

JE LI PROSJEK – PROSJEČAN?

Renata Svedrec, Zagreb



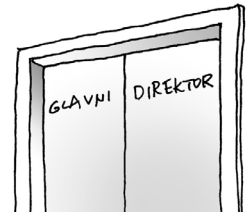
Matka 30 (2021./2022.) br. 119

U svakodnevnom životu često trebamo niz brojčanih podataka zamijeniti jednim brojem – srednjom vrijednosti ili prosjekom tih podataka. Kako izračunati prosjek ocjena, naučili ste uglavnom puno prije nego ste na satu matematike čuli za pojam „aritmetička sredina”. Zbrojili ste sve ocjene iz pojedinog predmeta i dobiveni zbroj podijelili brojem ocjena. Na taj ste način doznali koliko se zaključnoj ocjeni možete nadati.

Pitanje je, međutim, prikazuje li na takav način izračunat prosjek uvijek realno stanje (npr. prosječnu starost skupine osoba ili prosječnu zaradu u nekom poduzeću). Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1. U jednom poduzeću zaposleno je 15 osoba. Njihove tjedne zarade (u eurima) iznose:

110	120	90	120	115
700	115	150	120	90
550	310	115	120	100



Kolika je prosječna tjedna zarada? Koliko zaposlenika tog poduzeća zarađuje manje od prosjeka? Kako je moguće obrazložiti dobiveni rezultat?

Rješenje: Ukupna tjedna zarada je 2925 €, a prosječna $2925 : 15 = 195$ €, pri čemu čak 12 od 15 zaposlenih zarađuje manje od prosjeka. Razlog je taj što preostala 3 zaposlenika značajno dižu prosjek. Uočite da niti jedan zaposlenik nije blizu prosjeka!

Na temelju ovog primjera nije teško zaključiti da aritmetička sredina (prosjeck) ne opisuje uvijek dobro dani skup brojčanih podataka. Zbog toga se u statistici koriste i druge mjere srednje vrijednosti – *medijan* i *mod* te *raspon* kao mjera raspršenosti podataka.

Što su medijan, mod i raspon?

Medijan¹ je središnji podatak **sortiranog** niza brojčanih podataka. Ukoliko niz ima paran broj članova, medijan je aritmetička sredina dvaju središnjih članova sortiranog niza podataka.

Mod niza podataka je vrijednost podatka koji je najčešći u nizu, tj. **vrijednost podatka s najvećom frekvencijom**. Mod ćemo najlakše odrediti zapišemo li zadane podatke u tablicu frekvencija.

¹Za određivanje medijana podatci MORAJU biti poredani po veličini.





Odredimo medijan i mod podataka iz prije razmatranog primjera.

Primjer 2. Tjedne zarade zaposlenika u nekom poduzeću (u eurima) iznose:

110, 120, 90, 120, 115, 700, 115, 150, 120, 90, 550, 310, 115, 120 i 100.

Koliki su medijan i mod ovog niza podataka?

Rješenje. Zadane podatke ispišimo u rastućem nizu:

90, 90, 100, 110, 115, 115, 115, 120, 120, 120, 120, 150, 310, 550, 700

Budući da imamo 15 podataka, ispred i iza medijana nalazi se po 7 podataka, a medijan je osmi član niza.

90, 90, 100, 110, 115, 115, 115, 120, 120, 120, 120, 150, 310, 550, 700

Dakle, medijan ovoga niza je 120.

Uočite da se medijan bitno razlikuje od aritmetičke sredine (prosjeaka) koji je bio 195! Što mislite zbog čega se medijan i aritmetička sredina bitno razlikuju? Opisuje li medijan bolje ovaj niz podataka od aritmetičke sredine?

Da bismo odredili mod, zadane podatke zapišimo u tablicu frekvencija:

Iznos	90	100	110	115	120	150	310	550	700
Broj osoba	2	1	1	3	4	1	1	1	1

Najveću frekvenciju ima iznos od 120 € pa je mod ovoga niza 120. Uočite da su u ovom primjeru mod i medijan međusobno jednaki.

Niz podataka može imati više nego jedan mod, a moguće je da mod niza podataka ne postoji.

Primjer 3. Niz zadan tablicom frekvencija

Vrijednost	11	12	13	14	15
Frekvencija	3	4	2	1	4

ima dva moda, 12 i 15, jer obje vrijednosti imaju frekvenciju 4.

Primjer 4. Niz zadan tablicom frekvencija

Vrijednost	111	112	113	114	115
Frekvencija	5	5	5	5	5

nema mod jer sve vrijednosti imaju jednaku frekvenciju.

