim kutom u vrhu *R*), prema Euklidovu poučku (zbog činjenice da je $|C'C| \cdot |CU| = |CR|^2$, tj. $h \cdot |CU| = 1^2$) vrijedi $|CU| = \frac{1}{h}$.

Dužinama spojimo točke *U* i *S*, odnosno *U* i *T*.

U trokutima *USC* i *BC'C* vrijedi $\frac{|BC|}{|UC|} = \frac{a}{\frac{1}{h}} = ah$ i $\frac{|CC'|}{|CS|} = \frac{h}{\frac{1}{a}} = ah$, tj. $\frac{|BC|}{|UC|} = \frac{|CC'|}{|CS|}$, što znači da su trokuti *USC* i *BC'C* slični, tj. da je $\Delta USC \sim \Delta BC'C$. Iz te sličnosti zaključujemo da je $|\angle USC| = 90°$.

Analogno zaključujemo da vrijedi $\Delta UTC \sim \Delta AC'C$, pa je $|\angle UTC| = 90°$.

Dakle, četverokut *SCTU* je pravokutnik, pri čemu vrijedi $|SU| = |CT| = \frac{1}{b}$. Konačno, primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut *USC* dobivamo $|CS|^2 + |SU|^2 = |CU|^2$, odnosno $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$, a to je trebalo dokazati.

Literatura:

1. J. Carstensen, A. Muminagić, P. Mladinić: Pravokutni trokut, HMD, Zagreb, 2001.
2. R. Svedrec: Euklid i kvadratne pločice, Matka 25 (2016./2017.), br. 99, str. 160-163