Raspon ne predstavlja prosječnu (srednju) vrijednost nego **opisuje raspršenost podataka**. Za bilo koji niz podataka raspon računamo tako da od najveće vrijednosti oduzmemo najmanju vrijednost.



Primjer 3. Koliki je raspon tjednih zarada u promatranom poduzeću (Primjer 1. i 2.)?

Rješenje. Budući da najveća tjedna zarada iznosi 700 €, a najmanja 90 €, raspon zarada je $700 - 90 = 610$ €.

Zadatak 1. U jednoj je anketi sudjelovalo 20 ispitanika. Njihova dob bila je 15, 18, 44, 16, 49, 76, 43, 65, 16, 22, 52, 56, 68, 16, 56, 56, 78, 14, 44 i 46. Kolika je prosječna dob ispitanika? Koliko je ispitanika starije od prosjeka? Odredite medijan, mod i raspon ovih podataka.

Rješenje. Prosječna dob je $850 : 20 = 42.5$ godina, a od prosjeka je starije čak 13 ispitanika, no troje ih je blizu prosjeka.

Da bismo odredili medijan, zadane podatke ispišimo u rastućem nizu:

14, 15, 16, 16, 16, 18, 22, 43, 44, 44, 46, 49, 52, 56, 56, 56, 65, 68, 76, 78

Budući da imamo 20 podataka, ispred i iza medijana nalazi se po 9 podataka, a medijan je aritmetička sredina dvaju središnjih članova niza.

~~14, 15, 16, 16, 16, 18, 22, 43, 44, 44, 46, 49, 52, 56, 56, 56, 65, 68, 76, 78~~

Dakle, medijan ovoga niza je $(44 + 46) : 2 = 45$.

Uočite da se medijan razlikuje od aritmetičke sredine (prosjeaka) koji je bio 42.5! Što mislite zbog čega se medijan i aritmetička sredina razlikuju?

Da bismo odredili mod ovih podataka, zadane podatke zapišimo u tablici frekvencija:

Dob	14	15	16	18	22	43	44	46	49	52	56	65	68	76	78
Broj osoba	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	1

Najveću frekvenciju ima dob od 16 i 56 godina te je ovo primjer niza koji ima dva moda – dob od 16 i 56 godina.

Raspon podataka je $78 - 14 = 64$.

Zadatak 2. U tvornici sokova žele provjeriti ispravnost stroja koji puni sok „Mrkvica”. Uzeli su slučajni uzorak od 45 napunjenih boca i izmjerili količinu soka u njima. Zabilježili su sljedeće podatke:

0.71	0.73	0.73	0.75	0.75	0.75	0.71	0.77	0.76
0.75	0.72	0.72	0.78	0.75	0.75	0.74	0.76	0.73
0.73	0.72	0.75	0.75	0.73	0.74	0.71	0.72	0.78
0.72	0.73	0.74	0.75	0.72	0.74	0.75	0.76	0.75
0.73	0.74	0.74	0.75	0.76	0.75	0.77	0.73	0.74



Litara u boci	Broj boca
0.71	3
0.72	6
0.73	8
0.74	7
0.75	13
0.76	4
0.77	2
0.78	2

Kolika je prosječna količina soka u bocama promatranog uzorka? Odredite raspon, medijan i mod ovoga niza podataka.

Rješenje. Radi jednostavnijeg računanja, podatke upišimo u tablicu lijevo:

Da bismo odredili prosječnu količinu soka u boci, potrebno je zbrojiti količinu soka u svim bocama iz uzorka i dobiveni broj podijeliti brojem 45. U svim bocama uzorka nalazi se ukupno 33.36 litara soka, što znači da je prosječna količina soka u bocama jednaka 0.7413 litre. Budući da niz ima 45 podataka, ispred i iza medijana nalaze se po 22 podatka. Zato je medijan ovog niza jednak 0.74, mod je 0.75, a raspon 0.07.

Zadatak 3. Kompanija nije zadovoljna činjenicom da se količina soka u nekim bocama razlikuje od deklarirane (navedene) količine za 0.02 litre ili više od toga! Budući da 9 boca sadrži manje od 0.73 litre, a 2 boce sadrže više od 0.77 litara, vjerojatnost neželjenog odstupanja je

$$\frac{11}{45} = 0.24 \approx \frac{1}{4}.$$

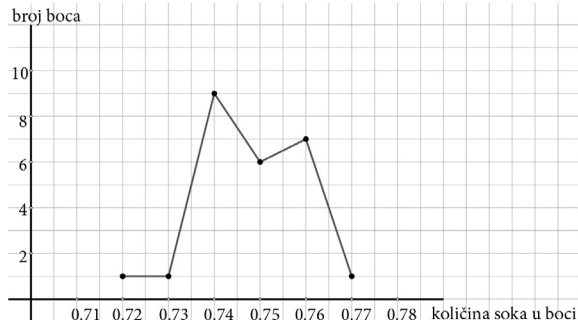
Iako je stroj bio namješten tako da puni točno 0.75 litara soka u boci, s vjerojatnošću od približno 25 % u bocama je bilo odstupanja većeg od 0.02 litre. To je navelo upravu kompanije na sumnju da stroj nije dobro namješten. Nakon podešavanja stroja uzet je novi slučajni uzorak. Taj je uzorak prikazan grafom na slici lijevo.

Koliko je boca u drugom uzorku? Kolika je prosječna količina soka u bocama promatranog uzorka? Odredite raspon, medijan i mod ovog niza podataka. Kolika je vjerojatnost da u boci iz uzorka ima manje od 0.73 l soka?

Rješenje. U drugom je uzorku 25 boca, a prosječna količina soka u bocama uzorka je 0.75 litara. Raspon uzorka je 0.05, medijan ovoga niza je 0.75, a mod 0.74. Vjerojatnost da u boci iz uzorka ima manje od 0.73 ili više od 0.77 l soka iznosi $\frac{1}{25} = 4\%$.

Zadatak 4. Odredite aritmetičku sredinu, medijan i mod svakog od nizova podataka:

- 2, 3, 3, 9, 12, 13, 13, 13, 22
- 19, 23, 5, 8, 10, 12, 8, 14, 22, 8, 25
- 2.9, 17.1, 3.8, 8.1, 9.6, 19.7, 8.1, 5.5, 19.7



- d) 2.4, 8.1, 2.9, 6.2, 2.4, 9.2, 7.3, 0.7, 1.6, 7.3, 7.3
 e) 3, 6, 8, 9, 12, 14, 17, 19
 f) 12, 9, 2, 8, 6, 7, 8, 9, 10, 9

Zadatak 5. Učenici jednog razreda su na ispitu iz matematike, na kojemu je ukupno bilo 60 bodova, postigli sljedeće bodove: 22, 33, 35, 37, 48, 56, 37, 60, 42, 55, 23, 49, 37, 59, 18, 12, 40, 44, 19, 39, 38, 40, 52, 47 i 45.

- a) Koliko je učenika pisalo taj ispit?
 b) Koliki je prosječan broj osvojenih bodova?
 c) Koliki je medijan ovog niza podataka?
 d) Koliki je mod ovoga niza?
 e) Koliki je raspon broja osvojenih bodova?
 f) Ako je kriterij ocjenjivanja ispita dan tablicom, pronađite koliki je broj učenika dobio koju ocjenu.

Ocjena	nedovoljan	dovoljan	doobar	vrlo doobar	odličan
Postotak riješenosti	0 – 50 %	51 % – 62 %	63 % – 76 %	77 % – 89 %	90 % – 100 %
Broj bodova	0 – 30				
Broj učenika					

- g) Kolika je srednja ocjena (prosjeck) razreda?

Prosječna ocjena tog razrednog odjela bila je 2.88

Ocjena	nedovoljan	dovoljan	doobar	vrlo doobar	odličan
Postotak riješenosti	0 – 50 %	51 % – 62 %	63 % – 75 %	76 % – 89 %	90 % – 100 %
Broj bodova	0 – 30	31 – 37	38 – 45	46 – 53	54 – 60
frekvencija	5	5	7	4	4

Zadatak 5. Ispit je pisalo 25 učenika. Prosječan broj osvojenih bodova iznosi 39,48, medijan je 40, mod 37, a raspon 48.

sortirani niz	aritmetička sredina	medijan	mod
2, 3, 3, 9, 12, 13, 13, 13, 22	10	12	13
5, 8, 8, 10, 12, 14, 19, 22, 23, 25	14	12	8
2, 9, 3, 8, 5, 5, 8, 1, 8, 1, 9, 6, 17, 1, 19, 7, 19, 7	10,5	8,1	8,1 i 19,7
0, 7, 1, 6, 2, 4, 2, 4, 2, 9, 6, 2, 7, 3, 7, 3, 7, 3, 8, 1, 9, 2	7	6,2	7,3
3, 6, 8, 9, 12, 14, 17, 19	11	(9 + 12) : 2 = 10,5	ne postoji
2, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 12	8	(8 + 9) : 2 = 8,5	9

Zadatak 4. Odredite aritmetičku sredinu, medijan i mod svakog od nizova podataka:

Rješena zadatka

